

## Capitolo 5

# Modellazione numerica, risultati e confronti

### 5.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo vengono riportati i risultati ottenuti dalle simulazioni numeriche, effettuate con il software Diana. La prima parte è dedicata ai risultati relativi all'analisi del comportamento a flessione di provini, intagliati in mezzeria, di calcestruzzo semplice e rinforzati con fibre polimeriche; nella seconda parte sono, invece, riportati i risultati delle modellazioni sviluppate su travi in calcestruzzo armato con barre d'acciaio ad aderenza migliorata, realizzate con calcestruzzo semplice e travi armate in calcestruzzo rinforzate con fibre d'acciaio.

Obiettivi delle simulazioni sono :

- 1) L'analisi del reale comportamento del calcestruzzo nella fase fessurativa e la valutazione del contributo offerto dalle fibre in termini di tenacità (resistenza all'avanzamento della fessura) e di duttilità. La presenza delle fibre, infatti, come esposto nei capitoli precedenti, consente di trasformare il comportamento del calcestruzzo da quasi-fragile in duttile. I risultati ottenuti e presentati di seguito vogliono evidenziare le differenze esistenti tra i calcestruzzi semplici e quelli additivati con fibre fornendo delle buone approssimazioni nella definizione del comportamento post-fessurativo dei calcestruzzi fibrorinforzati.
- 2) L'efficacia della modellazione numerica basata sulla meccanica della frattura nel predire il comportamento strutturale di elementi in calcestruzzo fibrorinforzato.

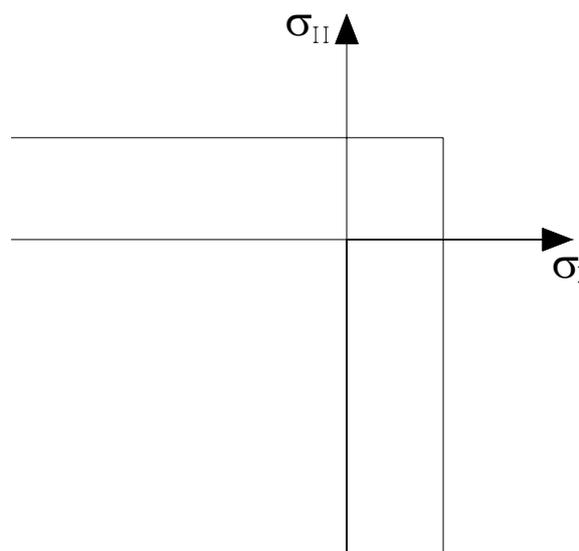
### 5.2 MODELLAZIONE CON IL SOFTWARE DIANA

---

Le proprietà del calcestruzzo che vengono utilizzate nelle modellazioni svolgono un ruolo importante per la buona riuscita delle modellazioni. Come in precedenza specificato, il calcestruzzo presenta caratteristiche di isotropia solo prima della fessurazione, mentre nella fase post-fessurativa si comporta un materiale ortotropo. Infatti il calcestruzzo presenta un legame costitutivo elastico ed legame non lineare in fase post fessurata sempre più accentuata fino alla resistenza ultima.

Nella modellazione numerica il comportamento quasi-fragile del calcestruzzo è stato simulato mediante la teoria non lineare della meccanica della frattura e attraverso un modello di plasticità. In particolare i concetti posti alla base della definizione del modello sono quelli che riguardano la fessurazione basata sulla deformazione totale che rientra nell'ambito della fessurazione diffusa o smeared crack models, combinati con il comportamento di softening non lineare del calcestruzzo e con il modello di plasticità basato sulla superficie di snervamento di Rankine. La fessura ha origine quando la tensione principale massima di trazione in un punto supera la resistenza a trazione del materiale; inoltre, la propagazione della fessura viene regolata dall'energia di frattura e dalla forma discendente del legame costitutivo a trazione che, superato il valore di picco della tensione, presenta un ramo discendente (ramo softening). L'energia di frattura è identificata dalla superficie sottesa dalla curva  $\sigma - w$  (tensione-apertura della fessura).

Il modello di fessurazione adottato si basa sul criterio di resistenza della superficie di snervamento di Rankine valido sia nel campo della trazione che in quello della compressione.



**Fig. 5.2** – Superficie di snervamento di Rankine nel piano delle tensioni principali .

Il modello della fessurazione diffusa utilizza i Total Strain Crack Models che, come esposto in precedenza, si basano sul concetto della deformazione totale e descrivono il comportamento a trazione ed a compressione del materiale attraverso una relazione  $\sigma - \varepsilon$ . Questo approccio è adatto sia per le analisi agli stati limite di servizio (SLS), sia per le analisi agli stati limite ultimi (SLU) che sono per la maggior parte governati dalla fessurazione del calcestruzzo.

In particolare, nel modello utilizzato, la formazione e la propagazione delle fessure sono state simulate con l'approccio della fessura rotante o rotating crack model (RCM), definito anche come Total Strain Rotating crack model, secondo il quale si ha la formazione di una fessura primaria perpendicolarmente alla direzione della tensione principale massima quando la resistenza a trazione del calcestruzzo raggiunge il suo valore massimo e le direzioni della fessura (n,t) ruotano continuamente con le direzioni principali del vettore deformazione. In particolare dopo la formazione di una fessura primaria, finché la tensione principale ruota, la sua direzione non rimane perpendicolare al piano della fessura e la resistenza a trazione del calcestruzzo può essere superata in un'altra direzione principale. In tal modo la fessura ruota in corrispondenza di tutti i passi di carico, al variare della direzione della deformazione, e non si ha formazione di taglio nel piano della fessura stessa.

Le direzioni delle deformazioni principali definiscono i piani di ortotropia. Vengono prese in considerazione solo le fessure da modo I dal momento che esse non presentano componente tangenziale in corrispondenza del loro fronte.

Oltre ai suddetti concetti, un altro principio basilare su cui si fonda il modello è quello per cui la tensione è valutata nelle direzioni date dalle direzioni delle fessure. Il vettore deformazione  $\varepsilon_{xyz}$  nel sistema di coordinate dell'elemento  $xyz$  è aggiornato con l'incremento di deformazione  $\Delta\varepsilon_{xyz}$  secondo la seguente relazione :

$$\varepsilon_{xyz}^{t+\Delta t} = \varepsilon_{xyz}^t + \Delta\varepsilon_{xyz} \quad (5.2.1)$$

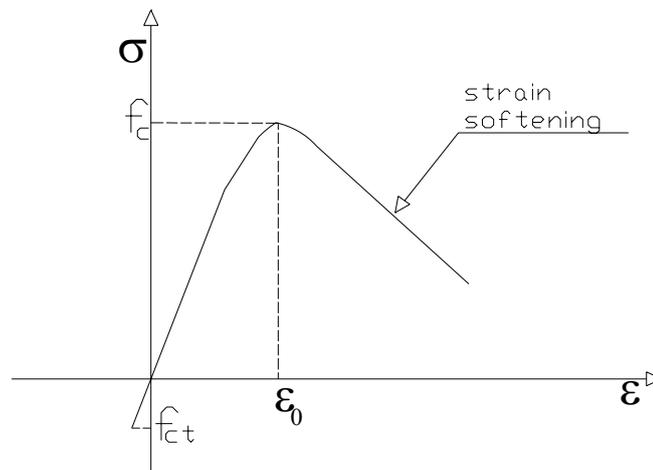
che viene trasformato nel vettore deformazione nelle direzioni della fessura mediante la matrice di trasformazione T

$$\varepsilon_{nst}^{t+\Delta t} = T \varepsilon_{xyz}^{t+\Delta t} \quad (5.2.2)$$

La matrice di trasformazione della deformazione  $T$  dipende dal vettore di deformazione attuale:

$$T = T \begin{pmatrix} t + \Delta t \\ i + 1 \\ \varepsilon_{xyz} \end{pmatrix} \quad (5.2.3)$$

Per quanto concerne il comportamento del calcestruzzo a compressione esso è di fondamentale importanza dal momento che il conglomerato cementizio assolve, principalmente, il compito di resistere alle tensioni di compressione. La resistenza a compressione costituisce il criterio di qualità del calcestruzzo che, in virtù delle sue caratteristiche, non raggiunge immediatamente la rottura in corrispondenza della sua resistenza ultima, ma superato questo valore, mostra una capacità portante con andamento lentamente decrescente all'aumentare della deformazione. Questo tipo di risposta è un'indicazione del grado di duttilità posseduta dal calcestruzzo. Pertanto il grafico tensione-deformazione del calcestruzzo a compressione è composto da un ramo ascendente ed un tratto con andamento gradualmente decrescente, chiamato ramo di softening come riportato nella figura seguente.



**Fig. 5.2.1** – Comportamento costitutivo del calcestruzzo a compressione .

Come nel caso del calcestruzzo a compressione anche nel caso della trazione, esso può sopportare valori di deformazione più elevati di  $\varepsilon_{ct}$  ed il suo comportamento post-picco è caratterizzato da un ramo di softening a trazione che viene definita di seguito.

In particolare il legame costitutivo del calcestruzzo a trazione sia nel caso del calcestruzzo semplice che di quello rinforzato con fibre, è quello tension-softening lineare espresso dalle seguenti relazioni :

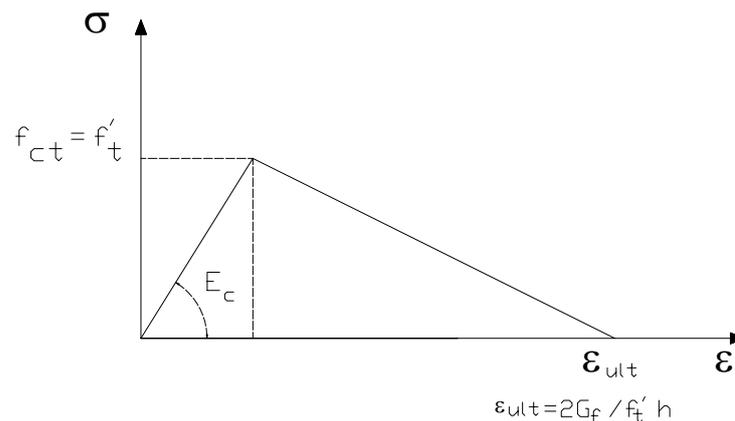
$$\sigma^{cr}_{mn}(\varepsilon^{cr}_{mn}) = f_{ct} \cdot y \left( \frac{\varepsilon^{cr}_{mn}}{\varepsilon^{cr}_{nult}} \right) \quad (5.2.4)$$

$$\varepsilon_u = \frac{2G_f}{f_{ct} \cdot h} \quad (5.2.5)$$

Nella (5.2.4)  $f_{ct}$  è la resistenza a trazione,  $\sigma^{cr}_{mn}$ ,  $\varepsilon^{cr}_{mn}$  rappresentano rispettivamente la tensione e la deformazione in corrispondenza della fessura, la funzione  $y$  rappresenta il diagramma di softening.

Dalla (5.2.5), invece, si ottiene la deformazione ultima  $\varepsilon_u$  in funzione dei parametri  $h$ ,  $f_{ct}$  e  $G_f$  che rappresentano rispettivamente :

- $h$ , espressa in millimetri, è definita come larghezza di banda della fessura che rappresenta la lunghezza su cui la fessura è diffusa e viene, generalmente, determinata sulla base dei concetti posti di seguito;
- $f_{ct}$  o  $f'_t$  è la resistenza a trazione del calcestruzzo in MPa;
- $G_f$  è l'energia di frattura in N/mm;



**Figura 5.2.2** – Modello di softening lineare

Come riportato nella letteratura tecnica il parametro  $h$  può essere determinato in tre modi differenti :

1.  $h$  è pari alla radice quadrata dell'area dell'elemento finito;

2.  $h$  è pari alla radice quadrata dell'area del punto di integrazione;
3.  $h$  viene posto pari ad un valore costante.

Il valore di  $h$ , di cui al punto 2, può essere espresso mediante la seguente relazione :

$$h = \alpha_h \sqrt{A_e} = \alpha_h \left( \sum_{\xi=1}^{n_\xi} \sum_{\eta=1}^{n_\eta} \det(J) w_\xi w_\eta \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.2.6)$$

in cui  $w_\xi$  e  $w_\eta$  sono i fattori peso della regola di integrazione di Gauss,  $\xi$  ed  $\eta$  sono le coordinate locali isoparametriche dei punti di integrazione, il  $\det(J)$  è la matrice Jacobiana della trasformazione tra coordinate isoparametriche locali ed il sistema di coordinate globale ed, infine, il fattore  $\alpha_h$  detto fattore variante o di modifica è pari ad 1 nel caso di elementi quadrati e a  $\sqrt{2}$  nel caso di elementi lineari .

Nei casi esaminati il valore di  $h$  è stato determinato in seguito ad una serie di valutazioni fatte sui risultati di un vasto numero di analisi che hanno portato ad assumere per  $h$  quel valore che, più degli altri, consente di ottenere valori di carico e spostamento in mezzeria dei campioni analizzati prossimo ai valori mostrati dalle

strutture in calcestruzzo in condizioni reali; in sintesi il valore scelto si approssima molto a quello della radice quadrata dell'area dell'elemento finito .

Oltre ad impiegare il modello lineare di tension-softening sono state svolte anche delle analisi numeriche con il metodo del tension-softening esponenziale di Hordijk et al. la cui relazione di softening è definita nel seguente modo:

$$1) \frac{\sigma^{cr}_{nm}(\varepsilon^{cr}_{nm})}{f_t} = \left( 1 + \left( c_1 \frac{\varepsilon^{cr}_{nm}}{\varepsilon^{cr}_{nm,ult}} \right)^3 \right) \exp\left( -c_2 \frac{\varepsilon^{cr}_{nm}}{\varepsilon^{cr}_{nm,ult}} \right) - \frac{\varepsilon^{cr}_n}{\varepsilon^{cr}_{n,ult}} (1 + c_1^3) \exp(-c_2)$$

(5.2.7)

se  $0 < \varepsilon^{cr}_n < \varepsilon^{cr}_{n,ult}$

$$2) \frac{\sigma^{cr}_{nm}(\varepsilon^{cr}_{nm})}{f_t} = 0 \quad \text{se } \varepsilon^{cr}_{nm,ult} < \varepsilon^{cr}_{nm} < \infty \quad (5.2.8)$$

con i parametri  $c_1=3.0$  e  $c_2=6.93$  .

La deformazione ultima è pari a :

$$\varepsilon^{cr}_{nm,ult} = 5.136 \frac{G_f^I}{hf_t} \quad (5.2.9)$$

dove il valore 5.136 corrisponde a  $\frac{1}{k}$  con  $k$  definito nel seguente modo:

$$k = \left[ \frac{1}{c_2} \left[ 1 + 6 \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^3 \right] - \left[ \frac{1}{c_2} + c^3_1 \left( \frac{1}{c_2} + \frac{3}{c^2_2} + \frac{6}{c^3_2} + \frac{6}{c^4_2} \right) + \frac{1}{2} (1 + c^3_1) \right] \right] \exp(-c_2)$$

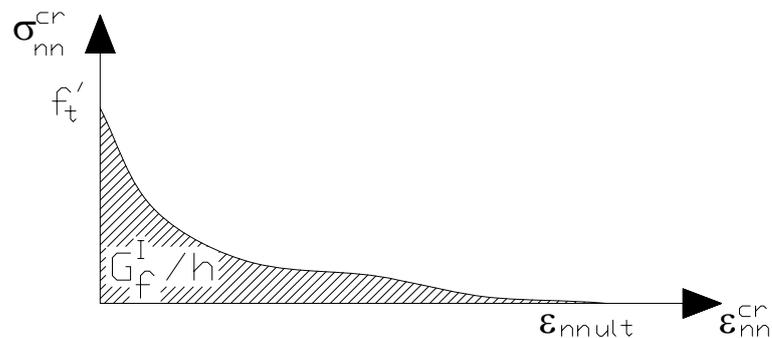
(5.2.10)

Il modulo di rigidezza della fessura in condizioni di modo I è definito dalla seguente relazione :

$$D_I^{cr} = f_{ct} \left[ \frac{3 \left( C_1 \frac{\varepsilon^{cr}_n}{\varepsilon^{cr}_{n,ult}} \right) \frac{C_1}{\varepsilon^{cr}_{n,ult}} \exp \left( -C_2 \frac{\varepsilon^{cr}_n}{\varepsilon^{cr}_{n,ult}} \right) + \exp \left( -C_2 \frac{\varepsilon^{cr}_n}{\varepsilon^{cr}_{n,ult}} \right) \left( -C_2 \frac{\varepsilon^{cr}_n}{\varepsilon^{cr}_{n,ult}} \right)}{\left[ 1 + \left( C_1 \frac{\varepsilon^{cr}_n}{\varepsilon^{cr}_{n,ult}} \right)^3 \right] - \frac{1 + C^3_1}{\varepsilon^{cr}_{n,ult}} (-C_2)} \right]$$

(5.2.11)

Il legame costitutivo adoperato per il calcestruzzo a trazione nel caso di exponential tension softening è rappresentato nella seguente figura :



**Figura 5.2.3** – Modello di softening non lineare (Hordijk , Cornelissen e Reinhardt).

dove  $G_f^I$ ,  $h$  ed  $f_{ct}$  sono i parametri, già introdotti nel caso di softening con andamento lineare.

L'energia di frattura  $G_f$ , nel caso di calcestruzzo semplice può essere stimata, in modo approssimato, dalla resistenza a compressione  $f_c$  e dalla dimensione massima degli aggregati secondo la seguente formula :

$$G_f \cdot 0.2 \cdot \alpha_f \cdot f \cdot 0.7^{0.7} \quad (5.2.12)$$

dove  $\alpha_f = 10 + 1.25d_a$  e  $d_a = 8 \div 32mm$  (5.2.13) la massima dimensione dell'aggregato.

La completezza del modello costitutivo si raggiunge quando sono noti i criteri per la formazione della fessura e le relazioni tra tensioni e deformazioni della fessura stessa. I principi che regolano il processo di formazione delle fessure nel calcestruzzo, nell'ambito dei modelli di fessurazione diffusa, sono fondamentalmente due :

- 1) Il superamento per la tensione principale della resistenza a trazione;
- 2) Il superamento del valore di soglia o valore limite  $\alpha_{TD}$  per l'angolo che si genera tra una fessura esistente e la direzione della tensione principale. L'angolo di soglia può variare, generalmente, tra  $30^\circ$  e  $60^\circ$ ; nel caso in esame è stato posto pari all'estremo superiore dell'intervallo. In sintesi è necessario che siano soddisfatti

contemporaneamente i due criteri di cui sopra affinché si verifichi la formazione di fessure .

In alcuni casi, però, è possibile che si abbia il superamento solo della prima condizione mentre l'altra non venga soddisfatta. Il mancato soddisfacimento della seconda condizione sta ad indicare che non si è formata una nuova fessura. La figura che segue descrive il processo secondo cui avvengono la formazione e la propagazione della fessura nel caso del diagramma tension-softening esponenziale.



**Figura 5.2.4** - Stato di fessurazione

Il punto 1 corrisponde al punto di inizio in corrispondenza del quale la fessura si forma; il tratto 2 costituisce l'opening status o stato di apertura che si manifesta quando la fessura è nel ramo discendente di softening; i tratti 3 e 5 rappresentano un tratto secante che simula i processi di scarico e ricarica, il punto 4 rappresenta lo stato di chiusura della fessura in cui  $\varepsilon_n^{cr} = 0$  ed, infine, il punto 6 descrive il fully open crack status che rappresenta la condizione in corrispondenza della quale l'energia di frattura è completamente esaurita.

Nelle simulazioni numeriche sono stati utilizzati due modelli differenti per il calcestruzzo a trazione e per quello a compressione; in particolare nella modellazione dei provini di calcestruzzo intagliati sono stati utilizzati a trazione sia il modello di tension-softening lineare che quello esponenziale e la curva di curva di Thorenfeldt per descrivere il comportamento a trazione; nel caso delle travi armate, invece, è stato

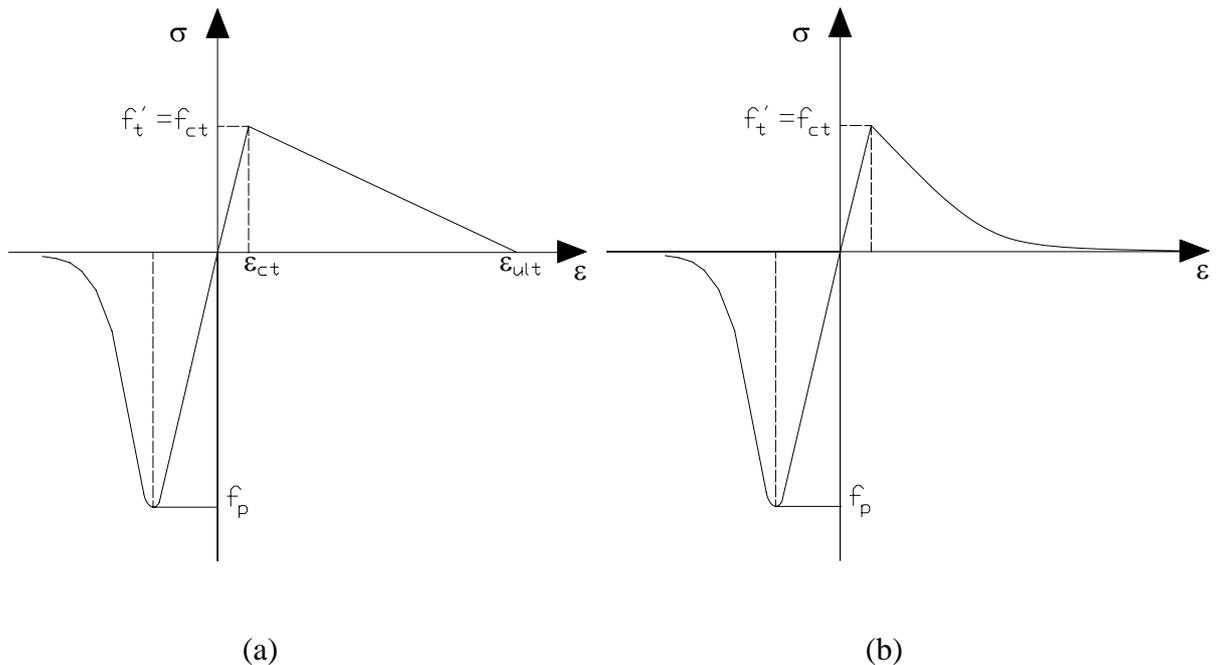
utilizzato il modello di tension-softening esponenziale a trazione e la curva di Thorenfeldt a compressione. Quest'ultima è descritta dalla seguente relazione:

$$\frac{\sigma}{f_c} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \left( \frac{n}{n-1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{nk}} \right) \quad (5.2.14)$$

$$n = 0.80 + \frac{f_{cc}}{17}, \quad k = \left\{ \begin{array}{l} 1, se \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} < 1 \\ 0.67 + \frac{f_{cc}}{62}, se \alpha \leq \alpha_p \end{array} \right\} \quad (5.2.15)$$

dove  $k$  è il termine di decadimento post picco ed  $n$  è un fattore di curva.

La figura seguente descrive i due comportamenti a trazione e compressione per il calcestruzzo.



**Figura 5.2.5** – Diagrammi complessivi tensione-deformazione del calcestruzzo : (a) softening lineare a trazione e curva di Thorenfeldt a compressione , (b) softening esponenziale a trazione e curva di Thorenfeldt a compressione .

L'implementazione dei dati del modello riguarda le proprietà di base quali il modulo di Young, il coefficiente di Poisson, la resistenza a compressione e a trazione e la definizione del comportamento a trazione e compressione.

Nella procedura incrementale – iterativa di Newton Raphson utilizzata, l'equilibrio tra il vettore delle forze interne e il vettore dei carichi esterni è raggiunto avvalendosi della matrice di rigidità tangente che ha dimostrato, nell'ambito delle applicazioni in strutture di calcestruzzo soggette a propagazione della fessurazione e fessurazione

localizzata, di fornire delle soluzioni stabili e soddisfacenti. La matrice di rigidezza tangente nel sistema di coordinate di un elemento è data dalla seguente espressione :

$$D = T^T D_{\text{tan gente}} T \quad (5.2.16)$$

dove T è la matrice di trasformazione della deformazione e  $D_{\text{tan gente}}$  la matrice di rigidezza tangente nel sistema di coordinate globale. La matrice D può essere decomposta in quattro sottomatrici

$$D_{\text{tan gente}} = \begin{bmatrix} D_{nn} & D_{ng} \\ D_{gn} & D_{gg} \end{bmatrix} \quad (5.2.17)$$

con  $D_{nn}$  che rappresenta la sottomatrice di rigidezza tangente delle componenti normali della deformazione locale della fessura;  $D_{gg}$  è la sottomatrice della rigidezza tangente delle componenti tangenziali della deformazione locale;  $D_{ng}$  e  $D_{gn}$  le sottomatrici della matrice di rigidezza tangente che rappresentano i termini misti (termini d'accoppiamento tra deformazione normale e tangenziale).

### 5.3 PROVINI INTAGLIATI IN CALCESTRUZZO SEMPLICE E FIBRORINFORZATO

Nel seguito sono descritti i risultati delle analisi del comportamento meccanico di provini intagliati rinforzati con fibre RXF 54, prodotte dalla Ruredil, in copolimero olefinico (fibre polimeriche) ed impiegate con dosaggi differenti. L'analisi numerica è stata eseguita sulla base dei principi della fessurazione diffusa della Meccanica della Frattura non lineare; i risultati ottenuti sono stati confrontati con quelli sperimentali relativi ad un ampio numero di prove eseguite nell'ambito del progetto di ricerca

portato avanti dalla Ruredil nel 2004 in collaborazione con il dipartimento di Ingegneria Civile dell'Università degli Studi di Brescia ( Studio sperimentale sul comportamento a frattura di calcestruzzi rinforzati con fibre Ruredil X Fiber 54)

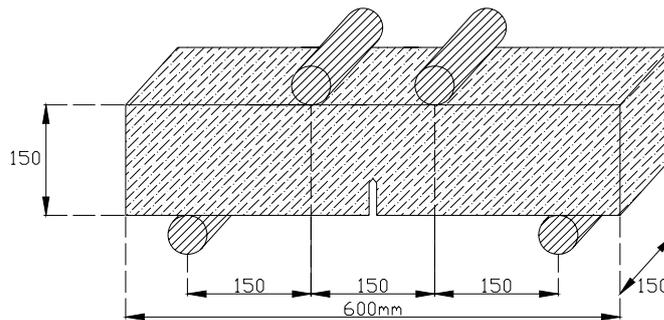
La Ruredil s.p.a è una società italiana che opera nel settore della produzione di prodotti dell'industria edile e che ha dato l'avvio, nei propri laboratori di ricerca, ad un'intensa attività che le consente di mettere a punto i propri prodotti in collaborazione con Università e centri di ricerca esterni .

Sono state eseguite prove a flessione su quattro punti di carico su provini intagliati di calcestruzzo semplice e calcestruzzo fibrorinforzato. Per l'esecuzione delle suddette prove sperimentali sono state opportunamente preparate delle miscele di calcestruzzo semplice e di calcestruzzo rinforzato con fibre, al variare della resistenza meccanica del calcestruzzo e della percentuale volumetrica di fibre. Le prove hanno consentito di ricavare il carico totale agente sui provini (cioè la forza trasmessa dalla macchina di prova), lo spostamento verticale nella mezzeria del provino, lo spostamento verticale del provino in corrispondenza dei punti di carico, il carico massimo e la tensione massima.

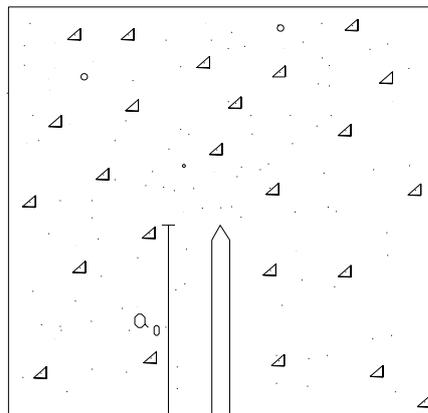
I campioni modellati sono provini di calcestruzzo ordinario intagliati in mezzeria aventi la forma di prismi retti a base quadrata con dimensioni nominali pari a 150mm x 150 mm x 600 mm .

Le dimensioni dei campioni sono state scelte in base alla prescrizioni della normativa UNI 11039 1-2 del 2003. Seguendo tali prescrizioni la lunghezza dei provini è stata fissata con valore pari ad almeno 3.5 volte la dimensione dell'altezza  $h$  e comunque non minore di 350 mm; inoltre, nella mezzeria della faccia adiacente a quella di getto, è stato realizzato un intaglio con apice di forma triangolare, profondità  $a_0$  pari a 45 mm secondo la seguente relazione

$$\frac{a_0}{h} = (0.3 \pm 0.01) \quad (5.3.1)$$



**Fig. 5.3.1** - Provino intagliato : geometria, carichi e vincoli.



**Fig. 5.3.2** - Particolare dell'intaglio con apice di forma triangolare.

La larghezza dell'intaglio è compresa tra 3mm e 5mm.

I calcestruzzi che costituiscono i provini sono caratterizzati da due diverse classi di resistenza e da fibre presenti in dosaggi differenti; essi, infatti, sono stati realizzati con calcestruzzi aventi resistenza caratteristica a compressione  $R_{ck}$  .

pari a 40 MPa e 55 MPa. Le fibre di rinforzo, hanno una lunghezza di 54 mm, diametro equivalente  $\phi_f$  uguale a 0.069 mm e sono state impiegate con una percentuale volumetrica pari a 0.30% e 0.50%.

La prima delle tabelle sottostanti riporta le caratteristiche delle fibre utilizzate, mentre nella seconda e nella terza sono elencate le caratteristiche meccaniche delle due miscele utilizzate:

DIAMETRO DELLE FIBRE ( $\phi_f$ ) in mm	RESISTENZA NOMINALE del calcestruzzo ( $R_{ck}$ in	PERCENTUALE DI FIBRE (%)	LUNGHEZZA DI FIBRE $l_f$ in mm
---	--	--------------------------	--------------------------------

	MPa)		
0.069	40	0.00	54
		0.30	
		0.50	
	55	0.00	
		0.30	
		0.50	

**Tabella 5.3.1** – Caratteristiche delle fibre aggiunte alle miscele di calcestruzzo.

(a)

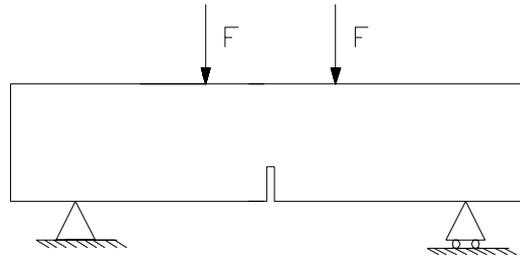
<b>R<sub>ck</sub> in MPa</b>	<b>G<sub>f</sub> (N/mm)</b>	<b>V<sub>f</sub> (%)</b>	<b>E (Mpa)</b>	<b><math>\nu</math></b>	<b>f<sub>ct</sub> (MPa)</b>
40	0.000157	0.00	33000	0.15	3.281
	0.000181	0.30	33000	0.15	
	0.000237	0.50	33000	0.15	

(b)

<b>R<sub>ck</sub> in MPa</b>	<b>G<sub>f</sub> (N/mm)</b>	<b>V<sub>f</sub> (%)</b>	<b>E (MPa)</b>	<b><math>\nu</math></b>	<b>f<sub>ct</sub> (MPa)</b>
55	0.000159	0.00	37000	0.15	4.301
	0.000200	0.30	37000	0.15	
	0.000253	0.50	37000	0.15	

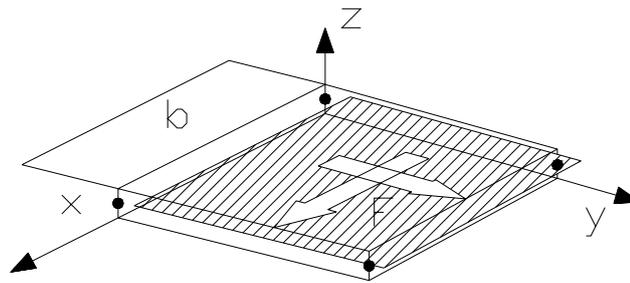
**Tabelle 5.3.2** - (a) e (b) – Parametri caratteristici per le due classi di calcestruzzo prese in esame.

Lo schema statico dei provini è riportato in figura :



**Fig. 5.3.3** - Schema di carico del provino.

La discretizzazione dei domini è stata effettuata impiegando degli elementi plane stress di forma triangolare del tipo T6MEM a tre nodi, ad un punto di integrazione di Gauss e con variabili fondamentali definite dalle traslazioni  $u_x$  e  $u_y$  che rappresentano le variabili di base. Gli elementi plane stress sono elementi piani i cui nodi devono essere contenuti nel piano dell'elemento finito.

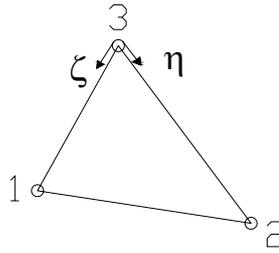


**Fig. 5.3.4** - Elemento plane stress.

Essi, inoltre, devono avere spessore abbastanza piccolo in relazione alla larghezza  $b$  dell'elemento stesso e sono caratterizzati dal fatto che le componenti di tensione perpendicolari alle facce sono nulle  $\sigma_{zz} = 0$ .

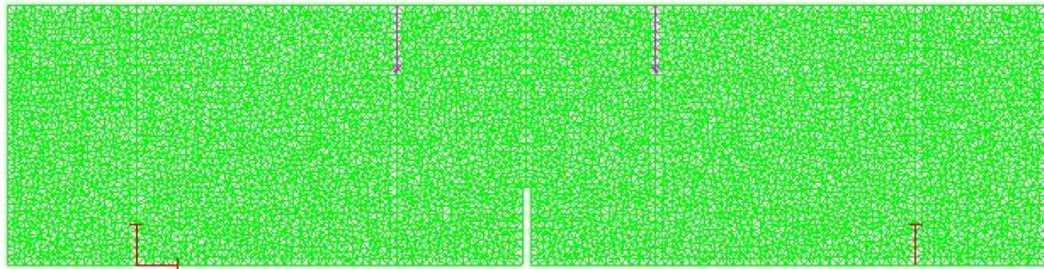
Per questo tipo di elemento, il polinomio di primo grado per gli spostamenti  $u_x$  e  $u_y$ , è espresso dalla seguente relazione :

$$u_i(\xi, \eta) = a_0 + a_1\xi + a_2\eta \quad (5.3.2)$$



**Fig. 5.3.5** - Elemento finito triangolare a tre nodi T6MEM utilizzato per discretizzare il provino.

Generalmente utilizzando questo polinomio si ottengono deformazioni costanti sull'area dell'elemento.



**Fig. 5.3.6** - Mesh utilizzata per la discretizzazione del provino. Le frecce sulla sommità del provino e le astine poste sulla parte inferiore rappresentano rispettivamente i punti di applicazione del carico e la posizione dei vincoli.

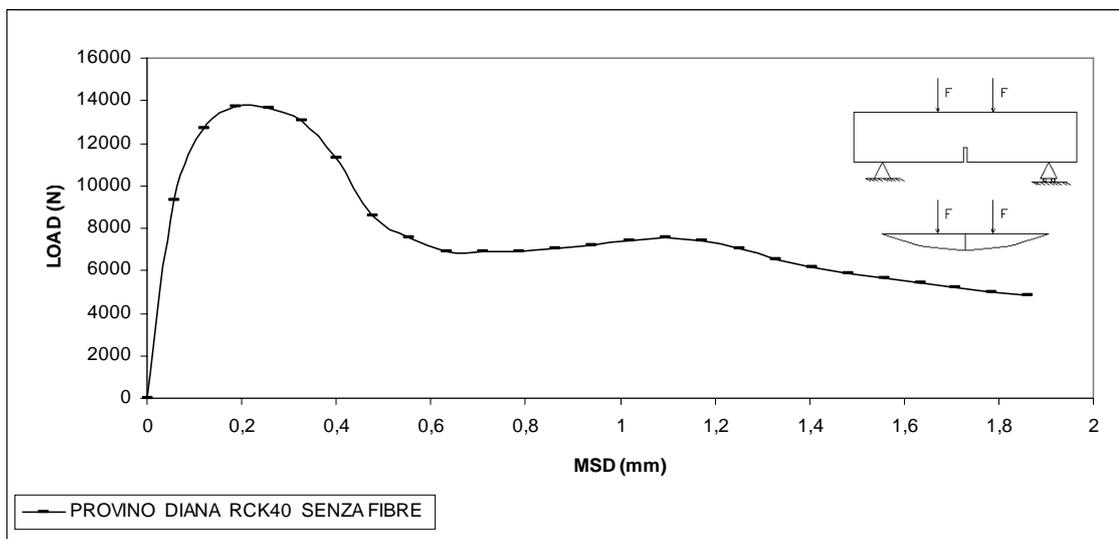
Per l'utilizzazione del Total Strain crack model è stata necessaria la definizione di proprietà di base come il modulo di Young, il coefficiente di Poisson, la resistenza a trazione e a compressione, e la definizione del comportamento a trazione e compressione del calcestruzzo.

## 5.4 RISULTATI NUMERICI E DISCUSSIONE

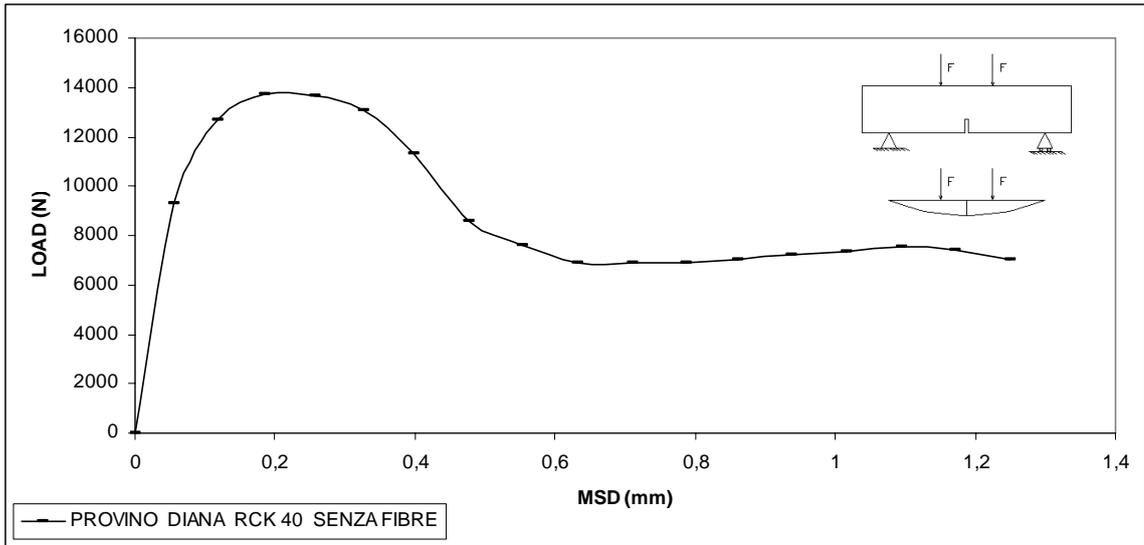
I risultati della modellazione con il software Diana sono suddivisi in due parti :  
la prima in cui sono riportati i risultati delle analisi sui provini di calcestruzzo semplice

e fibrorinforzato descritti in precedenza, e la seconda fase in cui si è proceduto allo sviluppo di una serie di analisi di tipo parametrico. In questo paragrafo sono riportati i risultati ottenuti dalla modellazione eseguita sui provini oggetto di sperimentazione mentre, in quello successivo, sono riportati i risultati ottenuti dalle analisi parametriche. Allo scopo di verificare la consistenza e la riproducibilità delle procedure sopra descritte, è stato eseguito un confronto delle curve carico-spostamento ottenute dalle simulazioni svolte nell'ambito di questo lavoro di ricerca con quelle ottenute sperimentalmente.

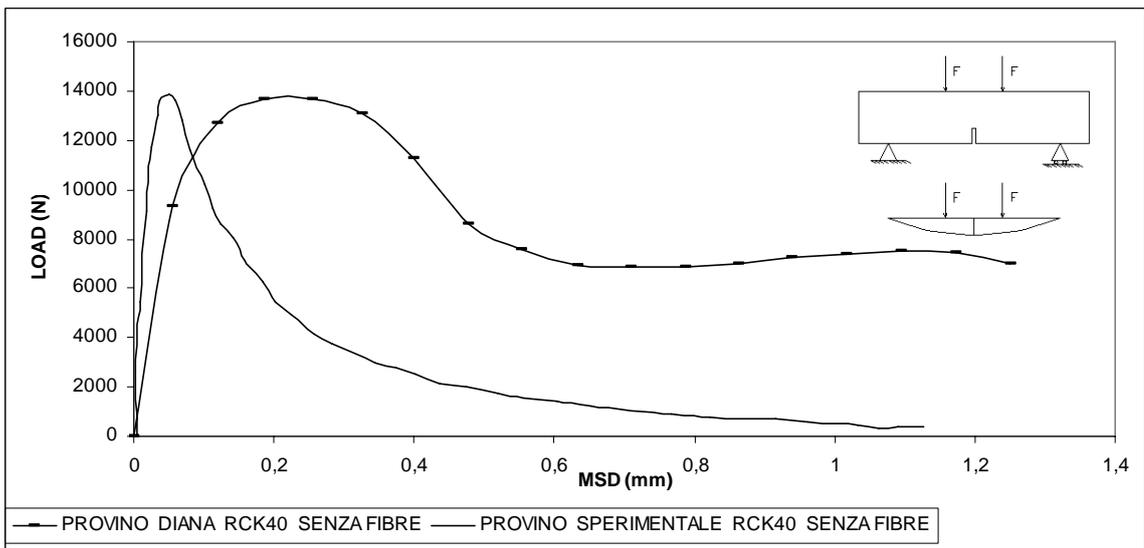
Si riportano nel seguito, per ognuna delle differenti tipologie di provini analizzati i diagrammi carico-spostamento in mezzeria ed i relativi confronti.



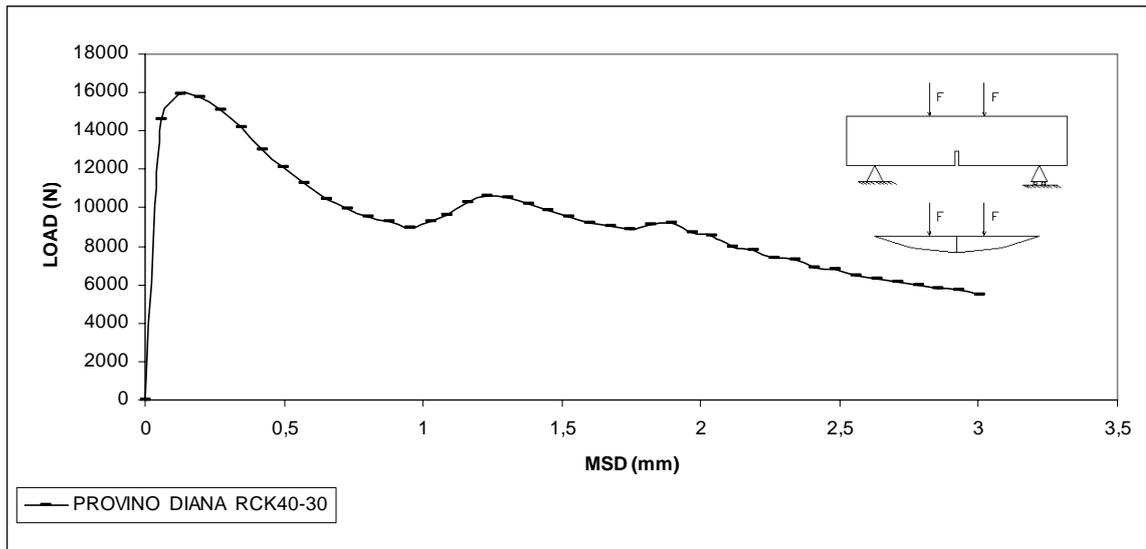
**Fig. 5.4.1-** Curva complessiva carico-spostamento in mezzeria (mid span displacement : MSD) ottenuta dalla modellazione del test a flessione su quattro punti di carico per il provino armato, intagliato in mezzeria e senza fibre, avente resistenza caratteristica  $R_{ck} = 40$  MPa.



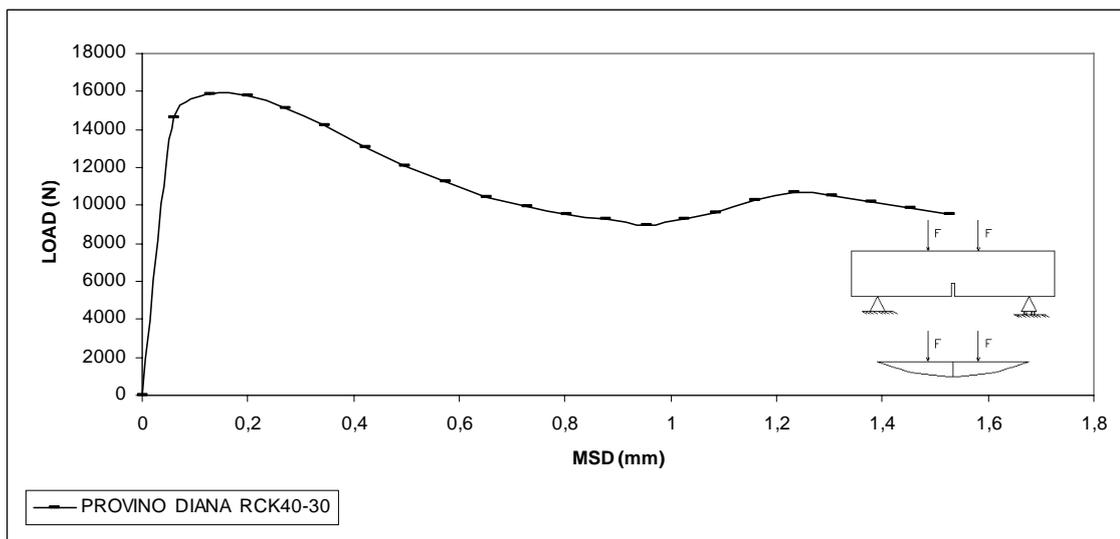
**Fig. 5.4.2** – Tratto iniziale della curva carico-spostamento in mezzeria (mid span displacement : MSD) ottenuta dalla modellazione del test a flessione su quattro punti di carico per il provino armato, intagliato in mezzeria e senza fibre, avente resistenza caratteristica  $R_{ck} = 40$  MPa.



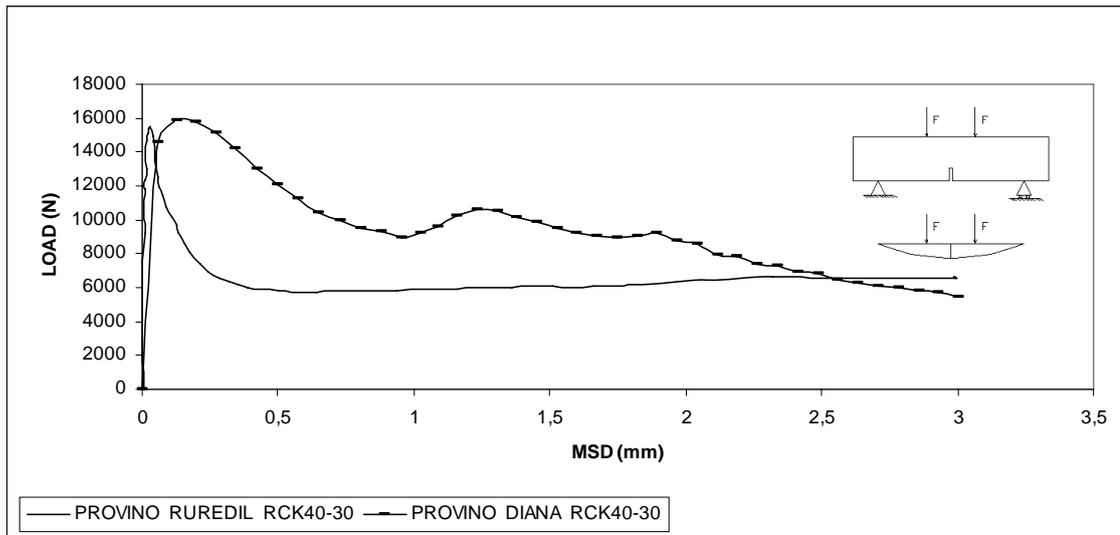
**Fig. 5.4.3** – Confronto tra le curve carico-spostamento in mezzeria (mid span displacement : MSD) ottenute dalla sperimentazione Ruredil e dalla modellazione del test a flessione su quattro punti di carico per il provino di calcestruzzo semplice avente resistenza caratteristica  $R_{ck} = 40$  MPa e senza contenuto di fibre.



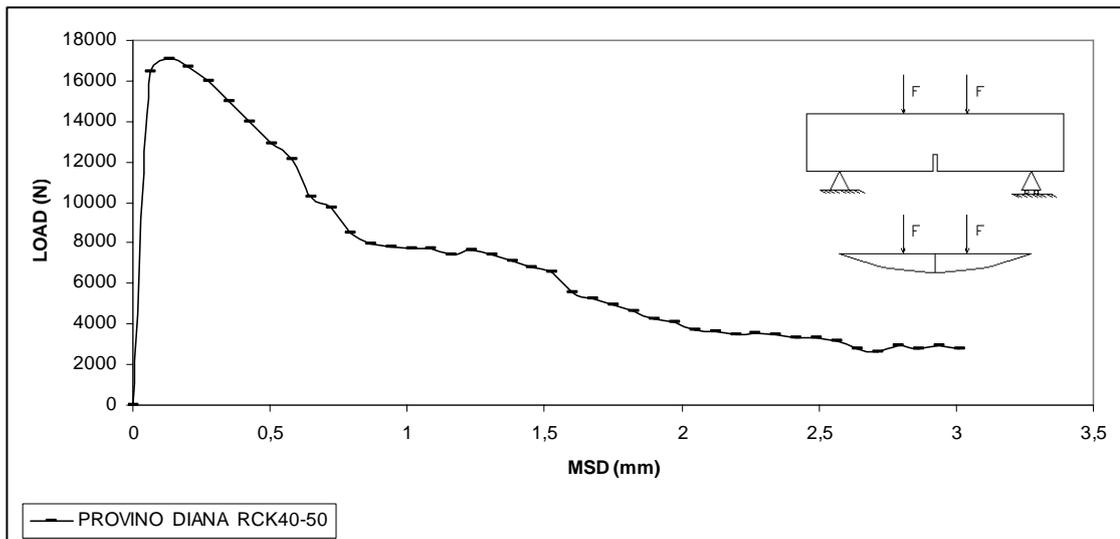
**Fig. 5.4.4** - Curva complessiva carico-spostamento in mezzeria (mid span displacement : MSD) ottenuta dalla modellazione del test a flessione su quattro punti di carico per il provino, intagliato in mezzeria, avente resistenza caratteristica  $R_{ck} = 40$  MPa e percentuale volumetrica delle fibre  $V_f = 0.30\%$  .



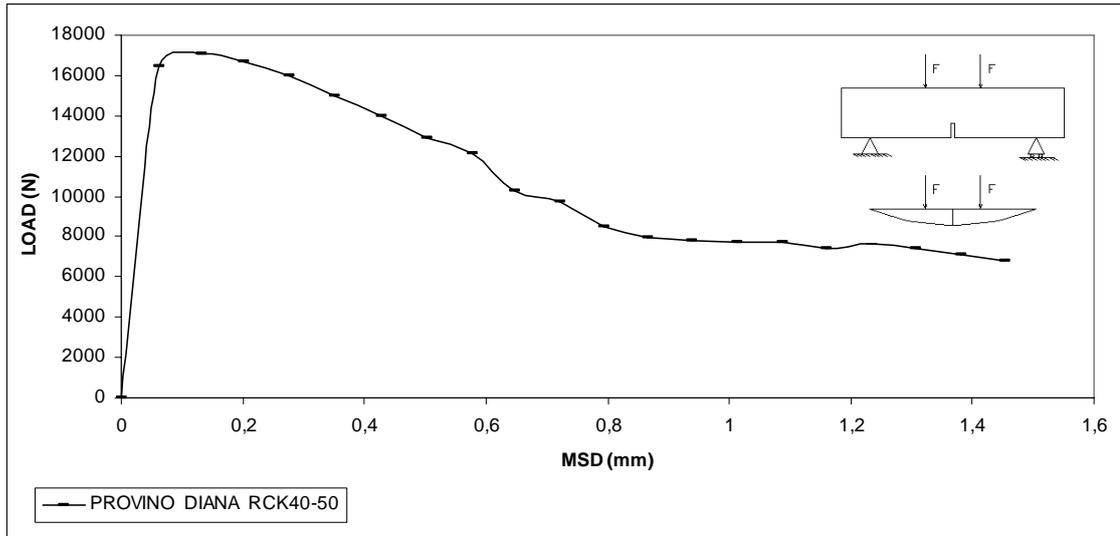
**Fig. 5.4.5** – Tratto iniziale della curva carico-spostamento in mezzeria (mid span displacement : MSD) ottenuta dalla modellazione del test a flessione su quattro punti di carico per il provino, intagliato in mezzeria, di calcestruzzo avente resistenza caratteristica  $R_{ck} = 40$  MPa e percentuale volumetrica di fibre pari a  $0.30\%$  .



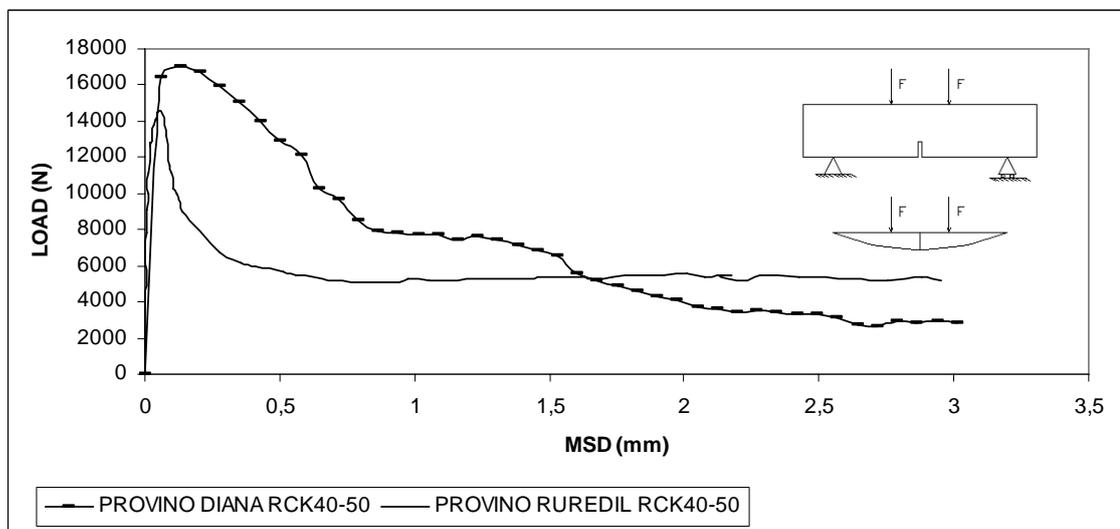
**Fig. 5.4.6** – Confronto tra le curve carico-spostamento in mezzeria (mid span displacement : MSD) ottenute dalla sperimentazione Ruredil e dalla modellazione del test a flessione su quattro punti di carico per il provino di calcestruzzo avente resistenza caratteristica  $R_{ck} = 40$  MPa e percentuale volumetrica di fibre  $V_f = 0.30\%$  .



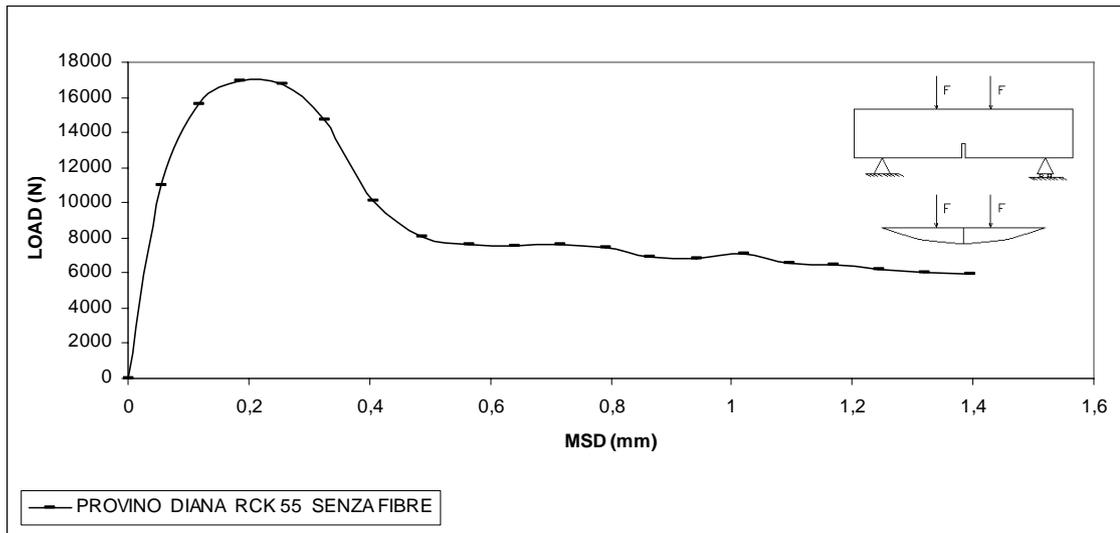
**Fig. 5.4.7** - Curva complessiva carico-spostamento in mezzeria (mid span displacement : MSD) ottenuta dalla modellazione del test a flessione su quattro punti di carico per il provino, intagliato in mezzeria, avente resistenza caratteristica  $R_{ck} = 40$  MPa e percentuale volumetrica delle fibre  $V_f = 0.50\%$  .



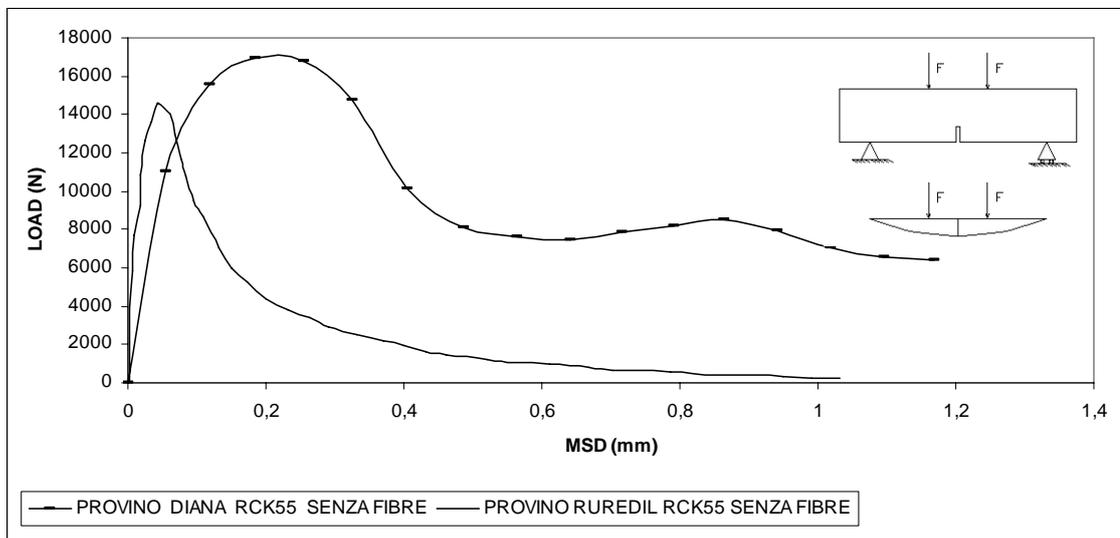
**Fig. 5.4.8** – Tratto iniziale della curva carico-spostamento in mezzeria (mid span displacement : MSD) ottenuta dalla modellazione del test a flessione su quattro punti di carico per il provino di calcestruzzo avente resistenza caratteristica  $R_{ck} = 40 \text{ MPa}$  e percentuale volumetrica di fibre  $V_f = 0.50\%$  .



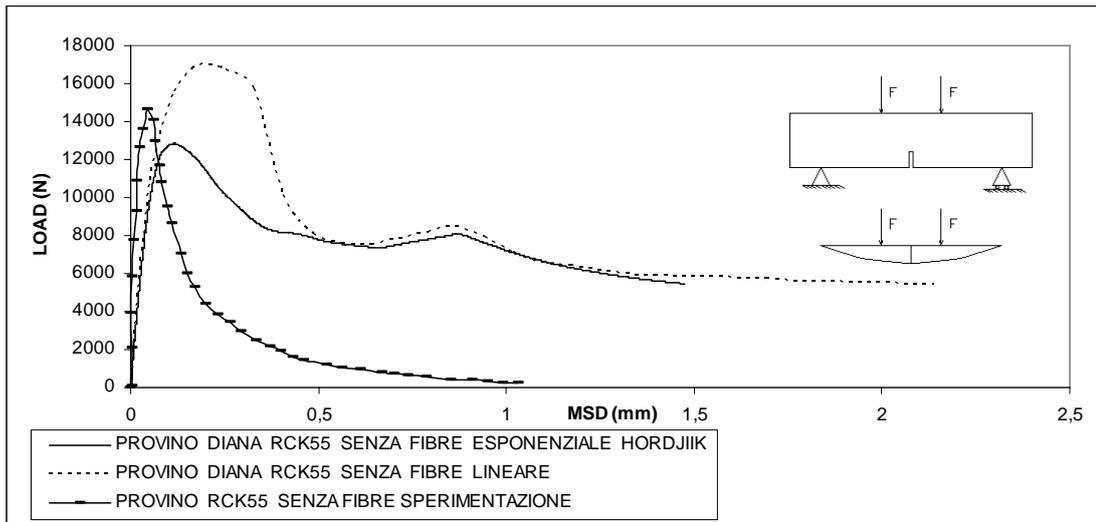
**Fig. 5.4.9** – Confronto tra le curve carico-spostamento in mezzeria (mid span displacement : MSD) ottenute dalla sperimentazione Ruredil e dalla modellazione del test a flessione su quattro punti di carico per il provino di calcestruzzo avente resistenza caratteristica  $R_{ck} = 40 \text{ MPa}$  e percentuale volumetrica di fibre  $V_f = 0.50\%$  .



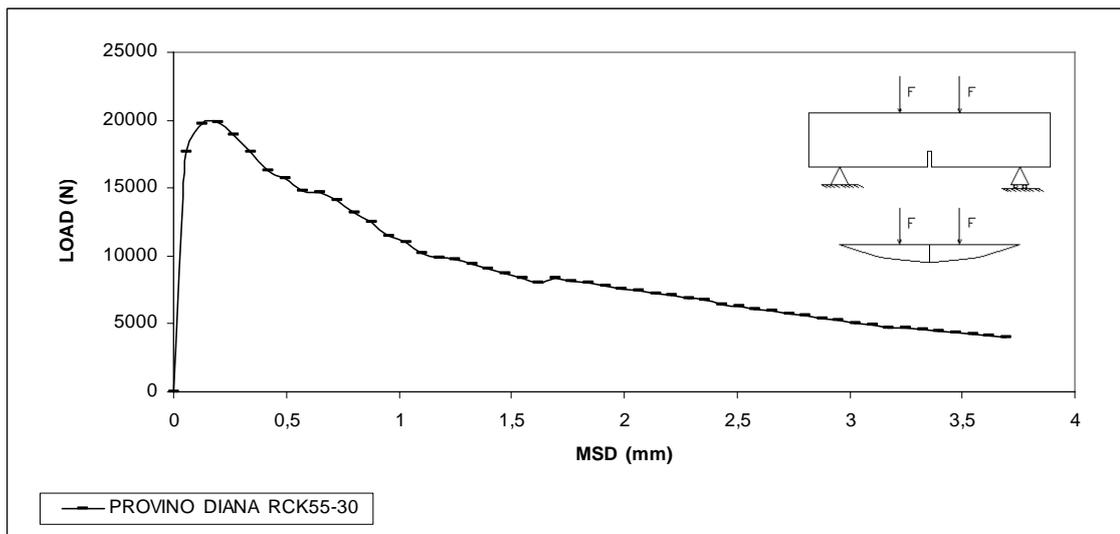
**Fig. 5.4.10** – Curva carico-spostamento in mezzeria (mid span displacement : MSD) ottenuta dalla modellazione del test a flessione su quattro punti di carico per il provino, intagliato in mezzeria, avente resistenza caratteristica  $R_{ck} = 55$  MPa e senza aggiunta di fibre.



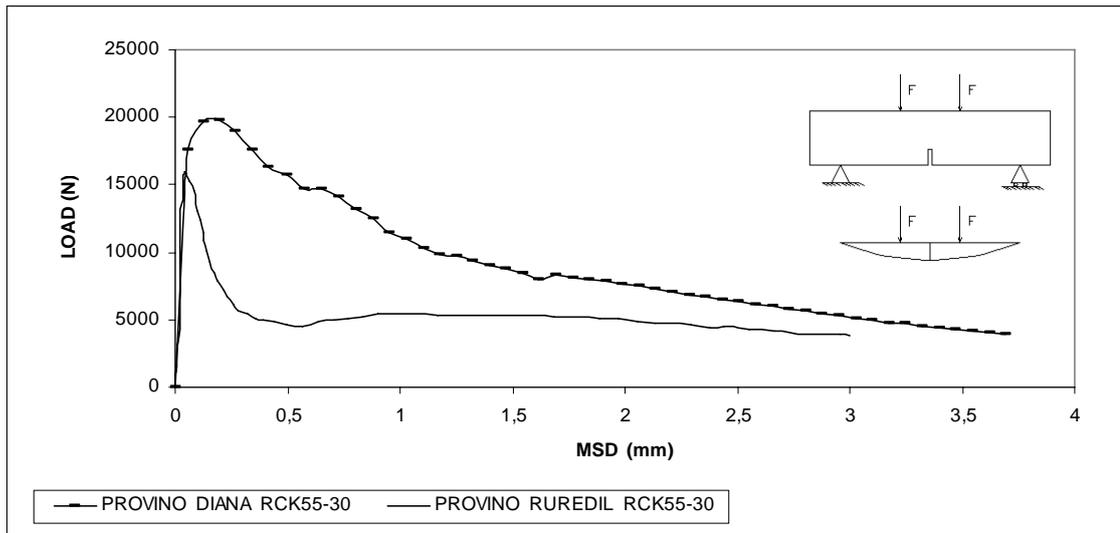
**Fig. 5.4.11** – Confronto tra le curve carico-spostamento in mezzeria (mid span displacement : MSD) ottenute dalla sperimentazione Ruredil e dalla modellazione del test a flessione su quattro punti di carico per il provino di calcestruzzo avente resistenza caratteristica  $R_{ck} = 55$  MPa e senza aggiunta di fibre .



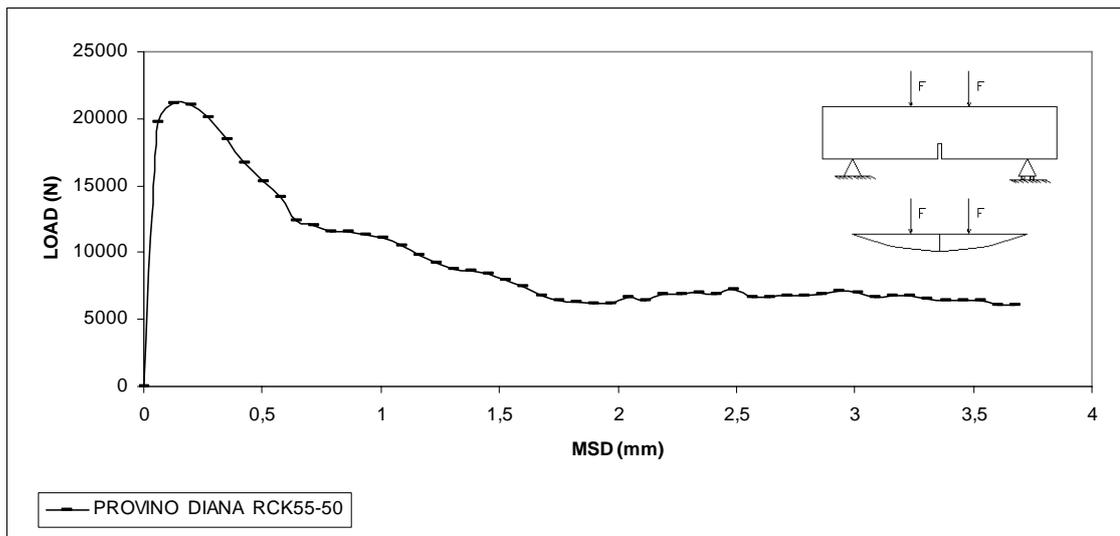
**Fig. 5.4.12** – Confronto tra le curve carico-spostamento in mezzeria (mid span displacement : MSD) ottenute dalla sperimentazione Ruredil e dalla modellazione del test a flessione su quattro punti di carico eseguita rispettivamente con softening lineare ed esponenziale secondo Hordjiiik per il provino di calcestruzzo avente resistenza caratteristica  $R_{ck} = 55 \text{ MPa}$  e senza aggiunta di fibre .



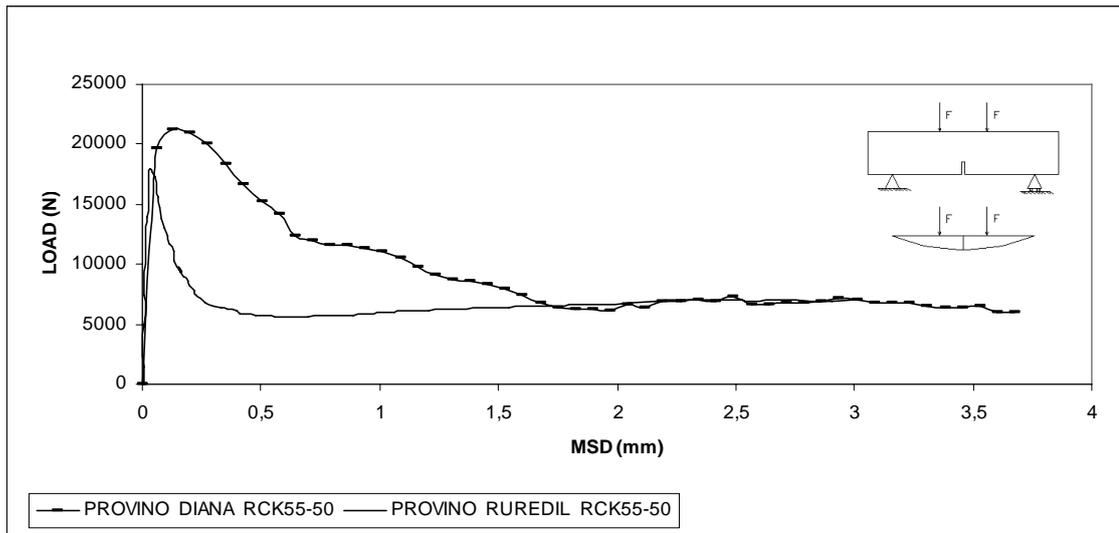
**Fig. 5.4.13** – Curva carico-spostamento in mezzeria (mid span displacement : MSD) ottenuta dalla modellazione del test a flessione su quattro punti di carico per il provino, intagliato in mezzeria, avente resistenza caratteristica  $R_{ck} = 55 \text{ MPa}$  e con percentuale volumetrica di fibre  $V_f = 0.30\%$  .



**Fig. 5.4.14** – Confronto tra le curve carico-spostamento in mezzeria (mid span displacement : MSD) ottenute dalla sperimentazione Ruredil e dalla modellazione del test a flessione su quattro punti di carico per il provino di calcestruzzo avente resistenza caratteristica  $R_{ck} = 55 \text{ MPa}$  e con percentuale volumetrica di fibre  $V_f=0.30\%$ .



**Fig. 5.4.15** – Curva carico-spostamento in mezzeria (mid span displacement : MSD) ottenuta dalla modellazione del test a flessione su quattro punti di carico per il provino, intagliato in mezzeria, avente resistenza caratteristica  $R_{ck} = 55 \text{ MPa}$  e con percentuale volumetrica di fibre  $V_f = 0.50\%$ .



**Fig. 5.4.16** – Confronto tra le curve carico-spostamento in mezzeria (mid span displacement : MSD) ottenute dalla sperimentazione Ruredil e dalla modellazione del test a flessione su quattro punti di carico per il provino di calcestruzzo avente resistenza caratteristica  $R_{ck} = 55$  MPa e con percentuale volumetrica di fibre  $V_f = 0.50\%$  .

Analizzando i risultati ottenuti dalle modellazioni si evince che le curve carico-spostamento in mezzeria sono costituite da due fasi : una prima fase con andamento elastico-lineare, che dipende esclusivamente dalla matrice di calcestruzzo, definita fase pre-picco in cui il calcestruzzo non si è ancora fessurato, e la seconda, detta post-picco (superato cioè il valore della resistenza a trazione massima) in cui il calcestruzzo si è fessurato ed assume un andamento di softening in cui la resistenza non si annulla completamente e la presenza delle fibre aumenta in modo significativo la capacità del calcestruzzo di assorbire energia.

Infatti dai confronti tra le curve carico-spostamento ottenute dalle modellazioni e quelle ricavate dalle sperimentazioni si deduce che:

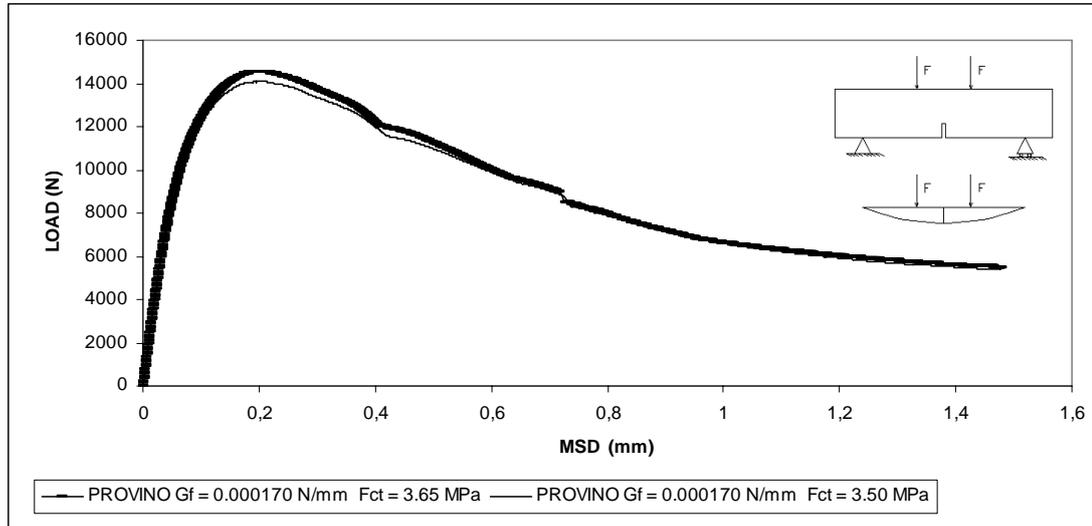
- il comportamento sperimentale presenta un tratto elastico-lineare con rigidità maggiore.
- i provini si fessurano, in entrambi i casi, per valori dei carichi all'incirca prossimi;
- la curva carico spostamento in mezzeria presenta un tratto duttile molto marcato che aumenta all'aumentare della percentuale volumetrica di fibre .

## 5.5 ANALISI PARAMETRICA

Nel seguito sono riportati i risultati di un'analisi parametrica eseguita allo scopo di stabilire un legame tra i parametri che definiscono le caratteristiche meccaniche e geometriche dei provini di calcestruzzo (rinforzato e non), e di determinare l'entità della loro influenza sulla risposta strutturale. I parametri esaminati sono : la resistenza a trazione del calcestruzzo, la percentuale volumetrica di fibre e l'energia di frattura. Le analisi sono state eseguite con riferimento al provino realizzato con calcestruzzi con resistenza a compressione di 40 MPa.

I risultati sono riportati in termini di curva carico-spostamento in mezzeria.

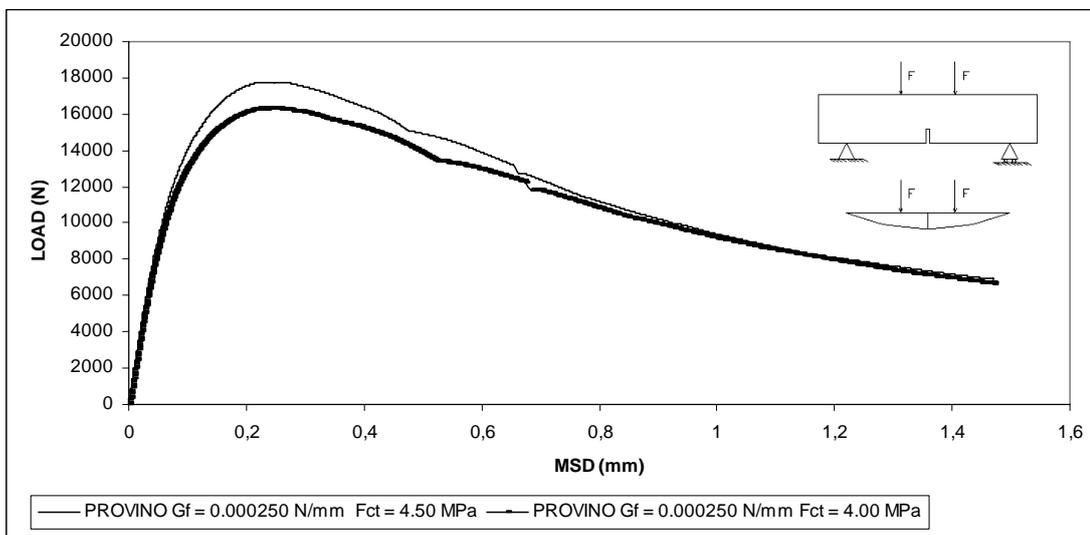
La figura seguente riporta il confronto tra le curve carico-spostamento in mezzeria per il provino con resistenza caratteristica  $R_{ck} = 40$  MPa, resistenza a trazione  $F_{ct} = 3,65$  MPa, energia di frattura  $G_f = 0.000170$  N/mm e percentuale volumetrica di fibre  $V_f = 0.25\%$  e per il provino con  $R_{ck} = 40$  MPa,  $F_{ct} = 3.50$  MPa,  $V_f = 0.20\%$  e  $G_f = 0.000170$  N/mm .



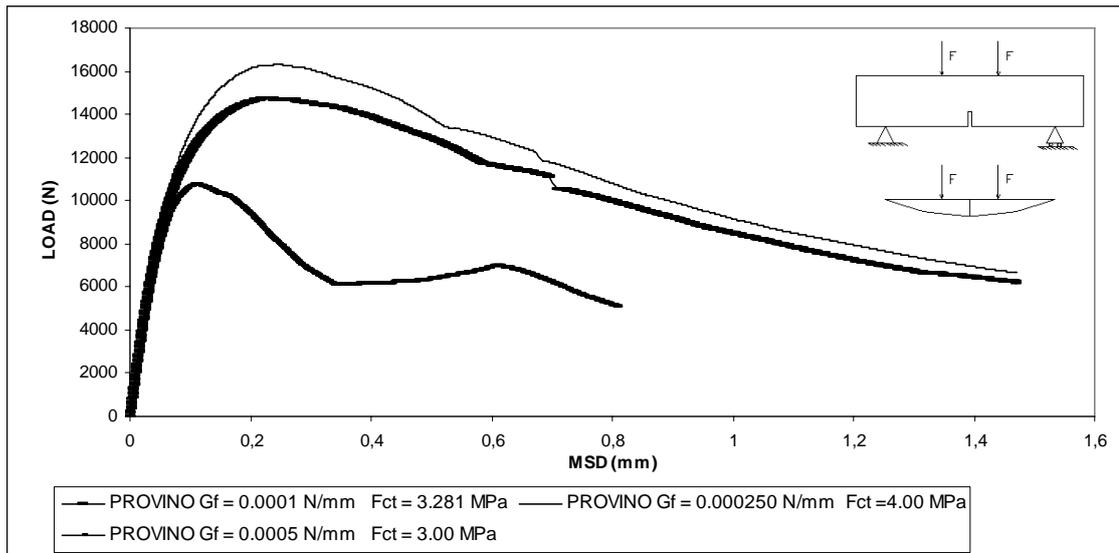
**Fig. 5.5.1** – Confronto tra le curve carico-spostamento in mezzeria (mid span displacement : MSD) ottenute dalla modellazione del test a flessione su quattro punti di carico per i provini di calcestruzzo aventi resistenza caratteristica  $R_{ck} = 40$  MPa ,  $G_f = 0.000170$  N/mm e percentuale volumetrica di fibre  $V_f$  pari a 0.25% e 0.20% e resistenza a trazione pari rispettivamente a 3.65 MPa e 3.50 MPa.

Dalla figura 5.5.1 emerge chiaramente che i due andamenti nel tratto elastico-lineare sono all'incirca coincidenti; l'unica differenza è data dal valore del carico di picco che, per la curva con  $f_{ct}$  pari a 3.65 MPa, assume valori più elevati di quelli ottenuti per il provino con  $F_{ct} = 3.50$  MPa e  $V_f = 0.20\%$ . La differenza seppur minima dei valori delle percentuali volumetriche delle fibre (0.25% e 0.20%) contribuisce ad un più marcato incremento di duttilità ed un andamento della curva più regolare.

La figura 5.5.2 riporta il confronto tra le curve carico–spostamento (MSD) ottenute dalle analisi parametriche eseguite mantenendo fissi la resistenza caratteristica ( $R_{ck} = 40$  MPa), il valore dell'energia di frattura ( $G_f = 0.000250$  N/mm) e la percentuale volumetrica delle fibre ( $V_f = 0.40\%$ ) e facendo variare la resistenza a trazione  $F_{ct}$  che, in un caso è stata posta pari a 4.00 MPa e nell'altro pari a 4.50 MPa. Come si può ben notare il valore della resistenza a trazione influenza sensibilmente il valore del carico di picco che aumenta con l'aumento della resistenza a trazione del calcestruzzo. E' importante evidenziare come entrambe le curve presentino un tratto duttile post-fessurazione coincidente per la presenza della stessa percentuale volumetrica di fibre.



**Fig. 5.5.2** – Confronto tra le curve carico–spostamento (MSD) ottenute dalle analisi parametriche eseguite mantenendo fissi la resistenza caratteristica ( $R_{ck} = 40$  MPa), il valore dell'energia di frattura ( $G_f = 0.000250$  N/mm) e la percentuale volumetrica delle fibre ( $V_f = 0.40\%$ ) e facendo variare la resistenza a trazione  $F_{ct}$  che, in un caso è stata posta pari a 4.00 MPa e nell'altro pari a 4.50 MPa.



**Fig. 5.5.3 – ANALISI PARAMETRICA** : confronto tra le curve carico-spostamento in mezzeria (mid span displacement : MSD) ottenute dalla modellazione del test a flessione su quattro punti di carico rispettivamente per i provini di calcestruzzo aventi resistenza caratteristica  $R_{ck} = 40$  MPa , energia di frattura  $G_f = 0.000250$  N/mm, percentuale volumetrica di fibre  $V_f = 0.40\%$  e resistenza a trazione  $F_{ct} = 4.00$  MPa , per il provino avente  $R_{ck} = 40$  MPa,  $F_{ct} = 3.281$  MPa,  $G_f = 0.0001$  N/mm e  $V_f = 0.35\%$ , ed, infine, per il provino avente  $R_{ck} = 40$  MPa,  $G_f = 0.00005$  N/mm e  $F_{ct} = 3.281$  MPa e senza contenuto di fibre.

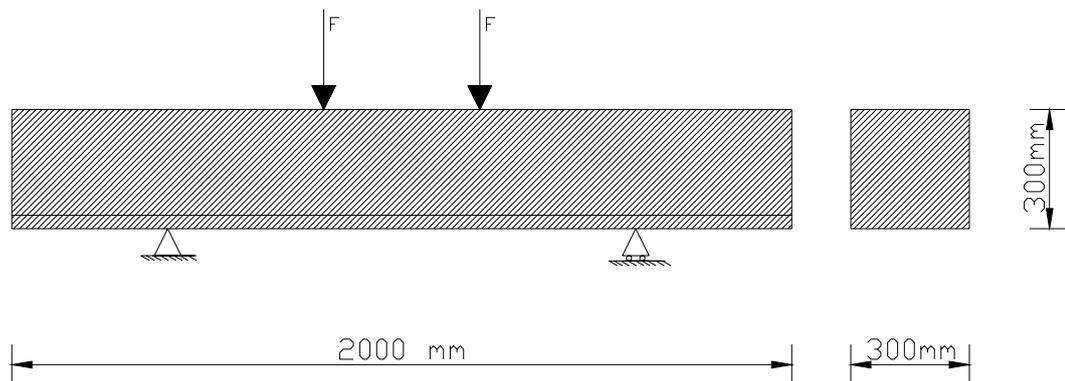
La figura 5.5.3 riporta le curve carico-spostamento ottenuta mantenendo fissi i valori del modulo di Young  $E$  e del coefficiente di Poisson  $\nu$  e facendo variare tutti gli altri parametri caratteristici :  $G_f$ ,  $F_{ct}$ ,  $V_f$ . Il confronto mette chiaramente in evidenza il notevole contributo offerto dalle fibre in termini di duttilità, quello dato dalla resistenza a trazione e dall'energia di frattura. In particolare si può notare che il provino con resistenza a trazione più elevata presenta un carico di picco più elevato rispetto a quello degli altri due provini ; inoltre il tratto post fessurazione è più lungo per i provini che hanno una maggiore percentuale di fibre.

## 5.6 TRAVI ARMATE FIBRORINFORZATE CON BARRE IN ACCIAIO E RINFORZATE CON FIBRE

La seconda parte del lavoro è dedicata all'analisi del comportamento meccanico di travi fibrorinforzate armate con barre in acciaio, mediante i modelli della Meccanica della Frattura.

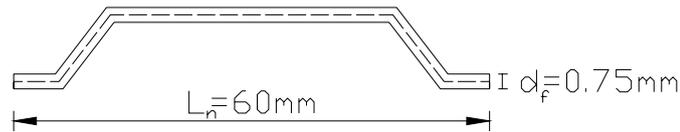
L'analisi si riferisce a travi in c.a. rinforzate con fibre in acciaio, per le quali sono disponibili i risultati sperimentali ottenuti nella ricerca di F. Altun, T. Haktanir e K. Ara " Effects of steel fiber additino on mechanical properties of concrete and RC beams", Construction and Buildings Materials 21 (2007) 654-661.

La figura 5.6.1 riporta lo schema geometrico e di calcolo delle travi sperimentali : la lunghezza totale delle travi è di 2000 mm, la sezione quadrata 300 x 300 mm, l'armatura longitudinale è realizzata con barre ad aderenza migliorata di diametro 16 mm.



**Figura 5.6.1** – Trave armata : geometria, carichi e vincoli .

Le fibre d'acciaio aggiunte alla miscela di calcestruzzo, prodotte dalla Dramix, hanno diametro pari a 0.75 mm, lunghezza pari a 60 mm e resistenza a trazione di 1050 N/mm<sup>2</sup> .



**Figura 5.6.2** – Forma e dimensioni di una fibra d'acciaio utilizzata.

Le rimanenti caratteristiche della miscela sono elencate nelle seguenti tabelle :

Ingredienti	Quantità (in Kg)	
	C20	C30
Acqua	162	170
Cemento Portland	300	385
Filler	386	357
Sabbia	472	448
Inerti di dimensioni medie	467	455
Aggregati grossi	559	530

**Tabella 5.6.1** - Quantità e componenti delle due miscele di calcestruzzo usate nel presente lavoro

ed i valori delle proprietà meccaniche delle due miscele di calcestruzzo sono riportati nella tabella 5.6.2 :

TIPO DI CALCESTRUZZO	CLASSE DI CALCESTRUZZO	RESISTENZA A COMPRESIONE MEDIA (N/mm <sup>2</sup> )	MODULO DI ELASTICITA' (N/mm <sup>2</sup> )	RESISTENZA A TRAZIONE (N/mm <sup>2</sup> )	TENACITA' (KNmm)	RESISTENZA FLESSIONALE (N/mm <sup>2</sup> )
SENZA FIBRE	C20	24.4	29,500	1.59	202	5.4
C20-30		22.5	27,500	2..30	446	8.3
C20-60		22.6	26,000	2.55	474	9.8
SENZA FIBRE	C30	34.8	32,950	1.95	306	7.8
C30-30		30.8	32,200	2.71	415	9.4
C30-60		30.2	32,050	3.01	462	11.4

**Tabella 5.6.2** – Proprietà meccaniche medie delle differenti combinazioni di miscele di calcestruzzo impiegate

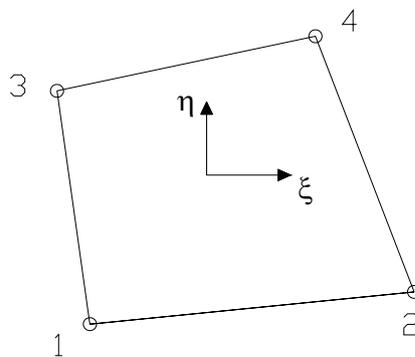
La tabella 5.6.3 riporta la denominazione delle travi sperimentate.

TRAVE C20-SENZA	C20	0	2 $\phi$ 16
TRAVE C20-30		30	2 $\phi$ 16
TRAVE C20-60		60	2 $\phi$ 16
TRAVE C30-SENZA	C30	0	2 $\phi$ 16
TRAVE C30-30		30	2 $\phi$ 16
TRAVE C30-60		60	2 $\phi$ 16

**Tabella 5.6.3** – Barre d’armatura presenti nelle miscele di calcestruzzo .

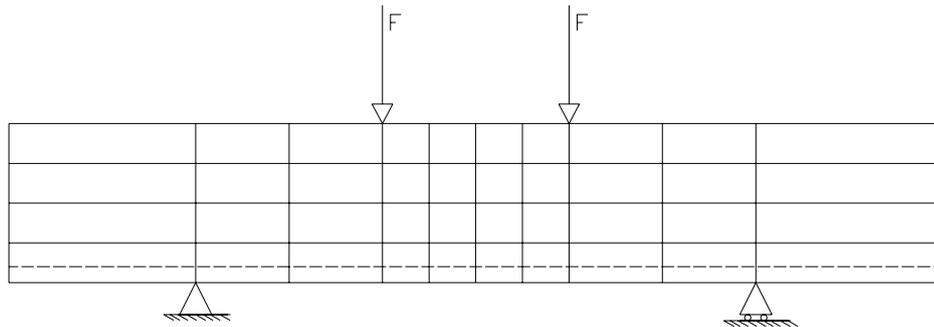
La simulazione numerica è stata eseguita impiegando degli elementi plane stress isoparametrici di forma quadrilatera del tipo QU8 a quattro nodi, ad un punto di integrazione di Gauss e basati sull’interpolazione lineare. Per questo tipo di elemento, il polinomio per gli spostamenti  $u_x$  e  $u_y$ , è espresso dalla seguente relazione :

$$u_i(\xi, \eta) = a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta \quad (5.6.1)$$



**Fig. 5.6.4** - Elemento finito quadrilatero a quattro nodi QU8 utilizzato per discretizzare le travi.

Le travi sono state discretizzate con la mesh seguente :



**Fig. 5.6.5** – Mesh utilizzata per la discretizzazione del provino, vincoli e carichi.

Anche in questo caso la modellazione agli elementi finiti è stata svolta nell'ambito della fessurazione diffusa, con l'impiego dei Total strain rotating crack models, descritti in precedenza. Per quanto riguarda le barre d'acciaio, invece, il comportamento costitutivo utilizzato è il modello elasto-plastico basato sulla plasticità ideale di Von Mises secondo la normativa NEN 6720, che consente di definire il valore del modulo di Young  $E$ , il coefficiente di Poisson  $\nu$  e la tensione di snervamento.

Nel paragrafo seguente vengono descritti i legami costitutivi utilizzati per il calcestruzzo semplice e per quello additivato con fibre.

## 5.7 LEGAME COSTITUTIVO DEI MATERIALI

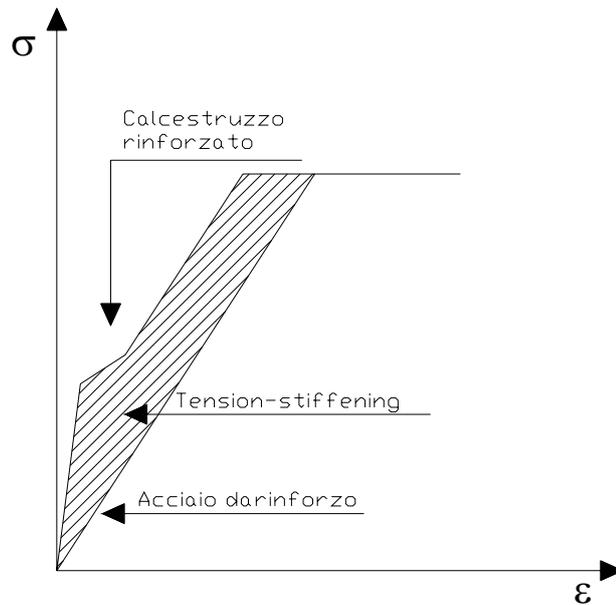
La modellazione dei legami costitutivi dei materiali è stata basata sulle indicazioni della UNI 11039,1-2: 2003 e del DT 204/2006 del CNR.

In particolare nella simulazione del comportamento costitutivo globale del calcestruzzo armato con barre in acciaio e rinforzato con fibre sono stati consideratisia il considerato il contributo del tension-stiffening dovuto alle barre d'acciaio che quello dovuto alla presenza di fibre.

Il diagramma costitutivo tension-stiffening stabilisce che la tensione totale è pari alla somma dei contributi di entrambi i costituenti, calcestruzzo e rinforzo, e dall'interazione tra gli stessi che ingloba anche l'effetto spinotto. Ciò viene espresso mediante la seguente relazione :

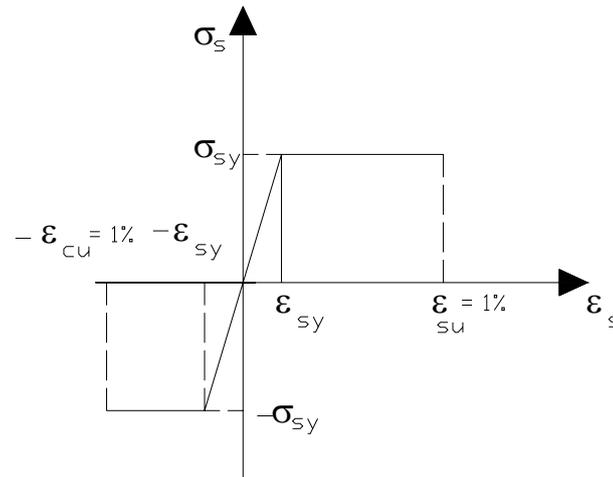
$$\sigma = \sigma_c + \sigma_s + \sigma_{ia} \quad (5.7.1)$$

dove  $\sigma_c$  è la tensione del calcestruzzo semplice,  $\sigma_s$  è il contributo delle barre di rinforzo e  $\sigma_{ia}$  è il contributo tensionale dovuto al tension-stiffening .



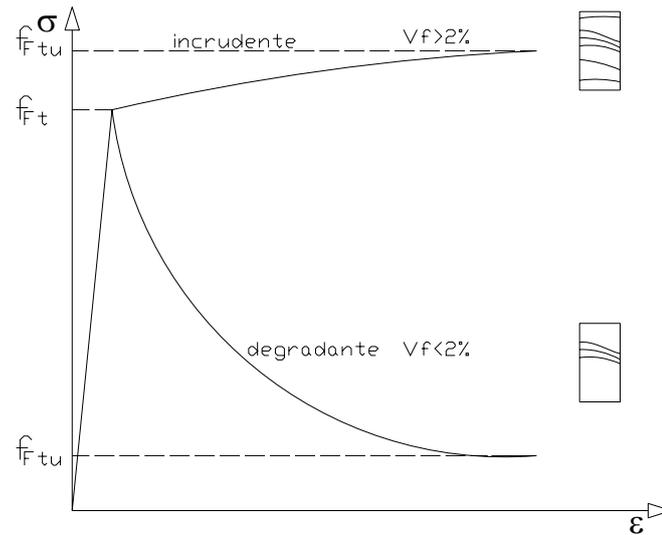
**Fig. 5.7.1** - Diagramma tension-stiffening per il calcestruzzo rinforzato

Il legame costitutivo dell'acciaio delle barre di rinforzo è quello elastico- lineare plastico.

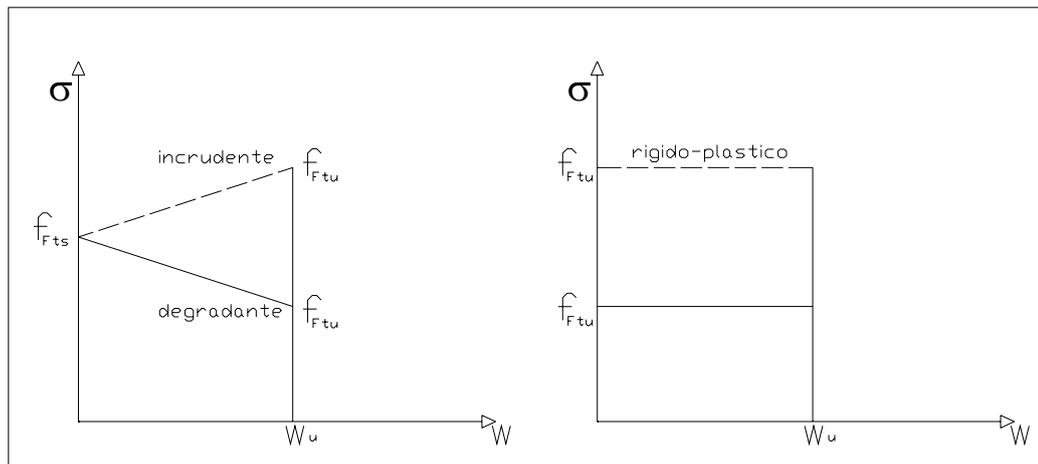


**Fig. 5.7.2** – Legame costitutivo dell'acciaio da rinforzo .

Nel calcestruzzo rinforzato generalmente si sviluppa un certo numero di fessure durante il processo di carico fino a quando il processo di fessurazione si stabilizza e non si ha più formazione di fessure. Nell'ambito di questo lavoro è stato utilizzato, anche per il calcestruzzo rinforzato, il modello adoperato per il calcestruzzo semplice basato sull'energia di frattura distribuita lungo la larghezza  $h$ . I differenti andamenti del comportamento a trazione del calcestruzzo fibrorinforzato dipendono dal contenuto di fibre aggiunto al conglomerato stesso. Infatti, in corrispondenza di contenuti percentuali volumetriche di fibre non elevati, all'incirca inferiori al 2%, il comportamento a trazione risulta di tipo degradante, per percentuali maggiori del 2%, invece, l'andamento è di tipo incrudente.



**Fig. 5.7.3** -Curve tensione-deformazione per conglomerati fibrorinforzati caratterizzati da basse percentuali di fibre e alte percentuali di fibre.



**Fig. 5.7.4** – Legami costitutivi semplificati tensione-apertura della fessura.

Sia per il calcestruzzo con comportamento includente che per il calcestruzzo con comportamento degradante, la resistenza a trazione uniassiale residua ultima del materiale  $f_{fu}$  viene influenzata in modo significativo dalla frazione volumetrica di fibre  $v_f$ , dal rapporto d'aspetto  $\frac{l_f}{d_f}$  e dall'aderenza tra matrice e fibra.

L'andamento del diagramma carico-apertura della fessura adottato è di tipo degradante (softening) (il contenuto di fibre, infatti, è al di sotto del 2%) con valore della deformazione limite determinata dalla relazione :

$$\varepsilon_d = \frac{w_d}{l_{cs}} = \frac{3.00}{l_{cs}} \leq 0.02 \quad (5.7.2)$$

Esprimendo in termini di apertura della fessura  $w_d = \varepsilon_d l_{cs}$  la deformazione limite di calcolo del calcestruzzo fibrorinforzato  $\delta_d$  è data da :

$$w_d = 0.002l_{cs} \leq 3.0mm \quad (5.7.3)$$

per elementi inflessi .

dove  $l_{cs}$  è la lunghezza caratteristica dell'elemento strutturale, espressa in millimetri, che viene determinata in base alle reali dimensioni della sezione della trave o travetto in esame.

$$l_{cs} = \min(s_{rm}; y) \quad (5.7.4)$$

con

$$s_{rm} = \left( 50 + 0.25K_1K_2 \frac{\phi}{\rho} \right) \zeta \quad (\text{in millimetri}) \quad (5.7.5)$$

dove :

- $\zeta = 1$  per  $\frac{l_f}{d_f} < 50$ ,
- $\zeta = 50 \frac{d_f}{l_f}$  per  $50 < \frac{l_f}{d_f} < 100$
- $\zeta = \frac{1}{2}$  per  $\frac{l_f}{d_f} > 100$
- $s_{rm}$  rappresenta il valore medio della distanza tra le fessure.
- $y$  è la distanza dell'asse neutro dal bordo teso della sezione in fase elastica ;
- $l_f$  è la lunghezza delle fibre;
- $d_f$  è il diametro delle fibre ;
- $\phi$  è il diametro delle barre d'armatura (con media pesata nel caso di più diametri diversi);
- $k_1 = 0.8$  per barre ad aderenza migliorata (nel caso di barre lisce il valore è 1.6);

- $k_2 = 0.5$  per  $y < h$  e  $k_2 = 1.0$  per  $y > h$
- $\rho$  è il rapporto geometrico d'armatura tesa della sezione definita alla distanza  $y$ , pari a

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot y} \quad (5.7.6)$$

La deformazione ultima a rottura corrispondente al carico massimo è definita nel modo seguente :

$$\varepsilon_{Fu} = \frac{\delta_D}{l_{cs}} = \varepsilon_d \quad (5.7.7)$$

Il modulo elastico del calcestruzzo fibrorinforzato è definito dalla seguente relazione :

$$E_{Fd} = \frac{E_{Fm}}{\gamma_{FE}} \quad (5.7.8)$$

dove  $\gamma_{FE} = 1.2$  mentre  $E_{Fm}$  è il valore medio del modulo elastico secante del fibrorinforzato.

Nel caso in esame  $l_f = 60$  mm ,  $d_f = 0.75$  mm, la resistenza a trazione delle fibre è 1050 N/mm<sup>2</sup>,  $\phi_{barre} = 16$  mm .

Facendo riferimento alla prove a flessione implementate nel modello agli elementi finiti per il legame degradante la resistenza a flessione  $f_{Fif}$  è espressa dalla relazione :

$$f_{Fif} = \frac{P_{res} l}{\frac{bh^2}{6}} \quad (5.7.9)$$

dove  $P_{res}$  è il carico residuo corrispondente a  $\delta_d$ , mentre il valore di calcolo della resistenza a trazione per flessione del calcestruzzo fibrorinforzato è fornita dalla relazione :

$$f_{Fd} = \frac{f_{Fk}}{\gamma_c} \quad (5.7.10)$$

dove  $f_{Fk}$  è la resistenza caratteristica a trazione del fibrorinforzato e  $\gamma_c = 1.9$

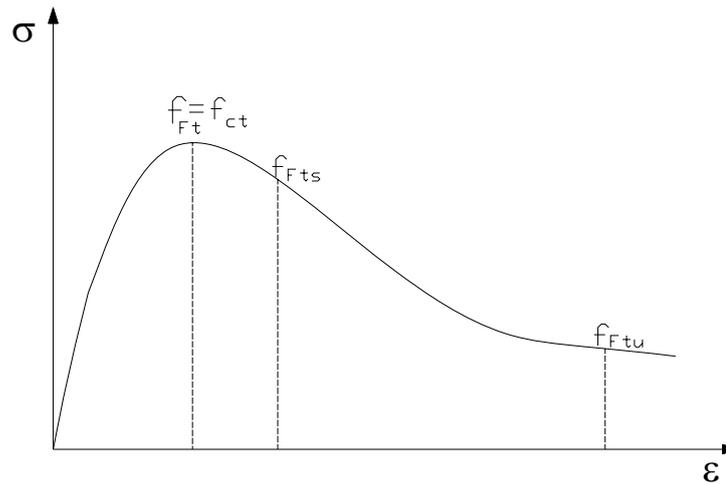


Fig. 5.7.6 - Legame sforzo-deformazione

H (mm)	300
h (mm)	270
d (mm)	30
B (mm)	300
A <sub>s</sub> (mm <sup>2</sup> )	2φ16 = 402mm <sup>2</sup> (FeB44K)
γ <sub>c</sub> coefficiente di sicurezza del calcestruzzo	1.9
γ <sub>s</sub> coefficiente di sicurezza dell'acciaio	1.15

Tabella 5.7.1 – Caratteristiche geometriche della sezione e coefficienti di sicurezza dell'acciaio e del calcestruzzo .

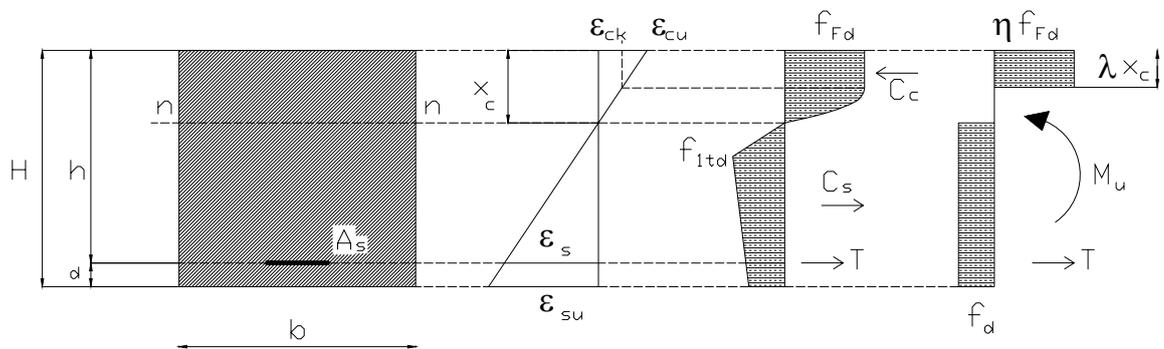


Figura 5.7.7 – Analisi della sezione .

La resistenza di calcolo delle barre d'acciaio  $f_{yd}$  e quella del calcestruzzo sono definite nel seguente modo :

$$f_{yd} = \frac{f_y}{\gamma_s} \quad (5.7.11)$$

dove  $\gamma_s$  è il coefficiente di sicurezza dell'acciaio e  $\sigma_y$  è la resistenza allo snervamento dell'acciaio. La resistenza di calcolo del calcestruzzo  $f_{cd}$  è data dalla seguente formula :

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (5.7.12)$$

in cui  $f_{ck}$  rappresenta la resistenza caratteristica a compressione del calcestruzzo e  $\gamma_c$  il coefficiente parziale di sicurezza.

La percentuale meccanica o geometrica d'armatura  $q$  si ottiene dalla relazione seguente :

$$q = \frac{A_s f_{yd}}{bHf_{cd}} \quad (5.7.13)$$

dove  $b$  ed  $H$  sono rispettivamente la larghezza e l'altezza della sezione della trave,  $A_s$  è l'area dell'armatura tesa e  $f_{cd}$  ed  $f_{yd}$  sono esplicitate nelle formule precedenti.

Nella tabella che segue riporta, per ogni classe di calcestruzzo e corrispondente percentuale volumetrica di fibre, i valori della resistenza di calcolo dell'acciaio, del calcestruzzo e la percentuale meccanica d'armatura :  $f_{yd}$ ,  $f_{cd}$  e  $q$ .

TIPO DI CALCESTRUZZO	CLASSE DI CALCESTRUZZO	$f_{yd}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$f_{cd}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$A_s$ (mm <sup>2</sup> )	$q$ Percentuale meccanica d'armatura
SENZA FIBRE	C20	382,60	12.842	2 $\phi$ 16 = 402	0.14786
C20-30			11.842		0.1603
C20-60			11.894		0.1596
SENZA FIBRE	C30		18.315		0.1036
C30-30			16.210		0.1006
C30-60			15.894		0.13739

Tabella 5.7.2 – Proprietà meccaniche delle due classi di calcestruzzo e dell'acciaio utilizzati nei provini sottoposti alle analisi .

Nella tabella sono riportati, per ogni categoria di calcestruzzo con differente dosaggio di fibre, i valori della percentuale meccanica d'armatura, i valori di  $r$  ed  $s$  ricavati dalle tabelle (per sezioni a semplice armatura ed in funzione della classe di calcestruzzo), la deformazione ultima e di snervamento dell'acciaio ed, infine, la deformazione ultima  $\varepsilon_{cu}$  e la deformazione caratteristica  $\varepsilon_{ck}$  del calcestruzzo compresso.

	CLASSE DI CALCESTRUZZO	$q$ Percentuale meccanica d'armatura	$r$	$s$	$\varepsilon_{sy}$	$\varepsilon_{su}$	$\varepsilon_{ck}$	$\varepsilon_{cu}$
SENZA FIBRE	C20	0.14786	0.2868	0.205	0.00182 2	0.001	0.002	0.0035
C20-30		0.1603	0.28025	0.215				
C20-60		0.1596	0.28025	0.215				
SENZA FIBRE	C30	0.1036	0.89725	0.35				
C30-30		0.1006	0.89725	0.35				
C30-60		0.13739	0.736	0.55				

**Tabella 5.7.3** - Parametri caratteristici delle due diverse classi di calcestruzzo con differente dosaggio di fibre.

<b>TIPO DI CALCESTRUZZO</b>	<b>S</b>	<b>Campi di rottura</b>
<b>C20-SENZA FIBRE</b>	0.205	Campo 2 : $0.1667 \leq s \leq 0.2592$
<b>C20-30</b>	0.215	Campo 2 : $0.1667 \leq s \leq 0.2592$
<b>C20-60</b>	0.215	Campo 2 : $0.1667 \leq s \leq 0.2592$
<b>C30-SENZA FIBRE</b>	0.35	Campo 3 : $0.2592 \leq s \leq 0.6255$
<b>C30-30</b>	0.35	Campo 3 : $0.2592 \leq s \leq 0.6255$
<b>C30-60</b>	0.55	Campo 3 : $0.2592 \leq s \leq 0.6255$

**Tabella 5.7.4** - Campi di rottura per le sezioni delle travi analizzate.

Come riportato nella tabella 5.7.4 il collasso delle sezioni avviene nei campi 2 e 3, cioè rispettivamente per il raggiungimento della deformazione ultima nell'acciaio teso con il calcestruzzo compresso in campo elasto-plastico e per il raggiungimento della deformazione ultima per il calcestruzzo compresso con acciaio teso in campo elastico. La posizione dell'asse neutro, identificata genericamente nella figura(5.7.7) dalla retta n-n e con  $x_c$  dall'estremo compresso, può essere determinata in due modi: applicando semplicemente la relazione (5.7.15), oppure dagli equilibri alla traslazione orizzontale ed alla rotazione, e rispetto all'armatura tesa, degli sforzi agenti sulla sezione stessa riportati di seguito. Nel primo caso si ottiene :

$$x_c = s \cdot h \quad (5.7.14)$$

Nota la posizione dell'asse neutro si determina la distanza  $y$  :

$$y = H - x_c \quad (5.7.15)$$

che viene utilizzata per la determinazione di  $\rho$  espressa dalla relazione (5.7.6).

Successivamente si procede al calcolo di  $s_{rm}$  e di  $\varepsilon_d, w_d, l_{cs}, \varepsilon_{Fu}, f_d$  che consentono di definire in dettaglio il legame tensione –deformazione del calcestruzzo fibrorinforzato. Si riporta nel seguito il procedimento di calcolo dei parametri che definiscono la sezione ed il legame costitutivo del calcestruzzo fibrorinforzato per il calcestruzzo di classe C20 e con percentuale volumetrica di fibre pari a 0.30%.

Poiché  $q = 0.1603$  il valore di  $s$  ricavato dalle tabelle è  $s = 0.215$ , la sezione ricade nel campo di rottura 2 (sezioni a molto debole armatura).

In tale situazione si ha :

$$0.1667 \leq s \leq 0.2592 \quad (5.7.16)$$

con 
$$\varepsilon_{sy} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (5.7.17)$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (5.7.18)$$

da cui la deformazione corrispondente allo snervamento dell'acciaio è :

$$\varepsilon_{sy} = \frac{f_{yk}}{E_s \cdot \gamma_s} = \frac{440N/mm^2}{210000N/mm^2 \cdot 1.15} = 0.001821mm \quad (5.7.19)$$

dove  $\gamma_s$  ed  $E_s$  rappresentano rispettivamente il coefficiente parziale di sicurezza ed il modulo di Young dell'acciaio.

Noto il valore di  $s$  si ricava la posizione dell'asse neutro all'atto del collasso:

$$x_c = s \cdot h = 0.215 \cdot 270mm = 58.05mm \quad (5.7.20)$$

la distanza

$$y = h - x_c = 270 - 58.05 = 211.95mm \quad (5.7.21)$$

Determinato il valore di  $y$  lo si pone nella (5.7.6) e si ricava il valore di

$$\rho = \frac{402mm^2}{300mm \cdot 211.95mm} = 0.006322 \quad (5.7.22)$$

Noto il parametro  $\rho$  lo si sostituisce nell'espressione (5.7.6) e si ricava il parametro  $s_{rm}$  che nel caso in esame diventa :

$$s_{rm} = \left( 50 + 0.25 K_1 K_2 \frac{\phi}{\rho} \right) 50 \frac{l_f}{d_f} \quad (5.7.23)$$

in quanto  $50 \leq \frac{l_f}{d_f} = 80mm \leq 100$ ,

$$s_{rm} = \left( 50 + 0.25 K_1 K_2 \frac{\phi}{\rho} \right) \zeta = \left( 50 + 0.25 \cdot 0.8 \cdot 0.5 \cdot \frac{160}{0.006322} \right) 0.0625 = 161.30mm$$

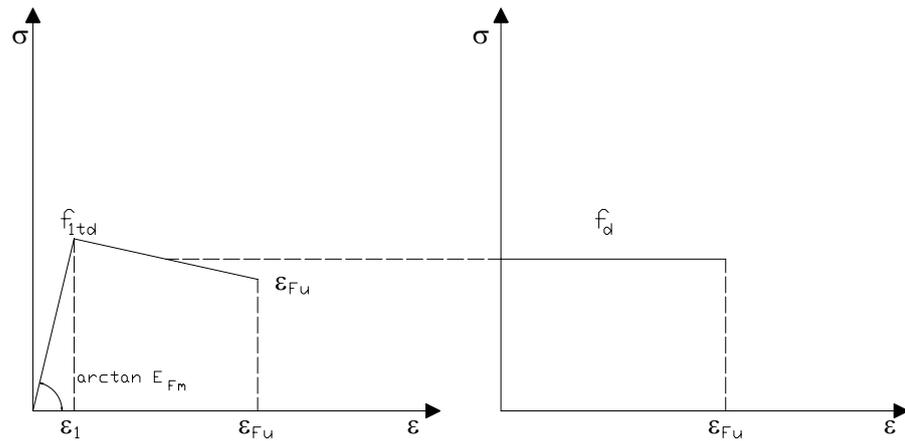
(5.7.24)

Dopo avere ottenuto il valore di  $s_{rm}$  si determina sulla base della relazione seguente la lunghezza caratteristica  $l_{cs}$ :

$$l_{cs} = \min(s_{rm}; y) = \min(161.30; 270) = 161.30mm$$

(5.7.25)

Dopo aver ricavato  $s_{rm}$  si determinano rispettivamente dalla (5.7.3), (5.7.4), (5.7.5) e (5.7.7) i valori di  $\varepsilon_d, w_d, l_{cs}, \varepsilon_{Fu}$  che consentono di definire in modo dettagliato il legame costitutivo del calcestruzzo fibrorinforzato definito nella figura seguente :



**Fig. 5.7.5** – Legame costitutivo per il calcestruzzo fibrorinforzato

dove

$$f_{1td} = \frac{f_{1tk}}{\gamma_f}$$

(5.7.26)

Il valore di  $f_d$  è ottenuto dalla seguente espressione :

$$f_d = 0.33 f_{Ftf} = 0.33 \cdot 8.3 = 2.739 N / mm^2 \leq f_{1td}$$

(5.7.27)

dove  $f_{Ftf}$  è la resistenza a trazione per flessione del calcestruzzo fibrorinforzato come esposto in precedenza che, nel caso in esame è pari a 8.3 N/mm<sup>2</sup>.

In ultimo si procede alla determinazione del momento ultimo mediante l'equilibrio alla rotazione, intorno al baricentro delle armature tese d'acciaio.

$$M_u = C_c(h - 0.4x_c) + C_T \left( \frac{H - x_c}{2} - d \right) \quad (5.7.28)$$

$$M_u = C_c(h - 0.4x_c) + \frac{f_d}{\gamma_F} (H - x_c) b \left( \frac{H - x_c}{2} - d \right) \quad (5.7.29)$$

Dove  $M_u$  è il momento ultimo e  $C_c$  e  $C_T$  le risultanti delle tensioni già spiegati dalla (5.7.29)

Gli sforzi  $T$ ,  $C_c$  e  $C_T$  sono forniti dalle seguenti relazioni :

$$T = A_s f_s = 402 \text{mm}^2 \cdot 440 \text{N/mm}^2 = 176880 \text{N} \quad (5.7.30)$$

(per acciaio di tipo FeB44K)

$$C_c = 0.85 \cdot f'_c \cdot b \cdot \lambda \cdot x_c \quad (5.7.32)$$

con 
$$f'_c = \frac{0.83 R_{bk}}{\gamma_c} \quad (5.7.33)$$

e

$$C_T = \frac{f_d}{\gamma_F} (H - x_c) b \left( \frac{H - x_c}{2} - d \right) \quad (5.7.34)$$

sostituendo i valori delle (5.7.32) e delle (5.7.33) nelle (5.7.29) e (5.7.31) si determina la posizione dell'asse neutro  $x_c$  ed il valore del momento  $M_u$ .

La tabella posta sotto riporta, per ogni sezione di calcestruzzo utilizzato, la posizione dell'asse neutro, il valore del momento ultimo teorico, quello del carico ultimo calcolato e quello teorico riferito alle sperimentazioni.

CLASSE DI CALCESTRUZZO	$X_C$ (mm)	T(N)	$C_T$ (N)	$C_C$ (N)	$M_U$ (KNm)	Carico teorico ultimo (N)	Carico ultimo sperimentazione (KN)	Carico ultimo misurato (*) (KN)
C20-SENZA FIBRE	55.35	176880	113730	71460.44	28212.3069	94041	126.0	184.50
C20-30	58.05	176880	172878	69110.33	39693.6562	132312	126.0	201.90
C20-60	58.05	176880	204121	69417.4	202829.9966	676099.98	126.0	210.30
C30 SENZA FIBRE	94.5	176880	137988.7	174008	420141.79	140047.26	148.6	260.15
C30-30	94.5	176880	165838.5	154007.12	47825.20413	159417.34	148.6	330.00
C30-60	148.5	176880	148680.7	237296.68	56776.82283	189256	148.6	368.75

**Tabella 5.7.5**

(\*) Valori del carico ultimo misurate nelle sperimentazioni (Altun et al. 2007)

Dai risultati riportati nella tabella si evince che, sia nella sperimentazione che nella modellazione i valori dei momenti ultimi teorici e di quelli ultimi misurati non coincidono; si può notare, però, che il valore del momento e del carico ultimo nei sei casi analizzati aumentano con l'aumento della percentuale volumetrica di fibre fornendo alla travi una resistenza più elevata rispetto alle travi in c.a. senza aggiunta di fibre in acciaio.