



Università della  
Calabria



Università degli  
Studi della  
Basilicata



Politecnico di  
Bari

---

Dottorato di Ricerca in  
Ingegneria Idraulica per l'Ambiente e il Territorio - XVII Ciclo

*Settore scientifico-disciplinare ICAR/01*

Dissertazione per il conseguimento del titolo di Dottore di Ricerca

**Modellazione 3D di correnti a superficie libera  
Applicazione a un modello di traversa per  
laminazione delle piene con efflusso da luce di  
fondo**

***Dott. Ing. Giulio Palma***

**Coordinatore**

*Prof. Ing. Paolo Veltri*

**Tutor**

*Prof. Ing. Francesco Calomino*

---

Cosenza, Novembre 2006

*Desidero innanzitutto ringraziare il Prof. Francesco Calomino, per la dedizione paterna con cui mi ha seguito durante questi anni, per la pazienza che ha avuto, e per gli incoraggiamenti profusi, specie nei (frequenti) momenti di difficoltà.*

*Rivolgo inoltre un sentito ringraziamento al Prof. Giancarlo Alfonsi, per l'immeritata fiducia che mi ha dimostrato e per i preziosi consigli dispensati, alla Prof. Patrizia Piro, che mi ha seguito nel primo anno del corso di dottorato, al coordinatore del corso, Prof. Paolo Veltri e, con particolare gratitudine, al prof. Giuseppe Frega.*

*Voglio poi ringraziare gli amici, e colleghi, del Dipartimento di Difesa del Suolo, ingg. Roberto Gaudio, Antonio Miglio, Felice D'Alessandro, Samuele De Bartolo, Ferdinando Frega, Massimo Gironda Veraldi, Carmelo Grimaldi ed Agostino Lauria, il cui supporto ha reso possibile ed arricchito tanta parte di questo lavoro.*

*Un doveroso ringraziamento va anche ai tecnici del Dipartimento di Difesa del Suolo: Franco Bonanno, Claudio Capalbo e Franco Leone, per la valida assistenza nelle prove sperimentali presso il Laboratorio Grandi Modelli Idraulici.*

*Un ringraziamento a parte a mia moglie Maria Cristina, per l'infinita e amorevole pazienza con cui ha sopportato le mie assenze, i miei ritardi, i miei umori alterni.*

*Grazie, infine, ai miei genitori, e alla mia famiglia, che hanno sempre creduto in me, anche in mia vece.*

<b>CAPITOLO 1</b> .....	<b>6</b>
<b>IL FENOMENO DI EFFLUSSO DA LUCI DI FONDO. STATO DELL'ARTE</b> .....	<b>6</b>
<b>1.1 GENERALITÀ</b> .....	<b>6</b>
<b>1.2 IL COMPORTAMENTO IDRAULICO NELLE LUCI A BATTENTE</b> .....	<b>6</b>
<b>1.3 PRIMI STUDI SPERIMENTALI</b> .....	<b>7</b>
<b>1.4 STUDI RECENTI</b> .....	<b>7</b>
<b>1.5 STUDIO DI ROTH E HAGER (1999)</b> .....	<b>10</b>
<b>1.6 IL CODICE FLOW – 3D PER LO STUDIO DELL'EFFLUSSO DA LUCI DI FONDO</b> .	<b>12</b>
 <b>CAPITOLO 2</b>	
<b>LE EQUAZIONI DEL MOTO</b> .....	<b>13</b>
<b>2.1 EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES IN CAMPO TURBOLENTO</b> .....	<b>13</b>
<b>2.2 MODELLI DI CHIUSURA DELLE EQUAZIONI DI NAVIER – STOKES</b> .....	<b>19</b>
2.2.1 <i>SIMULAZIONE DIRETTA DELLA TURBOLENZA – DNS</i> .....	21
2.2.2 <i>LARGE EDDY SIMULATION – LES</i> .....	24
2.2.3 <i>IL MODELLO K – <math>\epsilon</math> STANDARD</i> .....	25
2.2.4 <i>IL MODELLO RNG K – <math>\epsilon</math></i> .....	25
2.2.5 <i>IL MODELLO DELLA LUNGHEZZA DI MESCOLOAMENTO</i> .....	26
 <b>CAPITOLO 3</b>	
<b>MODELLAZIONE NUMERICA CON IL CODICE DI CALCOLO FLOW – 3D</b> .....	<b>29</b>
<b>3.1 SISTEMI DI COORDINATE</b> .....	<b>29</b>
<b>3.2 EQUAZIONE DI CONTINUITÀ</b> .....	<b>30</b>
<b>3.3 EQUAZIONI DEL MOTO</b> .....	<b>31</b>
3.3.1 <i>SFORZI TANGENZIALI ALLA PARETE</i> .....	32
3.3.2 <i>VALUTAZIONE DELLA VISCOSITÀ</i> .....	33
3.3.3 <i>INTERFACCE FLUIDE E SUPERFICI LIBERE</i> .....	33
3.3.4 <i>MODELLO SHALLOW WATER</i> .....	34
3.3.5 <i>MODELLI DI TURBOLENZA</i> .....	34
3.3.6 <i>VISCOSITÀ TURBOLENTE</i> .....	36
3.3.7 <i>EQUAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA TURBOLENTE</i> .....	38
3.3.8 <i>DISSIPAZIONE TURBOLENTE</i> .....	39
3.3.9 <i>CONDIZIONI AL CONTORNO DI TURBOLENZA</i> .....	40
3.3.10 <i>MODELLO DELLA LUNGHEZZA DI MESCOLOAMENTO DI PRANDTL</i> .....	42

<b>3.4</b>	<b>APPROSSIMAZIONI NUMERICHE.....</b>	<b>43</b>
3.4.1	GENERALITÀ.....	43
3.4.2	SIMBOLOGIA UTILIZZATA.....	44
3.4.3	METODO DI SOLUZIONE ALLE DIFFERENZE FINITE.....	47
3.4.4	APPROSSIMAZIONI DELLE EQUAZIONI DEL MOTO.....	48
3.4.5	METODO DEL PRIMO ORDINE.....	49
3.4.6	METODO DEL SECONDO ORDINE.....	50
3.4.7	SFORZI TANGENZIALI DI PARETE.....	51
3.4.8	CALCOLO DELLA PRESSIONE.....	53
3.4.9	ADVEZIONE SCALARE.....	56
<b>3.5</b>	<b>CONDIZIONI AL CONTORNO.....</b>	<b>59</b>
3.5.1	CONDIZIONI AL CONTORNO NEL DOMINIO DI CALCOLO.....	59
3.5.2	CONDIZIONI AL CONTORNO PER LA PRESSIONE.....	62
3.5.3	CONDIZIONI AL CONTORNO CONTINUATIVE.....	62
3.5.4	CONDIZIONI AL CONTORNO DI TIPO OUTFLOW.....	63
3.5.5	CONDIZIONI AL CONTORNO DEI MODELLI DI TURBOLENZA.....	66
3.5.6	CONTORNI A SUPERFICIE LIBERA.....	67
3.5.7	CONSIDERAZIONI SULLA STABILITÀ.....	67
<b>CAPITOLO 4</b>		
<b>INSTALLAZIONE SPERIMENTALE.....</b>		
<b>4.1</b>	<b>DESCRIZIONE DEL MODELLO.....</b>	<b>70</b>
<b>4.2</b>	<b>DESCRIZIONE DELLA STRUMENTAZIONE.....</b>	<b>74</b>
4.2.1	STRAMAZZO THOMSON.....	74
4.2.2	ASTE IDROMETRICHE.....	75
4.2.3	PIEZOMETRO.....	76
4.2.4	MISURATORE DI PORTATA ELETTROMAGNETICO.....	76
4.2.5	TRASDUTTORE DI PRESSIONE.....	77
4.2.6	MICROMULINELLO.....	78
4.2.7	SONDA ADV - VECTOR.....	79
<b>4.3</b>	<b>PROVE SPERIMENTALI.....</b>	<b>79</b>
4.3.1	OBIETTIVO DELLO STUDIO SPERIMENTALE E FORMULAZIONE DEL PROBLEMA.....	79
4.3.2	PROCEDURA DI SVOLGIMENTO DELLE PROVE SPERIMENTALI.....	80
4.3.3	DESCRIZIONE DELLE FASI PIÙ IMPORTANTI DELLA PROCEDURA.....	81
4.3.3.1	RILEVAMENTO ZERO IDROMETRICO NELLO STRAMAZZO THOMSON E NEL PIEZOMETRO.....	81
4.3.3.2	RILEVAMENTO ZERO IDROMETRICO NEL TRASDUTTORE DI PRESSIONE E NELL'ASTA IDROMETRICA.....	81

4.3.3.3 VALUTAZIONE DELLA PORTATA ATTRAVERSO L'ALTEZZA D'ACQUA RICAVATA DALLO STRAMAZZO THOMSON .....	82
4.3.3.4 VALUTAZIONE DELL'ALTEZZA IDRICA A MONTE DELLA TRAVERSA.....	83

## **CAPITOLO 5**

### **IMPLEMENTAZIONE DEL MODELLO NUMERICO E VERIFICA DEI RISULTATI OTTENUTI .....84**

#### **5.1 IMPLEMENTAZIONE CON IL CODICE FLOW – 3D .....84**

5.1.1 MODEL SETUP .....	84
5.1.1.1 MODEL SETUP .....	85
5.1.1.2 PHYSICS (PROPRIETÀ FISICHE) .....	85
5.1.1.3 FLUIDS (SELEZIONE DEI FLUIDI NEL SISTEMA).....	87
5.1.1.4 MESHING AND GEOMETRY (DEFINIZIONE DELLA MESH E DELLA GEOMETRIA) .....	87
5.1.1.5 BOUNDARIES (CONDIZIONI AL CONTORNO) .....	91
5.1.1.6 INITIAL (CONDIZIONI INIZIALI) .....	94
5.1.1.7 NUMERICS (IMPOSTAZIONI DEL MODELLO NUMERICO) .....	95

#### **5.2 SIMULAZIONI NUMERICHE .....97**

5.2.1 RISULTATI NUMERICI.....	97
5.2.2 VERIFICHE. CALCOLO DELLA PORTATA .....	110
5.2.2.1 CALCOLO DELLA PORTATA. CONDIZIONE 1.....	111
5.2.2.2 CALCOLO DELLA PORTATA. CONDIZIONE 2.....	117
5.2.2.3 CALCOLO DELLA PORTATA. CONFRONTO RISULTATI.....	124
5.2.2.4 SIMULAZIONE NUMERICA ESTESA .....	125
5.2.3 VERIFICA DELLA CONTINUITÀ .....	127
5.2.4 VERIFICA DELLE PRESSIONI E DELLE ALTEZZE IDRICHE.....	128
5.2.5 VERIFICA DELLE VELOCITÀ NELLA VASCA .....	133
5.2.5.1 CONFRONTO CON I DATI SPERIMENTALI.....	140
5.2.6 VERIFICHE NEL CANALE.....	143
5.2.6.1 PROFILO DELLA CORRENTE SULLA SOGLIA DI VALLE .....	143
5.2.6.2 RISALTO IDRAULICO .....	144

## **CAPITOLO 6**

### **CONCLUSIONI.....148**

## **CAPITOLO 7**

### **BIBLIOGRAFIA .....152**

# CAPITOLO 1

## IL FENOMENO DI EFFLUSSO DA LUCI DI FONDO. STATO DELL'ARTE

### 1.1 Generalità

L'efflusso da una luce di fondo di una traversa per laminazione può essere assimilato a quello attraverso una paratoia. Un'inquadramento teorico-sperimentale di questo fenomeno è stato di recente dato da Roth e Hager [39].

Le paratoie (*sluice gates*) sono strutture idrauliche che permettono la regolazione della portata e del livello idrico a monte in un canale. Tra le diverse conformazioni possibili, la paratoia più comune consiste in una struttura verticale posizionata in un canale rettangolare liscio quasi orizzontale, ed ha particolare rilevanza nell'efflusso con basso carico. La scabrezza superficiale sia del canale che della paratoia è piccola e quindi trascurabile.

Le paratoie di questo tipo sono utilizzate sia in laboratorio che in canali di irrigazione, grandi collettori fognari o in strutture idrauliche.

Rispetto alle strutture di scarico con funzionamento a stramazzo, in particolare rispetto gli stramazzi a parete sottile, questo tipo di paratoie non è stata oggetto di molti studi in ambito scientifico [39]. La conoscenza è particolarmente scarsa per quanto riguarda il fenomeno idraulico che vi si svolge, a differenza degli studi del comportamento idraulico di luci a stramazzo [1], [5], [12], [21], [44], [29], [31].

### 1.2 Il comportamento idraulico nelle luci a battente

Secondo Roth e Hager [39] i parametri più significativi che entrano in gioco in

un processo d'efflusso da una paratoia sono i seguenti:

- a) effetti scala
- b) coefficiente d'efflusso
- c) formazione di un'increspatura a monte
- d) formazone di onde stazionarie a valle
- e) distribuzione della pressione al fondo e sulla paratoia
- f) formazione di vortici a monte.

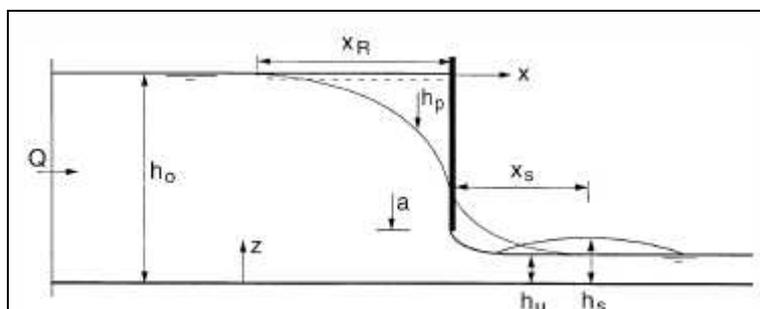
### 1.3 Primi studi sperimentali

Lewin [27] propone un'interessante rassegna di quanto noto in letteratura a proposito dei processi d'efflusso da una paratoia. Questo lavoro illustra lo stato dell'arte ed evidenzia come il problema del fenomeno d'efflusso da una paratoia può definirsi tutt'altro che risolto. Fondamentalmente si è soliti distinguere due differenti periodi in cui il problema, nel tempo, è stato affrontato: un periodo definito "storico" e quello successivo in cui sono stati condotti gli studi più recenti. Da un'attenta analisi effettuata sugli studi definiti "storici", si evince come le misure di portata hanno rappresentato, nei secoli scorsi, il campo d'indagine maggiormente battuto.

Tra gli studi più interessanti sull'argomento, si rimanda ai lavori [10], [20], [9]. È da specificare, tuttavia, che le caratteristiche geometriche dei manufatti di laboratorio utilizzati per gli studi sperimentali su modello fisico a cui questi studi fanno riferimento non sono specificate in dettaglio e, spesso, i dati sperimentali non sono disponibili.

### 1.4 Studi recenti

Il primo studio che si fa rientrare nella categoria di quelli più recenti è stato condotto da Rajaratnam e Subramanya [36]. Secondo quanto riportato dagli Autori, il coefficiente d'efflusso  $C_d$  può essere messo in relazione alla differenza di altezza idrica rispettivamente nelle sezioni di monte e di valle,  $h_0 - C_c \cdot a$ , ove  $h_0$  è il tirante idrico indisturbato nella sezione a monte della la paratoia,  $C_c$  è il coefficiente di contrazione, e  $a$  è l'apertura della paratoia stessa (*Fig. 1.1*)



*Fig. 1.1. Schema di paratoia verticale (da [39])*

In accordo alle osservazioni sperimentali per i casi di efflusso libero e sommerso,  $C_d$  viene considerato un coefficiente che è funzione esclusivamente dell'apertura relativa della paratoia  $a/h_0$ , con  $C_d$  che cresce leggermente all'aumentare di  $a/h_0$ .

Come limite inferiore per  $C_d$  si considera il valore  $C_d = 0.595$ . Gli effetti dell'attrito alla parete vengono considerati la causa delle differenze riscontrate tra i risultati del calcolo, sulla base della teoria del moto a potenziale, e le osservazioni sperimentali.

Rajaratnam [34] ha condotto un secondo studio su paratoie verticali in un canale rettangolare largo 311 mm con aperture della paratoia tra 26 mm e 101 mm. Tale studio ha evidenziato che il profilo della superficie libera in asse a valle della luce può essere studiato sulla base della similitudine idraulica.

Noutsopoulos e Fanariotis [32] hanno indirizzato i loro studi su valutazioni in merito al coefficiente di contrazione e al coefficiente d'efflusso. Gli scarti tra i dati relativi alle osservazioni sperimentali e i risultati teorici sono stati attribuiti alle caratteristiche spaziali del moto e alla troppo esigua larghezza dei canali utilizzati in laboratorio.

Nago [30] ha condotto osservazioni in un canale rettangolare largo 400 mm con

un'apertura della paratoia di 60 mm. Dalle indagini svolte, si è osservato che il coefficiente di efflusso,  $C_d$ , decresce all'aumentare dell'apertura relativa da 0.595 per  $a/h_0 \rightarrow 0$  fino a 0.52 per  $a/h_0 = 0.50$ .

Rajaratnam e Humphries [35] hanno indagato sulle caratteristiche del moto a superficie libera di una corrente a monte di una paratoia come prosecuzione degli studi condotti in passato dagli stessi autori. Il canale utilizzato era largo 311 mm, mentre per l'apertura della paratoia si sono considerati valori compresi tra 25 e 50 mm. I dati ottenuti nello studio sono riferiti alla distribuzione della pressione al fondo e al campo di velocità.

Montes [28] ha fornito una soluzione per condizioni di moto bidimensionale usando la tecnica di *conformal mapping*. In questo studio il coefficiente di contrazione  $C_c$  è stato confrontato con i dati sperimentali e le differenze sono state attribuite agli effetti viscosi. Si è indagato, altresì, sugli andamenti della superficie libera della corrente a monte e a valle della paratoia. La dissipazione di energia che si manifesta in corrispondenza della paratoia è stata messa in relazione alla formazione dello strato limite e alle caratteristiche della corrente a monte e a valle della paratoia.

Da un punto di vista pratico, alcuni studi hanno indicato che, nel caso di paratoie verticali, il coefficiente d'efflusso  $C_d$  assume il valore  $C_d = 0.611$  quando il numero di Reynolds supera 40,000 [39].

L'efflusso di una corrente da una paratoia sembra essere descritto con soddisfacente accuratezza dai modelli matematici basati sulla teoria del moto a potenziale anche se, a volte, risultano evidenti le differenze tra i valori teorici e i dati sperimentali per quello che riguarda il coefficiente di contrazione  $C_c$ . Dal momento che l'uso dei modelli basati sulla teoria del moto a potenziale sta diventando assai diffuso per la simulazione di diverse condizioni di moto a superficie libera, è stato considerato di rilevante interesse analizzare il caso dell'efflusso di una corrente fluida da una paratia piana per meglio definire i limiti di questi metodi. Non esiste un'opinione generale su questo tipo di problema e diverse sono le interpretazioni. I confronti tra il valore del coefficiente di contrazione  $C_c$  ricavato teoricamente e quello derivato da indagini sperimentali mostra come il dato sperimentale, quasi sempre, supera il valore teorico del

5 – 10 %. D'altro canto, è evidente che il coefficiente d'efflusso,  $C_d$ , ricavato sperimentalmente, che dipende in misura diversa dalla portata fluida e dal carico, risulta essere in buon accordo con il corrispondente valore teorico.

### **1.5 Studio di Roth e Hager (1999)**

Più recentemente, lo studio condotto da Roth e Hager [39] si inserisce in questo filone di ricerca. Le indagini sperimentali effettuate sono finalizzate a migliorare il grado di conoscenza su effetti viscosi e tensione superficiale. Gli effetti scala, la distribuzione delle pressioni e delle velocità sul fondo e lungo la paratoia e la formazione di vortici costituiscono l'oggetto dello studio condotto dagli Autori, che qui si sintetizza.

Le correnti idriche al di sotto delle paratoie standard sono soggette agli effetti di scala, dipendendo dall'apertura della paratoia e dalla larghezza del canale. Per un'apertura della luce inferiore approssimativamente a 4.5 cm, gli effetti viscosi sono sempre dominanti e la legge di similitudine di Froude non ha validità.

Tutti i risultati ottenuti in questo studio si riferiscono a correnti non viscosi (*unviscid*), cioè in cui gli effetti di scala sono assenti.

La posizione dell'increspatura a monte di una paratoia dipende esclusivamente dall'apertura relativa della luce e dal carico idraulico. Sono stati analizzati sia i campi di pressione che i campi di velocità nelle vicinanze della paratoia, giungendo alla conclusione che l'effetto della paratoia si risente all'interno di un definito range di aperture della luce stessa.

Inoltre è stato dimostrato che la pressione su una paratoia verticale può significativamente differire dalla pressione valutata con la distribuzione idrostatica.

I vortici che si formano a monte della paratoia determinano un moto decisamente spaziale, con effetti sulle onde stazionarie a valle della paratoia. Inoltre, sono state determinate le posizioni del centro del vortice rispetto alle pareti laterali del canale.

Le onde stazionarie a valle possono essere ridotte significativamente con il cosiddetto elemento anti-vortice. Questo dispositivo corrisponde ad una piastra smussata a 45° montata sull'estremità inferiore della paratoia.

Lo studio degli Autori chiarisce esaurientemente il funzionamento idraulico del fenomeno in esame, fornendo una serie di indicazioni su un argomento fin qui non molto investigato, e proponendo infine un dispositivo per l'attenuazione delle shock waves a valle della struttura.

Uno dei contributi più interessanti, agli effetti delle applicazioni relative alle traverse per laminazione, è quello riguardo al coefficiente d'efflusso.

Definita la formula d'efflusso come

$$Q = C_d (a \cdot b) \sqrt{2gh_0} \quad (1.1)$$

dove

$C_d$  è il coefficiente d'efflusso

$a$  è l'apertura della luce

$h_0$  è il carico rispetto al fondo del canale,

l'esame dei dati sperimentali mostra come  $C_d$  si possa considerare variabile in funzione dell'apertura relativa  $a/h_0$ , con un massimo di 0,59 per apertura relativa dell'ordine di 0,1 e un minimo di 0,50 per apertura relativa intorno a 0,70, mentre il valore di  $C_d$  torna a crescere e diventa di 0,52 circa per  $a/h_0$  che si avvicina a 1.

Inoltre si mostra come, per aperture inferiori a 40 mm, gli effetti di scala dovuti alla viscosità siano evidenti e comportino un aumento del coefficiente d'efflusso. In questo caso, in particolare, si ammette che le perdite di carico siano minori nel caso in cui prevalgono gli sforzi viscosi rispetto a quello in cui prevalgono gli sforzi turbolenti.

L'analogia rispetto al caso trattato nel presente lavoro è considerevole, per quanto vi siano alcune differenze da tener presenti e in particolare:

- a) la presenza di una soglia di fondo, che dà luogo, per apertura relativa prossima a 1, a un comportamento vicino a quello di stramazzo a larga soglia, con coefficiente d'efflusso che si riduce quindi a 0,40 circa
- b) la presenza di una contrazione laterale, che tende a ridurre il coefficiente d'efflusso rispetto al caso di paratoia della stessa larghezza del canale.

## 1.6 Il codice Flow – 3D per lo studio dell’efflusso da luci di fondo

Come accennato in precedenza, gli studi numerici e sperimentali del fenomeno dell’efflusso da luci di fondo non sono molto numerosi in letteratura.

Allo stato non è stato quindi possibile reperire risultati di ricerche condotte sull’argomento con l’ausilio del codice commerciale utilizzato nel presente lavoro di tesi (*Flow – 3D* della *Flow Science inc. – USA*), di cui si dirà diffusamente nei capitoli seguenti.

I casi rinvenuti in letteratura, relativi all’applicazione di questo codice di calcolo, sono peraltro piuttosto vari.

Una recentissima applicazione riguarda lo studio degli sfioratori laterali [25], al fine di determinare i profili di corrente e i coefficienti di efflusso, ottenendo risultati in buon accordo con i dati sperimentali.

Un altro recente studio [41] condotto mediante simulazione numerica con questo codice riguarda gli sfioratori di superficie a larga soglia (*ogee spillway*), verificando i risultati ottenuti su uno sfioratore di superficie di una grande diga del Nord America con i dati sperimentali forniti dall’*U.S. Army Corp of Engineers* e dall’*U.S. Boureau of Reclamation*. I risultati ottenuti dimostrano che, in generale, l’intero campo di moto è rappresentato in maniera accurata, anche se non è stato possibile rappresentare il risalto idraulico e le shock waves sulla cresta di valle della struttura esaminata.

Un’altra applicazione recente riguarda la modellazione del comportamento bidimensionale e tridimensionale di uno sfioratore superficiale al crescere dei livelli di piena [19], confrontando i risultati ottenuti con dati sperimentali.

Il confronto ha evidenziato innanzitutto una buona rappresentazione del fenomeno idraulico, denotando nel complesso una sovrastima della velocità e, per contro, una sottostima della pressioni.

## CAPITOLO 2

### LE EQUAZIONI DEL MOTO

#### 2.1 Equazioni di Navier-Stokes in campo turbolento

Com'è noto, l'equazione di Navier-Stokes per i fluidi viscosi, scritta in forma vettoriale, è:

$$\rho \cdot \left( \vec{F} - \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \text{grad } p - \mu \cdot \Delta_2 \vec{v} \quad (2.1)$$

da cui si ricavano le tre equazioni scalari:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left( F_x - \frac{du}{dt} \right) &= \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \cdot \Delta_2 u \\ \rho \cdot \left( F_y - \frac{dv}{dt} \right) &= \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \cdot \Delta_2 v \\ \rho \cdot \left( F_z - \frac{dw}{dt} \right) &= \frac{\partial p}{\partial z} - \mu \cdot \Delta_2 w \end{aligned} \quad (2.2)$$

Utilizzando la regola di derivazione euleriana secondo la quale

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \quad (2.3)$$

ovvero

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot w \quad (2.4)$$

Considerando l'equazione di continuità in forma locale si ha

$$u \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.5)$$

Riprendendo la prima delle equazioni di Navier-Stokes

$$\rho \cdot \left( F_x - \frac{du}{dt} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \cdot \Delta_2 u \quad (2.6)$$

e sostituendo in essa l'espressione dell'accelerazione ottenuta con la regola di derivazione euleriana, e quindi sommando al primo termine l'espressione nulla

$$u \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.7)$$

si ottiene

$$\rho \cdot F_x - \rho \cdot \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left( u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \cdot \Delta_2 u \quad (2.8)$$

cioè

$$\rho \cdot F_x - \rho \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial t} + 2 \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \cdot \Delta_2 u \quad (2.9)$$

$$\rho \cdot F_x - \rho \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(u \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(w \cdot u)}{\partial z} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \cdot \Delta_2 u \quad (2.10)$$

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(u \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(w \cdot u)}{\partial z} \right) = \rho \cdot F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \Delta_2 u \quad (2.11)$$

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(u \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(w \cdot u)}{\partial z} \right) = \rho \cdot F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \Delta_2 u \quad (2.12)$$

Quest'ultima equazione si dice espressa in forma conservativa ed il membro a sinistra della suddetta formula è definito termine conservativo.

Nel caso del moto turbolento si considera che sia le componenti della velocità che la pressione risultano costituite dalla media locale e dalla parte variabile (turbolenta) come indicato di seguito.

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' \\ v &= \bar{v} + v' \\ w &= \bar{w} + w' \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned} \quad (2.13)$$

L'equazione di equilibrio in forma conservativa, nel caso di moto turbolento, diventa quindi

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left( \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u} + u')^2}{\partial x} + \frac{\partial((\bar{u} + u') \cdot (\bar{v} + v'))}{\partial y} + \frac{\partial((\bar{w} + w') \cdot (\bar{u} + u'))}{\partial z} \right) = \\ \rho \cdot F_x - \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x} + \mu \cdot \Delta_2 (\bar{u} + u') \end{aligned} \quad (2.14)$$

Integrando l'equazione (2.14) si ottiene:

$$\frac{1}{\Delta t} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t} dt = \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_t^{t+\Delta t} \bar{u} dt + \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_t^{t+\Delta t} u' dt = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_t^{t+\Delta t} u' dt \quad (2.15)$$

Ricordando che le componenti variabili hanno media nulla si ha

$$\int_t^{t+\Delta t} u' dt = 0 \quad (2.16)$$

per cui

$$\frac{1}{\Delta t} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t} dt = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad (2.17)$$

che diventa

$$\frac{1}{\Delta t} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\bar{u} + u')^2}{\partial x} dt = \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\bar{u}^2 + 2 \cdot \bar{u} \cdot u' + u'^2)}{\partial x} dt \quad (2.18)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\bar{u} + u')^2}{\partial x} dt &= \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(u^2 + 2 \cdot u \cdot u' + u'^2)}{\partial x} = \\ \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int_t^{t+\Delta t} u^2 dt + \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int_t^{t+\Delta t} u u' dt + \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int_t^{t+\Delta t} u' \cdot u' dt \end{aligned} \quad (2.19)$$

Per la (2.16) si ha

$$\int_t^{t+\Delta t} u' \cdot u' dt = 0 \quad (2.20)$$

Tuttavia, come è noto, se risulta nulla la media della parte relativa alle componenti di agitazione turbolenta, non è possibile affermare la stessa cosa per il suo quadrato:

$$\int_t^{t+\Delta t} u'^2 dt = \int_t^{t+\Delta t} u' u' \neq 0 \quad (2.21)$$

Pertanto risulta

$$\frac{1}{\Delta t} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\bar{u} + u')^2}{\partial x} dt = \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u' u'}}{\partial x} \quad (2.22)$$

che diventa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\bar{u}+u')(\bar{v}+v')}{\partial y} dt &= \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \int_t^{t+\Delta t} \bar{u} \cdot v dt + \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \int_t^{t+\Delta t} \bar{u}' \cdot v' dt \\ &+ \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \int_t^{t+\Delta t} \bar{u}' \cdot \bar{v} dt + \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \int_t^{t+\Delta t} \bar{u} \cdot v' dt \end{aligned} \quad (2.23)$$

Da cui

$$\frac{1}{\Delta t} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\bar{u}+u')(\bar{v}+v')}{\partial y} dt = \frac{\partial \bar{u} \cdot v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}' v'}{\partial y} \quad (2.24)$$

Si ha anche

$$\frac{1}{\Delta t} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\bar{p}+p')}{\partial x} dt = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \quad (2.25)$$

e pertanto

$$\frac{1}{\Delta t} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \Delta_2(\bar{u}+u') dt = \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial z^2} dt = \Delta_2 \bar{u} \quad (2.26)$$

Sostituendo le espressioni ottenute si può scrivere

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}' u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u} \cdot v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}' v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u} \cdot w}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}' w'}{\partial z} \right) = \rho \cdot F_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \cdot \Delta_2 \bar{u} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u} \cdot v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u} \cdot w}{\partial z} \right) &= \\ \rho \cdot F_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \cdot \Delta_2 \bar{u} - \rho \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}' u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}' v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}' w'}{\partial z} \right) & \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + 2 \cdot \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = \\ \rho \cdot F_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \cdot \Delta_2 \bar{u} - \rho \cdot \left( \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = \\ \rho \cdot F_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \cdot \Delta_2 \bar{u} - \rho \cdot \left( \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

In base alla (2.7) si ha, infine

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = \rho \cdot F_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \cdot \Delta_2 \bar{u} - \rho \cdot \left( \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right) \quad (2.31)$$

ovvero

$$\left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \cdot \Delta_2 \bar{u} - \left( \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right) \quad (2.32)$$

In modo analogo è possibile scrivere altre due equazioni, nelle altre direzioni (y e z) per ottenere infine le cosiddette Equazioni di Navier-Stokes mediate alla Reynolds (*Reynolds Averaged Navier-Stokes Equation*), che rappresentano l'equilibrio dinamico nel moto turbolento (Eq. 2.33).

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) &= F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \cdot \Delta_2 \bar{u} - \left( \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right) \\ \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) &= F_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \cdot \Delta_2 \bar{v} - \left( \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right) \\ \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) &= F_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \cdot \Delta_2 \bar{w} - \left( \frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Si hanno in questo modo tre equazioni in sei incognite  $u, v, w, u', v', w'$ . Per poterle integrare, si ha bisogno di scrivere altre tre equazioni che leghino  $u', v', w'$  (che rinviano agli sforzi di Reynolds) con le componenti della velocità  $u, v, w$ . Queste altre tre equazioni sono fornite da diversi modelli, detti *modelli di chiusura*, di cui nel seguito si darà una rapida rassegna.

## 2.2 Modelli di chiusura delle Equazioni di Navier – Stokes

Si supponga di poter utilizzare quanto detto nel paragrafo precedente e di essere quindi interessati a risolvere le equazioni per il moto medio (*RANS*). Questo assume una particolare importanza nelle simulazioni, per i consistenti vantaggi, in termini di risorse di calcolo, che ne derivano: la simulazione numerica di un moto turbolento deve basarsi sulla corretta riproduzione degli effetti dinamici tipici, il che vuol dire tener conto degli effetti delle scale turbolente, trascurati nelle equazioni mediate, riproducendoli in qualche modo [23]. Gli strumenti che permettono di completare il modello fisico – matematico delle *RANS* sono, come detto, i modelli di turbolenza. Si tratta del cosiddetto problema della chiusura delle equazioni, ovvero del problema di esprimere i termini prodotti, a media non nulla, di grandezza fluttuanti che si generano nel processo di media delle equazioni del moto, in funzione di altre grandezze proprie del solo moto medio, il solo esplicitamente risolto. I limiti di questo modo di procedere sono essenzialmente legati ai modelli della turbolenza assunti: oltre alla complessità della loro formulazione, occorre tener conto dell'impossibilità, intrinseca alla natura stessa della turbolenza, di produrre modelli di validità sufficientemente generale. Infatti le strutture turbolente di dimensioni maggiori hanno scale e comportamento dinamico fortemente dipendenti dal tipo di moto: per esempio, in uno strato limite sono sensibilmente diverse da quelle in un getto libero. Diversa è la situazione dove il moto delle strutture di grande scala viene risolto in modo esplicito con le equazioni di Navier-Stokes, mentre al modello è affidato il compito di riprodurre gli effetti delle sole strutture di piccola scala. Concettualmente questo è lo scopo della cosiddetta *Large Eddy Simulation – LES*.

Per poter integrare il sistema di equazioni *RANS* è necessario esprimere 6 nuove incognite, ossia le componenti del tensore di Reynolds, che è simmetrico. Questo è il

compito dei modelli di turbolenza. I modelli più classici sono basati sull'ipotesi di Boussinesq. Boussinesq, ancora prima che Reynolds mettesse in evidenza il legame tra sforzi turbolenti e le fluttuazioni di velocità, propose l'idea di una viscosità turbolenta, ossia di un coefficiente che permettesse di esprimere le componenti del tensore degli sforzi come funzioni delle componenti del tensore di deformazione del moto medio.

Una fondamentale differenza tra il tensore degli sforzi per un fluido viscoso e il tensore degli sforzi di Reynolds è che per il secondo non vi è un unico coefficiente di proporzionalità (il coefficiente di viscosità) ma due, in riferimento alle fluttuazioni orizzontali e verticali della velocità. I due coefficienti di viscosità turbolenta non possono essere considerati costanti, ma dipendono dalle coordinate spaziali: sono una proprietà del moto e non del mezzo. Inoltre sono diversi ordini di grandezza maggiori del coefficiente di viscosità laminare.

È riconosciuto da tempo [43] che le Equazioni di Navier – Stokes (2.33), con appropriate condizioni al contorno, descrivano in modo praticamente esatto il comportamento di un fluido sia in condizioni laminari che turbolente. La natura estremamente complessa e apparentemente stocastica della turbolenza non nasce quindi né da fonti esterne di “rumore” (fluttuazioni nelle condizioni al contorno) né da una inadeguata formulazione matematica del problema, ma è una proprietà intrinseca di certe soluzioni delle equazioni stesse. Da ciò discende che, nelle condizioni in cui un sistema fisico presenta un comportamento turbolento, una soluzione (numerica o analitica) diretta delle Eq. (2.33), purché sufficientemente accurata, manifesterà lo stesso comportamento (e viceversa). Il problema sta nelle condizioni che devono essere soddisfatte perché la soluzione possa considerarsi accurata.

Come insegna l'esperienza, molti problemi di grande interesse pratico sfuggono ancora alla possibilità di simulazioni dirette, a causa di un impegno computazionale non sempre sostenibile dagli attuali strumenti; ciò giustifica il ricorso ai modelli di turbolenza.

Applicare un modello di turbolenza allo studio di un problema fluidodinamica consiste, in ultima analisi, nel rinunciare a studiare nei dettagli l'effettivo comportamento del fluido, sostituendolo con un fluido equivalente descritto da opportune equazioni costitutive, e tale da manifestare nelle condizioni date un comportamento spazio-temporale sufficientemente regolare e predicibile.

Possono individuarsi due approcci fondamentali alla modellazione della turbolenza: il primo si basa su un processo di “filtraggio spaziale”, e conduce alla cosiddetta *Large Eddy Simulation – LES* (simulazione dei grandi vortici); il secondo si basa concettualmente su un analogo filtraggio temporale, ma si riduce il più delle volte alla media su tempo infinito o alla media d’insieme, dando vita alla cosiddetta chiusura secondo Reynolds (modelli *Reynolds Averaged Navier Stokes – RANS*).

E’ superfluo aggiungere che questi brevi cenni possono solo dare un’idea generale delle principali caratteristiche della turbolenza idrodinamica, uno degli argomenti più complessi e affascinanti di tutte le scienze fisiche. Trattazioni molto più adeguate possono trovarsi in: [45], [13], [26], [37].

### **2.2.1 Simulazione Diretta della Turbolenza – DNS**

In qualunque problema fluidodinamico, per risolvere in modo diretto le equazioni del moto occorre definire nel dominio di calcolo una griglia tridimensionale (discretizzazione spaziale) le cui maglie devono essere più piccole della scala delle strutture significative da risolvere. Inoltre, la simulazione deve essere eseguita con passi  $\Delta t$  (discretizzazione temporale) sufficientemente piccoli da seguire l’andamento nel tempo delle varie grandezze [7].

Se il numero di Reynolds (rapporto tra le forze inerziali e le forze viscosse) è abbastanza piccolo, il moto è laminare e le strutture significative del campo di moto hanno dimensioni dello stesso ordine delle strutture fisiche presenti nel dominio di calcolo (pareti, ostacoli ecc.); inoltre, per condizioni al contorno invarianti nel tempo, il problema ammette quasi sempre una soluzione stazionaria o periodica (preceduta, eventualmente, da un transitorio iniziale secondo le condizioni iniziali scelte). In questo caso, quindi, è quasi sempre possibile raggiungere una sufficiente risoluzione spazio – temporale e ottenere una soluzione indipendente dalla discretizzazione usata. Per valori elevati del numero di Reynolds, il moto del fluido diviene turbolento. In tal caso, il campo di moto è sempre dipendente dal tempo (anche in presenza di condizioni al contorno invarianti), dipende in modo critico dalle condizioni iniziali ed è privo (istantaneamente) di simmetrie spaziali anche se il problema presenta simmetrie geometriche.

Le strutture spaziali del campo di moto (*vortici*) coprono un intervallo di scale che si estende dalla scala del dominio fisico a quella dei vortici dissipativi di Kolmogorov, in cui l'energia meccanica del fluido è dissipata in calore da effetti viscosi. Questo intervallo cresce al crescere del numero di Reynolds e, per moti pienamente turbolenti, copre in genere diversi ordini di grandezza. Benché, come si è accennato, le equazioni del moto continuo a descrivere in linea di principio la fisica del problema, la loro soluzione diretta presenta notevoli difficoltà.

La direct numerical simulation (DNS) consiste nel risolvere numericamente le equazioni di Navier – Stokes e di continuità, con condizioni iniziali e al contorno appropriate, così come sono, senza effettuare alcuna decomposizione dei campi di velocità e pressione, quindi risolvendo tutte le scale spaziali presenti. La DNS è rimasta irrealizzabile, finché non si sono rese disponibili adeguate risorse di calcolo. Dal punto di vista concettuale la DNS è l'approccio più semplice alla turbolenza e, qualora possa essere applicato, è ineguagliabile in quanto ad accuratezza e livello di descrizione.

E' tuttavia importante sottolineare ancora che il costo computazionale è assai elevato e le risorse di calcolo necessarie aumentano rapidamente all'aumentare del numero di Reynolds: allo stato attuale la DNS è applicata a flussi con basso o moderato numero di Reynolds.

La soluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes e di continuità può avvenire in modi diversi: tra i più usati vi sono le differenze finite e i metodi spettrali. Questi ultimi sono particolarmente interessanti, perché forniscono i campi di velocità e pressione direttamente in termini di modi o contributi spettrali, cioè corrispondenti alle differenti scale spaziali. Per quanto riguarda le differenze finite, la metodologia numerica si basa sul fatto che i campi di velocità e pressione vengono descritti attraverso un numero finito di punti o nodi computazionali, attraverso la soluzione di un sistema di equazioni algebriche che rappresentano le equazioni di partenza nei punti computazionali, tramite l'approssimazione delle derivate con rapporti di differenze o incrementi finiti. La soluzione alle differenze finite, contrariamente a quanto avviene con i metodi spettrali nei quali i modi separatamente forniscono il contributo della singola scala spaziale, contiene i contributi di tutte le scale spaziali. I metodi spettrali infatti forniscono la soluzione nello spazio dei numeri d'onda e la soluzione nello spazio fisico deve essere ricostruita attraverso una operazione di antitrasformazione di Fourier, i metodi alle differenze finite forniscono direttamente la soluzione nello spazio fisico, in cui i

contributi alle diverse scale spaziali si presentano contemporaneamente.

Ciò che accomuna le metodologie numeriche spettrali e quelle basate sulle differenze finite è l'elevato numero di modi e punti computazionali. Questo numero viene infatti determinato dalla considerazione che ogni DNS, in quanto si basa su una procedura discreta, è limitata dalla scelta di una scala spaziale minima che può essere risolta. Tale scelta in pratica definisce la finezza della griglia computazionale ed è dettata dalla potenzialità di calcolo che si ha a disposizione. Limitando gli esempi alle metodologie numeriche basate sulle differenze finite, si dovrebbe fare in modo che la minima distanza tra due punti computazionali  $\delta s$  sia sufficientemente piccola da essere rappresentativa delle scale spaziali dissipative.

In altre parole:

$$\delta s \approx \eta = \left( \frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad (2.34)$$

essendo  $\eta$  la microscala di Kolmogorov, rappresentativa delle scale spaziali dissipative.

Nonostante le difficoltà di cui si è detto, la DNS è uno strumento prezioso e complementare agli studi sperimentali sulla turbolenza: basti pensare al fatto che, grazie a simulazioni DNS, sono state determinate statistiche sulle fluttuazioni di velocità e pressione altrimenti impossibili da ottenere sperimentalmente: in altre parole la DNS si rivela essere una sorta di strumento di misura, le cui dimensioni possono, entro certi limiti, essere ridotte finché si vuole e pertanto posizionabile in punti in cui nessuno strumento di misura fisico può essere posto. Inoltre la DNS è uno “strumento di misura” che può misurare tutte le grandezze relative al campo di moto e da esse derivate, che invece, potrebbero essere difficili da misurare con strumenti reali. I dettagli della turbolenza di parete, tanto per fare un esempio, sono studiati con maggior facilità con la DNS che con le misure sperimentali.

### 2.2.2 *Large Eddy Simulation – LES*

La “Large Eddy Simulation”, o LES (termine che possiamo liberamente tradurre come simulazione “a grandi vortici”, o “per grandi vortici”) è un approccio alla modellazione della turbolenza basato sul filtraggio spaziale del campo di moto. La giustificazione teorica di tale approccio poggia sulla constatazione che in un moto turbolento le strutture di più grande scala (grandi vortici), che sono le principali responsabili del trasporto convettivo di quantità di moto, energia turbolenta e campi scalari, non si prestano ad essere modellate in forma generale (in quanto sono altamente anisotrope e variano considerevolmente da moto a moto), e vanno quindi preferibilmente simulate in modo esplicito; mentre le strutture di piccola scala, prossime alla soglia dissipativa di Kolmogorov, sono tendenzialmente isotrope e universali (indipendenti cioè dallo specifico problema), per cui si prestano meglio ad essere modellate in modo semplificato.

Nell’approccio LES, dunque, si parte dalla equazione di Navier – Stokes e dalla equazione di continuità, che, attraverso una opportuna operazione di filtraggio, divengono le equazioni che determinano i moti la cui scala spaziale è maggiore o uguale ad un valore fissato: tale valore segna il confine tra i moti direttamente simulati dalle equazioni e i moti esclusi dalla simulazione, che pertanto devono essere modellati in qualche modo. Large eddy simulation significa letteralmente: simulazione dei grandi vortici, ossia i moti di grande scala, o per lo meno di scala spaziale maggiore di un certo valore vengono simulati dalle equazioni, i moti di piccola scala vengono modellati.

Vi sono quattro passi concettuali nell’approccio LES:

- a) definizione dell’operazione di filtraggio per la decomposizione dei campi di velocità e pressione in un campo filtrato, ossia depurato dalle scale spaziali minori della scala spaziale di soglia, e in un campo residuo;
- b) definizione delle equazioni di evoluzione dei campi filtrati, derivate dalla equazione di Navier-Stokes e di continuità;
- c) definizione della relazione di chiusura per il tensore dello sforzo residuo o tensore di sottogriglia, che appare nella equazione di Navier-Stokes in conseguenza dell’operazione di filtraggio;
- d) determinazione dei campi di velocità e pressione filtrati attraverso la soluzione numerica.

### 2.2.3 Il modello $k - \varepsilon$ standard

Il modello  $k - \varepsilon$  standard è il più usato per i calcoli di pratici flussi ingegneristici. Questo modello, proposto inizialmente da Launder e Spalding [24] prevede la soluzione di due equazioni di trasporto separate per determinare indipendentemente la velocità turbolenta e la scala di lunghezza. La robustezza, l'economia e la ragionevole accuratezza per un ampio campo di flussi turbolenti spiegano la larga diffusione di tale modello nelle simulazioni numeriche. La derivazione delle equazioni del modello si basa su considerazioni fenomenologiche ed empiriche.

### 2.2.4 Il modello RNG $k - \varepsilon$

Il modello RNG  $k - \varepsilon$  fu ricavato usando una rigorosa tecnica statistica. Esso è simile nella forma al modello  $k - \varepsilon$  standard, ma include le seguenti varianti:

- il modello RNG ha un termine addizionale nella sua equazione in  $\varepsilon$  che migliora l'accuratezza per flussi rapidamente forzati;
- è incluso l'effetto del movimento vorticoso sulla turbolenza, accrescendo l'accuratezza per flussi vorticosi;
- la teoria RNG fornisce una formula analitica per il numero di Prandtl turbolento, mentre il modello  $k - \varepsilon$  standard utilizza valori costanti stabiliti dall'utente;
- mentre il modello  $k - \varepsilon$  standard è valido per alti numeri di Reynolds, mentre la teoria RNG tiene conto degli effetti dei bassi numeri di Reynolds.

L'effettivo uso di questa caratteristica dipende, comunque, da un appropriato trattamento della regione vicino la parete.

Queste caratteristiche rendono il modello RNG più accurato e affidabile per una più ampia classe di flussi rispetto al  $k - \varepsilon$  standard.

Tale modello fornisce inoltre una più accurata descrizione di come i fenomeni di trasporto dovuti alla turbolenza varino con il numero di Reynolds.

La teoria RNG sviluppa un'equazione per la variazione della viscosità effettiva con il numero di Reynolds:

$$d \left( \frac{\rho^2 k}{\sqrt{\varepsilon} \mu} \right) = 1.72 \frac{\hat{v}}{\sqrt{\hat{v}^3 - 1 + C_v}} d\hat{v} \quad (2.35)$$

dove:

$$\hat{v} = \mu_{eff} / \mu \quad \text{e} \quad C_v \cong 100$$

### 2.2.5 Il modello della lunghezza di mescolamento

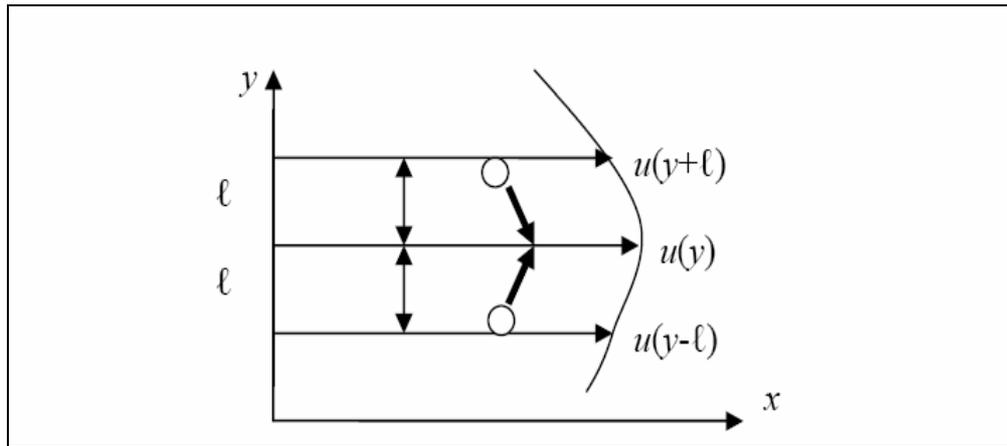
Il modello della lunghezza di mescolamento venne introdotto da Prandtl nel 1925, specificamente per descrivere la distribuzione di viscosità turbolenta in un moto bidimensionale, in cui la velocità media possiede una direzione prevalente.

Il punto di partenza della teoria della lunghezza di mescolamento è l'ipotesi che la viscosità turbolenta possa essere posta nella forma:

$$\nu_t(x, y, z, t) = l \cdot u_* \quad (2.36)$$

ossia come il prodotto della lunghezza di mescolamento  $l$  per una opportuna velocità  $u_*$ , il cui ordine di grandezza è paragonabile a quello della velocità di agitazione. La lunghezza di mescolamento è praticamente una distanza che una particella fluida può percorrere mantenendo costante la sua quantità di moto. La definizione (2.36) venne introdotta, come detto, da Prandtl in analogia alla teoria cinetica dei gas, in cui uno dei risultati fondamentali consiste nel fatto che la viscosità cinematica di un fluido può essere espressa tramite il prodotto del libero cammino medio delle molecole del fluido per la velocità del suono nel fluido. Il libero cammino medio è la distanza che una molecola percorre tra un urto e il successivo.

La definizione (2.36) tuttavia sposta il problema alla definizione della lunghezza di mescolamento e di  $u_*$ . A tal proposito, è interessante illustrare il modo in cui Prandtl procedette. Si consideri (*figura 2.1*) un moto piano, con vettore della velocità media di componenti  $(u(y), 0)$  e della velocità di agitazione  $(u', v')$ .



**Fig. 2.1.** Schema di riferimento per il modello della lunghezza di mescolamento (da [23]).

A causa della presenza delle velocità fluttuanti, avvengono continui scambi di quantità di moto tra le particelle fluide, che vengono a contatto a partire da posizioni diverse. In particolare, la particella fluida che si trova nella posizione  $y \pm l$ , dotata di velocità locale ed istantanea pari ad  $u(y \pm l)$  scambia quantità di moto con la particella che si trova in  $y$ , dotata di velocità pari alla velocità media  $u(y)$ . La particella che si trova nella posizione  $y \pm l$  arriva in  $y$  dopo aver percorso la distanza pari alla lunghezza di mescolamento con una velocità, se  $l$  è sufficientemente piccolo, pari a

$$u(y \pm l) = u(y) \pm \left. \frac{du}{dy} \right|_y l \quad (2.37)$$

da cui si comprende che lo scambio di quantità di moto ha generato, per così dire, in  $y$ , la velocità di agitazione

$$u' = \pm \left. \frac{du}{dy} \right|_y l \quad (2.38)$$

Facendo alcune considerazioni si arriva all'espressione

$$v_T = l^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \quad (2.39)$$

nella quale, ovviamente, deve essere specificata la lunghezza di mescolamento con formule empiriche.

Il modello della lunghezza di mescolamento è stato applicato con buoni risultati a flussi molto semplici: sostanzialmente bidimensionali, stazionari, confinati da pareti piane e caratterizzati da un a direzione prevalente del moto (ad esempio moti in condotta, in canali a superficie libera). Vi sono stati anche dei tentativi di generalizzarlo a flussi più complessi.

Tale modello è indubbiamente il più semplice tra i modelli di turbolenza che abbiano dato

risultati di un certo rilievo, d'altra parte richiede la definizione della lunghezza di mescolamento, che è una funzione strettamente dipendente dal moto esaminato. La lunghezza di mescolamento è peraltro nota nei flussi semplici, mentre nei flussi complicati, per essere definita, richiede l'introduzione di opportune ipotesi, che riducono l'affidabilità dei risultati.

Si deve sottolineare il fatto che, l'analogia alla base del modello della lunghezza di mescolamento tra il libero cammino medio di due molecole e la lunghezza di mescolamento tra due particelle fluide è solo qualitativamente accettabile: infatti il libero cammino medio ha un ordine di grandezza sempre notevolmente inferiore a quello delle dimensioni della corrente, mentre la lunghezza di mescolamento può raggiungere dimensioni paragonabili a quelle della corrente.

## CAPITOLO 3

# MODELLAZIONE NUMERICA CON IL CODICE DI CALCOLO FLOW – 3D

Nel presente capitolo viene discussa la modellazione tridimensionale eseguita con il codice di calcolo FLOW – 3D, valutando come in tale codice sono scritte e quindi risolte le equazioni di Navier Stokes per flussi incomprimibili [8]. La simbologia utilizzata è la stessa di quella adottata all'interno del codice.

### 3.1 Sistemi di coordinate

Le equazioni differenziali da risolvere possono essere scritte in termini di coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  o cilindriche  $(r, \theta, z)$ , in cui la coordinata  $x$  rappresenta la direzione radiale  $r$ , la coordinata  $y$  è trasformata nella coordinata azimutale  $\theta$ , e la  $z$  è la coordinata assiale. Per la geometria cilindrica, i termini supplementari devono essere aggiunti alle equazioni cartesiane del moto.

Nella scrittura delle equazioni si tiene conto del tipo di geometria mediante il coefficiente  $\xi$ , ponendo  $\xi = 0$  nel sistema cartesiano e  $\xi = 1$  nel sistema di coordinate cilindriche.

Tutte le equazioni sono formulate con le funzioni di porosità di volume e di area. Questa formulazione (denominata FAVOR™, *Fractional Area/Volume Obstacle Representation Method*) è utilizzata per modellare regioni a geometria complessa.

Per esempio, le regioni con porosità di volume nulla sono usate per definire gli ostacoli solidi, mentre le porosità di area possono essere usate per rappresentare stramazzi a parete sottile. Le funzioni di porosità inoltre introducono alcune semplificazioni nella definizione della superficie libera e delle condizioni al contorno di parete.

Generalmente, nel codice FLOW-3D le frazioni di volume e di area sono indipendenti

dal tempo. Tuttavia, queste quantità possono variare nel tempo quando si impiega il modello di ostacolo in movimento.

### 3.2 Equazione di Continuità

L'equazione di continuità in termini di massa scritta in forma generale è:

$$V_F \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u A_x) + R \frac{\partial}{\partial y}(\rho v A_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w A_z) + \xi \frac{\rho u A_x}{x} = R_{DIF} + R_{SOR} \quad (3.1)$$

in cui:

- $V_F$  è la frazione di volume aperta al moto
- $\rho$  è la densità del fluido
- $R_{DIF}$  è un termine di diffusione turbolenta
- $R_{SOR}$  è una sorgente di massa
- Le componenti di velocità ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) sono riferite alle tre direzioni cartesiane ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) o cilindriche ( $r$ ,  $\theta$ ,  $z$ ).
- $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  rappresentano le frazioni di area attraversate dal moto nelle tre direzioni
- I coefficienti  $R$  e  $\xi$  dipendono dal sistema di coordinate prescelto. In particolare, nel sistema cartesiano, vale  $R = 1$  e  $\xi = 0$ .

Il primo termine al secondo membro dell'Eq. (3.1) è, come detto, un termine di diffusione turbolenta,

$$R_{DIF} = \frac{\partial}{\partial x} \left( v_\rho A_x \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + R \frac{\partial}{\partial y} \left( v_\rho A_y R \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_\rho A_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \zeta \frac{\rho v_\rho A_x}{x} \quad (3.2)$$

in cui il coefficiente  $\nu_p$  è uguale a  $c_p \mu / \rho$ , in cui  $\mu$  è la viscosità del fluido e  $c_p$  è una costante il cui inverso è usualmente definito come numero di *Schmidt*. Questo tipo di diffusione di massa ha senso soltanto per processi di mescolamento turbolento in quei fluidi che hanno densità non uniforme. Nel caso trattato nel presente lavoro è da intendersi, pertanto,  $R_{DIF}=0$ .

L'altro termine del secondo membro,  $R_{SOR}$ , rappresenta una sorgente di densità, ed in questa sede è stato considerato nullo.

Alla luce di quanto detto sinora, pertanto, l'equazione di continuità nel caso in esame può essere riscritta nella seguente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}(uA_x) + \frac{\partial}{\partial y}(vA_y) + \frac{\partial}{\partial z}(wA_z) = 0 \quad (3.3)$$

### 3.3 Equazioni del moto

Le equazioni del moto scritte in termini delle componenti di velocità ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) nelle tre direzioni sono costituite dalle equazioni di Navier – Stokes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{V_F} \left( uA_x \frac{\partial u}{\partial x} + vA_y \frac{\partial u}{\partial y} + wA_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{V_F} \left( uA_x \frac{\partial v}{\partial x} + vA_y \frac{\partial v}{\partial y} + wA_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{V_F} \left( uA_x \frac{\partial w}{\partial x} + vA_y \frac{\partial w}{\partial y} + wA_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g + F_y \end{aligned} \quad (3.4)$$

in cui  $g$  rappresenta l'accelerazione di gravità lungo  $z$  e i termini ( $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ ) sono accelerazioni viscosi.

Le accelerazioni viscosi sono ottenute dalle equazioni:

$$\begin{aligned}
\rho V_F F_x &= \frac{\tau_{0x}}{dx} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (A_x \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_y \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z \tau_{xz}) \right] \\
\rho V_F F_y &= \frac{\tau_{0y}}{dy} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (A_x \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_y \tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z \tau_{yz}) \right] \\
\rho V_F F_z &= \frac{\tau_{0z}}{dz} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (A_x \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_y \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z \tau_{zz}) \right]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

in cui

$$\begin{aligned}
\tau_{xx} &= -2\mu \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \\
\tau_{yy} &= -2\mu \left[ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \\
\tau_{zz} &= -2\mu \left[ \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \\
\tau_{xy} &= -\mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
\tau_{xz} &= -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
\tau_{yz} &= -\mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

### 3.3.1 Sforzi tangenziali alla parete

Il primo termine che compare al secondo membro di ciascuna delle Eq. (3.4) rappresenta lo sforzo tangenziale alla parete per unità di lunghezza nelle tre direzioni.

Se questi termini sono omissi, non c'è tensione tangenziale alla parete perché i termini restanti contengono le frazioni di area di corrente ( $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$ ) che sono nulle alle pareti.

Gli sforzi di parete sono modellati assumendo una velocità tangenziale nulla in tutte le porzioni di area chiuse al moto, a parte per i contorni delle mesh, sui quali possono essere assegnate velocità tangenziali non nulle.

Per i flussi turbolenti si assume un profilo di velocità alla parete, definito da una specifica legge di parete, che modifica la grandezza della tensione tangenziale.

### 3.3.2 Valutazione della viscosità

Alla viscosità dinamica  $\mu$ , può essere assegnato valore costante ‘molecolare’ per ogni fluido in un problema a uno o due fluidi. In celle della maglia che contengono una miscela, la viscosità viene valutata come media pesata della frazione di volume dei valori costanti. Nel modello con unico fluido questo può consistere di due componenti, ciascuno con le relative densità e viscosità costanti. In questo caso la viscosità fluida della miscela è valutata come media pesata delle rispettive frazioni di volume.

Quando si considera la turbolenza, la viscosità è una somma dei valori molecolari e turbolenti. Se la viscosità è posta nulla, non vengono calcolati gli sforzi viscosi.

### 3.3.3 Interfacce fluide e superfici libere

Le correnti fluide sono definite in termini di una funzione  $F(x,y,z,t)$  di volume di fluido (VOF), [16]. Questa funzione rappresenta il volume di fluido per unità di volume e soddisfa l’equazione

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{V_F} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (FA_x u) + \frac{\partial}{\partial y} (FA_y v) + \frac{\partial}{\partial z} (FA_z w) \right] = 0 \quad (3.7)$$

La valutazione di  $F$  dipende dal tipo di problema da risolvere. Nel caso di un fluido incomprimibile a superficie libera,  $F$  rappresenta la frazione di volume occupata dal fluido. Pertanto si ha presenza di fluido per  $F = 1$ , mentre le regioni vuote corrispondono alle posizioni in cui vale  $F = 0$ .

I “vuoti” sono regioni nelle quali non è presente massa fluida nelle quali è assegnata una pressione uniforme. Da un punto di vista fisico esse rappresentano regioni riempite di vapore o di gas con densità è del tutto trascurabile rispetto a quella del fluido.

### 3.3.4 *Modello Shallow Water*

Il metodo del Volume Fluido (*VOF*) per il tracciamento delle interfacce fluide ed il metodo FAVOR per la descrizione della geometria possono essere combinati nel cosiddetto modello delle “acque basse” (*shallow water*) [17]. La variabile frazione di volume,  $V_F$ , può essere usata per definire contorno bagnato e la  $F$  il livello idrico.

Una corrente poco profonda (*shallow flow*) è caratterizzata dal fatto che l'estensione orizzontale del moto è molto più grande di quella verticale (oceani, grandi estuari, inondazioni stagionali, rivestimenti liquidi, acqua sul parabrezza delle automobili, ecc.). Se un moto è abbastanza poco profondo, al punto che le accelerazioni verticali possono essere trascurate, allora si può [33] con buona approssimazione si possono sostituire tutte le variabili di moto con i corrispondenti valori medi nella direzione verticale.

Le equazioni tridimensionali del moto con le altezze mediate allora descrivono una rappresentazione bidimensionale nel piano orizzontale.

I casi più interessanti riguardano una superficie fluida con presenza di fenomeni d'onda. In alcuni casi i contorni orizzontali non uniformi (ad esempio, una spiaggia inclinata) possono anche indurre piccole deviazioni rispetto ad un moto puramente orizzontale. In questo senso l'approssimazione delle altezze mediate tiene ancora conto di alcuni effetti tridimensionali. In letteratura si trovano diversi riferimenti sulle equazioni *shallow water* e sulle approssimazioni di ordine superiore [22].

### 3.3.5 *Modelli di turbolenza*

È ben noto che l'ampio spettro di scale di lunghezza associate ai moti turbolenti preclude una simulazione diretta di tali moti per tutti gli scopi pratici. Questo fatto ha condotto allo sviluppo di modelli semplificati per la descrizione degli effetti medi della turbolenza. In alcuni casi questi modelli tengono conto del percorso di miscelamento di Prandtl, in cui la viscosità è incrementata dai processi di miscelazione turbolenta nelle regioni di forte attrito (per esempio, in prossimità dei contorni solidi). Più generalmente, è necessario tenere conto di processi di trasporto (per esempio, convezione e diffusione) che controllano le distribuzioni spazio – temporali dell'intensità di turbolenza.

Nel codice FLOW-3D sono implementati cinque modelli di turbolenza:

- percorso di mescolamento di *Prandtl*
- modello dell'energia turbolenta ad una equazione
- modello  $k - \varepsilon$
- modello *RNG* (Renormalization Group)
- modello *LES* (Large Eddy Simulation)

Il modello più semplice consiste di un'equazione di trasporto per l'energia cinetica specifica associata alle fluttuazioni turbolente di velocità più un parametro che caratterizza una certa altra proprietà della turbolenza. La scelta dei parametri è arbitraria e può essere usata con l'energia cinetica per determinare le scale temporali e di lunghezza che caratterizzano la turbolenza.

Un modello un po' più sofisticato (e più ampiamente utilizzato) consiste di due equazioni di trasporto per l'energia cinetica turbolenta  $k$  e la sua dissipazione  $\varepsilon$ , il cosiddetto modello  $k - \varepsilon$  [11]. È stato mostrato che tale modello fornisce approssimazioni ragionevoli a molti tipi di moto, anche se a volte richiede la modifica dei relativi parametri adimensionali (o anche dei cambiamenti funzionali ai termini nelle equazioni) [38].

Un altro più recente modello di turbolenza è basato sui metodi del Renormalization-Group (*RNG*) [46], [47], [2]. Questo approccio applica metodi statistici per una derivazione delle equazioni mediate per le quantità turbolente, quali l'energia cinetica turbolenta ed il relativo tasso di dispersione. I modelli basati sulla teoria *RNG* dipendono meno da costanti empiriche rispetto agli altri modelli.

Il modello *RNG* usa le equazioni simili alle equazioni per il modello  $k - \varepsilon$ . Tuttavia, le costanti delle equazioni vengono determinate empiricamente nel modello  $k - \varepsilon$  standard, mentre nel modello *RNG* sono derivate esplicitamente.

Generalmente il modello *RNG* ha applicabilità più larga rispetto al modello  $k - \varepsilon$  standard. In particolare, il modello *RNG* si presta bene a descrivere più accuratamente moti con bassa intensità di turbolenza e moti che hanno regioni con forte attrito.

Il modello di turbolenza Large Eddy Simulation (*LES*) ha origine dai tentativi di modellazione atmosferica. L'idea di base è di poter computare direttamente tutte le

strutture turbolente del moto che possono essere risolte dalla griglia di calcolo ed invece approssimare soltanto quelle caratteristiche che sono troppo piccole per essere risolte [42].

Usando il modello *LES* è importante ricordarsi che il modello è tridimensionale e dipendente dal tempo e, anche se richiede più impegno computazionale, i risultati ottenuti con il modello *LES* forniscono spesso più informazioni rispetto ai modelli basati sulle medie alla Reynolds.

Ad esempio, quando i modelli *LES* sono usati per computare il moto turbolento intorno a grandi edifici, si ottengono non solo gli sforzi medi del vento ma anche una valutazione della grandezza e dello scarto quadratico medio delle fluttuazioni della forza associate al moto turbolento.

Nel modello *LES*, gli effetti di turbolenza troppo piccoli da computare sono espressi da una viscosità di vortice (*eddy viscosity*), che è proporzionale ad una scala di lunghezza divisa per una misura delle fluttuazioni di velocità su quella scala. Per la scala di lunghezza, Smagorinsky [42] usa una media geometrica delle dimensioni delle celle della griglia,

$$L = (\delta x \delta y \delta z)^{\frac{1}{3}} \quad (3.8)$$

e scala le fluttuazioni della velocità mediante il valore di  $L$  diviso la tensione tangenziale media. Queste quantità sono combinate insieme nel termine “*LES kinematic eddy viscosity*”

$$\nu_t = (cL)^2 \sqrt{c_{ij} e_{ij}} \quad (3.9)$$

in cui  $c$  è una costante che vale tipicamente 0.1 – 0.2, ed  $e_{ij}$  indica il tensore di deformazione.

### 3.3.6 Viscosità turbolenta

L’obiettivo principale di ogni modello di turbolenza è di fornire un meccanismo per la valutazione dell’influenza delle fluttuazioni turbolente sulle quantità medie del moto. Questa influenza è espressa solitamente dai termini addizionali di diffusione nelle equazioni che esprimono i valori medi di massa, quantità di moto ed energia [Eq. (3.1),

(3.4) (3.7)]. Dovunque compaia il coefficiente di viscosità dinamica,  $\mu$ , si suppone che esso sia una somma delle viscosità molecolari e turbolente

$$\mu = \rho(\nu_T + \nu) \quad (3.10)$$

In senso stretto, questo non è sempre corretto, ma è una buona approssimazione per livelli elevati di turbolenza (cioè, quando la viscosità turbolenta è molto più grande del valore molecolare).

Per bassi livelli di turbolenza il modello  $k - \varepsilon$  non è corretto senza l'apporto di modifiche supplementari.

Una viscosità associata alla turbolenza è computata da un modello concettuale dei vortici turbolenti che trasportano la quantità di moto (ed altre quantità). Questo trasporto è caratterizzato dalle scale di lunghezza e di velocità dei vortici. Definendo  $TLEN$  come la scala caratteristica di lunghezza dell'energia che contiene i vortici (scala inerziale di lunghezza) ed usando la radice quadrata dell'energia cinetica turbolenta,  $k$ , per caratterizzare la scala di velocità, si può definire la viscosità cinematica turbolenta,  $\nu_T$ , come

$$\nu_T = TLEN \sqrt{\frac{2k}{3}} \quad (3.11)$$

Nel modello di turbolenza a due equazioni il parametro scala di lunghezza costante è sostituito dalla funzione di dissipazione dell'energia turbolenta  $\varepsilon$ , e la viscosità è allora espressa come

$$\nu_T = CNU \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.12)$$

in cui  $CNU$  è una costante che tipicamente vale 0.09 nel modello  $k - \varepsilon$  standard e 0.085 nel modello  $RNG$ .

Combinando le due precedenti espressioni si ottiene la relazione tra i suddetti parametri

$$\varepsilon = CNU \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{TLEN} \quad (3.13)$$

Essendo più semplice ragionare in termini della scala  $TLEN$  piuttosto che del parametro

$\varepsilon$ , conviene definire valori iniziali ed al contorno per  $TLEN$  e  $k$ , e quindi usare l'equazione (3.13) per calcolare i corrispondenti valori di  $\varepsilon$  nei modelli di turbolenza a due equazioni.

### 3.3.7 Equazione dell'Energia Cinetica Turbolenta

L'energia cinetica turbolenta per unità di massa,  $k$ , è governata dall'equazione

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{I}{V_F} \left( u A_x \frac{\partial k}{\partial x} + v A_y \frac{\partial k}{\partial y} + w A_z \frac{\partial k}{\partial z} \right) = P + G + Diff - \varepsilon \quad (3.14)$$

in cui i primi tre termini al secondo membro sono definiti come:

- produzione di attrito  $P$

$$\begin{aligned} P = CS PRO \left( \frac{\mu}{\rho V_F} \right) & \left[ 2 A_x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 A_y \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 A_z \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ & \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left( A_x \frac{\partial v}{\partial x} + A_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( A_z \frac{\partial u}{\partial z} + A_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left( A_z \frac{\partial v}{\partial z} + A_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

- produzione di galleggiamento,  $G$ ,

$$G = -CRHO \left( \frac{\mu}{\rho^3} \right) \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (3.16)$$

- diffusività,  $Diff$ ,

$$Diff = \frac{I}{V_F} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_k A_x \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_k A_y \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_k A_z \frac{\partial k}{\partial z} \right) \right] \quad (3.17)$$

Il coefficiente di diffusività  $\nu_k$  è definito come  $RMTKE\left(\frac{\mu}{\rho}\right)$ , in cui  $RMTKE$  è una costante adattabile dell'utente, così come le costanti  $CSPRO$  e  $CRHO$  e nelle equazioni (3.15) e (3.16).

L'ultimo termine al secondo membro dell'equazione (3.14),  $\varepsilon$ , rappresenta, come detto, l'energia di dissipazione turbolenta che si converte in calore.

Se le frazioni di area e volume sono pari all'unità, questa equazione in  $k$  differisce dall'usuale equazione nel modello  $k - \varepsilon$  [38] solamente per una diversa formulazione del termine di galleggiamento.

Nel modello  $k - \varepsilon$  i gradienti di pressione che compaiono nel termine di galleggiamento (Eq. 3.16) sono sostituiti da un gradiente di pressione idrostatica. La formulazione nell'eq. (3.16) è corretta prevalentemente per sistemi non in equilibrio idrostatico, ed tiene conto anche degli effetti di galleggiamento originati dalle rotazioni ed accelerazioni locali della corrente.

La comparsa delle frazioni di area e di volume nel termine di produzione dell'attrito nell'equazione (3.15), consente di assicurare un legame fra gli sforzi viscosi nelle equazioni di quantità di moto medie ed il lavoro fatto da questi sforzi che produce l'energia turbolenta.

### **3.3.8 Dissipazione turbolenta**

Per la determinazione della dissipazione turbolenta  $\varepsilon$  sono disponibili due opzioni. In primo luogo, se si conosce una scala caratteristica di lunghezza per le fluttuazioni turbolente,  $TLEN$ , allora la dissipazione può essere approssimata mediante l'equazione (3.13). Questa relazione, insieme all'equazione dell'energia, (equazione 3.14), costituisce il modello di turbolenza ad una equazione.

Purtroppo in molti casi pratici è difficile stabilire un valore realistico per  $TLEN$  perché la scala di lunghezza è ignota oppure varia significativamente nello spazio e nel tempo. In tali casi può essere necessario usare un'equazione completa di trasporto per calcolare la dispersione. Questa seconda opzione presenta il vantaggio di tenere conto efficacemente delle scale spazio – temporali, ma richiede un maggiore impegno

computazionale. L'equazione di trasporto per la  $\varepsilon$  è data dall'espressione

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{V_F} \left( u A_x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v A_y \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + w A_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) = \frac{CDIS_1 \cdot \varepsilon}{k} (P + CDIS_3 \cdot G) + \varepsilon_{DIF} - CDIS_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.18)$$

in cui  $CDIS_1$ ,  $CDIS_2$ , e  $CDIS_3$  sono costanti. I termini di produzione  $P$  e  $G$  sono definiti nelle Equazioni (3.15) and (3.16).  $D_{DIF}$  è un termine diffusivo simile a quello fornito dall'equazione (3.17), con  $k$  sostituito da  $\varepsilon$  e con la costante  $RMTKE$  sostituita dalla nuova costante  $RMDTKE$ . Nel modello RNG la costante  $CDIS_2$  è funzione della tensione tangenziale.

### 3.3.9 Condizioni al contorno di turbolenza

Le equazioni (3.14) e (3.18) costituiscono i modelli di turbolenza a due equazioni usati nel codice FLOW-3D. Le condizioni al contorno per queste equazioni sono in parte sviluppate nelle equazioni mediante le frazioni di area. Per esempio, tutti i flussi advettivi e diffusivi sono automaticamente nulli alle pareti rigide, in corrispondenza delle quali le frazioni di area si annullano. Sulle superfici libere gli sforzi tangenziali sono nulli a causa dell'annullarsi delle derivate della velocità attraverso la superficie.

Gli sforzi tangenziali valutati alle pareti di contorno sono nulli anche nelle zone di moto nullo. Tuttavia, ci potrebbero essere contributi non nulli nelle equazioni di  $k$  ed  $\varepsilon$  originati da tensioni tangenziali di parete. Questi sforzi si presentano nei sottostrati laminari e sono proporzionali alla viscosità molecolare ed ai gradienti locali di velocità, pertanto si potrebbero includere i contributi della tensione tangenziale di parete nel termine di produzione  $P$ .

Purtroppo questo metodo non sembra sempre funzionare bene, non limitando opportunamente i valori di  $k$  ed  $\varepsilon$  sulle superfici di contorno. Di conseguenza, nel codice viene seguita la procedura più standard [38], in cui i valori di  $k$  ed  $\varepsilon$  sono specificati nelle celle della mesh di calcolo in corrispondenza delle pareti di contorno.

Poiché il metodo FAVOR rappresenta i contorni di parete che possono passare attraverso una cella della maglia con ogni angolo, il calcolo dei valori al contorno appropriati per  $k$  ed  $\varepsilon$  è stato generalizzato al di là di una semplice valutazione al bordo delle celle stesse.

Nel codice FLOW-3D vengono assegnati i valori di  $k$  ed  $\varepsilon$  in ogni cella della maglia che ha una o più facce parzialmente o interamente ostruite da una parete rigida. Per determinare i valori limite per  $k$  ed  $\varepsilon$ , la procedura usuale presuppone un equilibrio locale fra i processi di produzione e di dissipazione della tensione turbolenta ed un profilo di velocità con apposita legge di parete [38]. Unitamente alla definizione della viscosità turbolenta data dall'equazione (3.12), si ottengono i valori

$$k = \frac{u_*^2}{\sqrt{CNU}} \quad \text{e} \quad \varepsilon = \frac{u_*^3}{\kappa k} \quad (3.19)$$

in cui  $u_*$  è la velocità di attrito locale determinata dall'equazione

$$u = \left[ \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{u_* d}{\nu} \right) + 5.0 \right] \quad (3.20)$$

$u$  è la componente di velocità longitudinale calcolata in prossimità della parete, ad una distanza  $d$  dalla parete;  $\kappa$  è la costante di Von Karman.

L'equazione (3.20) è formalmente la stessa nel caso sia di parete liscia che di parete scabra. La differenza risiede nel fatto che, nel secondo caso, assegnata la scabrezza superficiale  $r$ , la viscosità cambia dal valore molecolare  $\nu$  al valore  $(\nu + r u)$ , convertendo automaticamente la dipendenza logaritmica dal parametro  $\frac{\nu}{u}$  (scala di lunghezza caratteristica) al parametro  $r$ .

Poiché il metodo FAVOR non individua precisamente le posizioni della parete all'interno di una cella, bisogna introdurre delle approssimazioni per determinare i valori di  $u$ ,  $u_*$  e  $d$ . A tal fine, in primo luogo si determina la direzione normale alla

parete nella cella, quindi la  $u$  può essere computata come la componente della velocità al centro della cella parallela alla parete. La distanza media dalla parete,  $d$ , è valutata come metà della larghezza della cella nella direzione normale alla parete. In questo modo la terna  $(\delta x, \delta y, \delta z)$  è considerata come un vettore di cui il prodotto con la normale alla parete è definito come la larghezza delle celle nella direzione normale.

Infine, la velocità di attrito  $u_*$  è computata iterativamente dall'equazione (3.20) in funzione di  $u$  e  $d$ .

Una volta che queste quantità sono state computate, allora con l'equazione (3.19) si possono specificare i valori di  $k$  ed  $\varepsilon$  al centro della cella, che rappresentano le condizioni al contorno cercate.

### ***3.3.10 Modello della lunghezza di mescolamento di Prandtl***

Un semplice modello locale di turbolenza che non considera effetti di trasporto può essere costruito assumendo che la produzione e la diffusione di turbolenza siano ovunque in equilibrio,

$$P + G = \varepsilon \quad (3.21)$$

Ciò significa che l'advezione, la diffusione e l'istante di conversione dell'energia turbolenta vengono trascurati. Usando questo presupposto di equilibrio locale e l'equazione (3.13) che esprime  $\varepsilon$  in funzione di  $k$  e  $TLEN$ , si può computare  $k$  in termini di  $TLEN$ , delle variazioni locali di tensione tangenziale e dei gradienti di pressione e densità. Allora  $k$  e  $TLEN$  possono essere usati per computare la viscosità turbolenta dall'equazione (3.11). È stato mostrato che questa procedura fornisce un risultato che è una generalizzazione dell'originale modello di mescolamento di Prandtl [38].

A causa dei presupposti particolarmente restrittivi, questo modello è meno utile rispetto ai modelli di turbolenza ad una o due equazioni, e dovrebbe essere usato a rigore soltanto nelle situazioni in cui si può ritenere che esso approssimi ragionevolmente il problema fisico.

### 3.4 Approssimazioni Numeriche

#### 3.4.1 Generalità

Il codice FLOW-3D risolve numericamente le equazioni descritte precedentemente mediante il metodo ai volumi finiti. La regione di moto viene suddivisa in una maglia di celle rettangolari fisse. Ad ogni cella sono associati valori medi locali di tutte le variabili dipendenti. Come spiegato in seguito, tutte le variabili sono situate ai centri delle cellule tranne le velocità, che sono computate alle facce della cella.

Gli ostacoli curvi, le pareti solide ed altre caratteristiche geometriche sono inclusi nella maglia definendo le frazioni di area delle facce e di volume delle celle che sono aperte al moto (metodo *FAVOR*<sup>TM</sup> [18]).

Per costruire le approssimazioni numeriche discrete delle equazioni del moto, i volumi di controllo sono definiti nell'intorno di ogni variabile dipendente. Per ogni volume di controllo, i flussi attraverso le superfici, le tensioni superficiali e le forze di massa possono essere computati in funzione dei valori delle variabili circostanti. Queste quantità allora sono combinate per approssimare le leggi di conservazione espresse dalle equazioni del moto. La maggior parte dei termini nelle equazioni sono valutati esplicitamente, usando i valori delle variabili locali nel corrente livello temporale. Ciò determina uno schema di calcolo semplice ed efficiente per la risoluzione della maggior parte dei problemi, ma richiede l'uso di un intervallo temporale di ampiezza limitata per garantire la stabilità computazionale e l'accuratezza del risultato.

Un'eccezione importante a questa formulazione esplicita risiede in come vengono trattate le forze di pressione. Le pressioni e le velocità sono accoppiate implicitamente usando le pressioni all'istante successivo nelle equazioni di quantità di moto e le velocità al medesimo istante nell'equazione di continuità. Questa formulazione semi-implicita delle equazioni consente di ottenere una soluzione efficiente dei problemi di fluidi incomprimibili a bassa velocità. La formulazione semi-implicita, tuttavia, è formulata in termini di insiemi accoppiati di equazioni che devono essere risolte iterativamente.

Nel codice FLOW-3D sono presenti due di tali tecniche.

Il più semplice è un metodo successivo di sovra-rilassamento (*SOR*, *Successive Over-Relaxation*). Nei casi in cui è richiesto un metodo più implicito di soluzione, si può

utilizzare il metodo *SADI* (*Special Alternating-Direction*).

Il metodo numerico di base impiegato in FLOW-3D ha un'accuratezza formale del primo ordine rispetto agli incrementi spazio – temporali, anche quando la mesh di calcolo non è uniforme. È possibile anche ottenere un'accuratezza al secondo ordine. In ogni caso, le condizioni al contorno sono caratterizzate da un'accuratezza del primo ordine in tutte le circostanze.

Per esempio, in celle parzialmente occupate da un ostacolo, il metodo *FAVOR* è equivalente ad un'interpolazione del primo ordine delle condizioni al contorno all'interno della cella. Tuttavia, l'esecuzione delle condizioni al contorno del trasferimento di calore all'interfaccia tra il fluido e l'ostacolo ha un'accuratezza del secondo ordine rispetto alla dimensione della cella.

### 3.4.2 *Simbologia utilizzata*

La mesh di calcolo alle differenze finite usata per risolvere numericamente le equazioni è formata da celle rettangolari di larghezza  $\delta x_i$ , profondità  $\delta y_j$  ed altezza  $\delta z_k$ .

La regione attiva della maglia ha celle *IBAR* nella direzione  $x$  identificata con l'indice  $i$ , celle *JBAR* nella direzione  $y$  identificata con l'indice  $j$  e celle *KBAR* nella direzione  $z$  identificata con l'indice  $k$ .

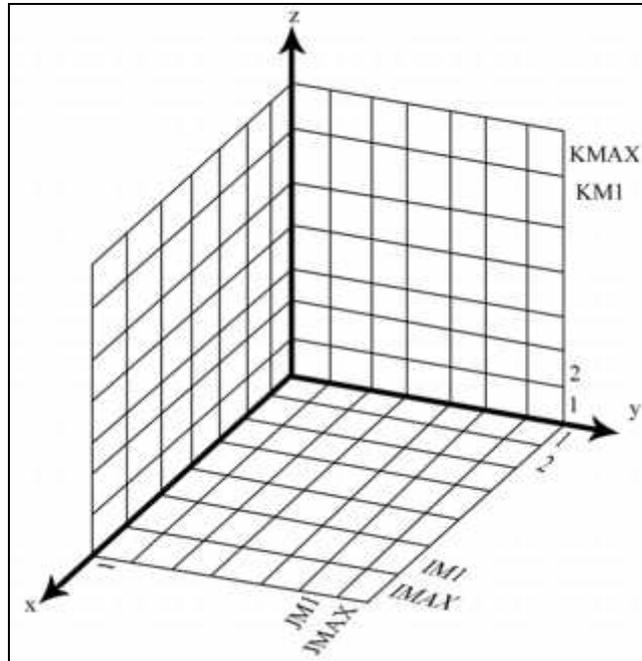
Questa regione è circondata dagli strati delle celle di contorno o fittizie usate per definire le condizioni al contorno della maglia.

Quindi, ci sono solitamente in totale  $(IBAR + 2)$   $(JBAR + 2)$   $(KBAR + 2)$  celle in una maglia completa.

Se si utilizzano condizioni al contorno periodiche o con assegnata pressione in una data direzione, tuttavia, deve essere utilizzato uno strato supplementare di celle di contorno nella medesima direzione.

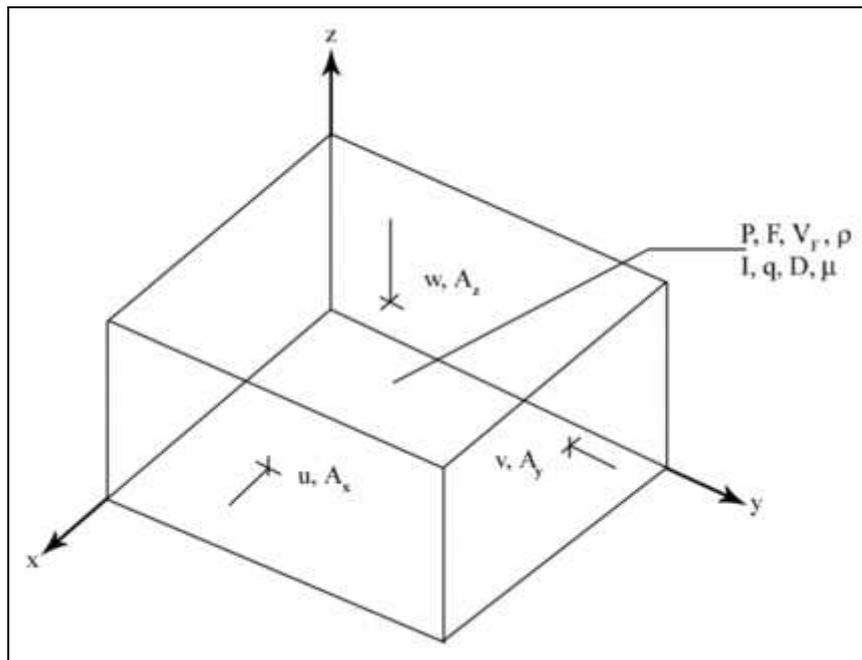
Per il resto il preprocessore inizializza automaticamente il numero necessario di celle di contorno necessarie per soddisfare tutte le condizioni al contorno.

La figura seguente illustra la nomenclatura utilizzata per identificare le celle.



*Fig. 3.1 Predisposizione della mesh e simbologia adottata*

Le velocità e le pressioni del fluido sono situate alle posizioni della maglia come mostrato nella figura seguente: le velocità  $u$  e le frazioni di area  $A_x$  al centro delle facce della cella normali alla direzione  $x$ , le velocità  $v$  e le frazioni di area  $A_y$  al centro delle facce della cella normali alla direzione  $y$  e le velocità  $w$  e le frazioni di area  $A_z$  al centro delle facce della cella normali alla direzione  $z$ . Le pressioni ( $p$ ), le frazioni di fluido ( $F$ ), Le frazioni di volume ( $V$ ), le densità ( $\rho$ ), l'energia interna ( $I$ ), le quantità di energia e dissipazione turbolenta ( $k$ ,  $\varepsilon$ ), e la viscosità ( $\mu$ ) sono riferite al centro delle celle.



**Fig. 3.2** Localizzazione delle variabili in una cella della mesh di calcolo

La notazione alle differenze finite adottata corrisponde a quella usata nel codice, nel quale non possono essere adoperati valori con indici frazionari; secondo la convenzione del codice, infatti, tutti gli indici frazionari sono diminuiti al numero intero intero più vicino.

Ad esempio, la velocità  $u$  alla posizione  $I + \frac{1}{2}$  che è situata all'interfaccia tra le celle  $(i, j, k)$  e  $(i+1, j, k)$ , è indicata come  $u_{i,j,k}^n$ . L'indice  $n$  è riferito all'istante temporale  $n$ .

Analogamente,

- $F_{i,j,k}^n$  è la frazione di fluido al centro della cella  $(i, j, k)$  all'istante  $n$ ;
- $p_{i,j,k}^n$  è la pressione al centro della cella  $(i, j, k)$  all'istante  $n$ ;
- stesso discorso per  $\rho, I, k, \varepsilon$  e  $\mu$ .

Allo stesso modo,

- $u_{i,j,k}^n$  è la velocità nella direzione  $x$  nel baricentro della faccia  $i + \frac{1}{2}$  all'istante  $n$ ;
- $v_{i,j,k}^n$  è la velocità nella direzione  $y$  nel baricentro della faccia  $j + \frac{1}{2}$  all'istante  $n$ ;

-  $w_{i,j,k}^n$  è la velocità nella direzione  $z$  nel baricentro della faccia  $k + 1/2$  all'istante  $n$ ;

Le frazioni di area e volume compaiono nel codice con la seguente notazione:

$AFR_{i,j,k}$  : frazione di area  $A_x$  di moto nella direzione  $x$  sulla faccia della cella  $i + 1/2$ ;

$AFB_{i,j,k}$  : frazione di area  $A_y$  di moto nella direzione  $y$  sulla faccia della cella  $j + 1/2$ ;

$AFT_{i,j,k}$  : frazione di area  $A_z$  di moto nella direzione  $z$  sulla faccia della cella  $k + 1/2$ ;

$VF_{i,j,k}$  : frazione di volume di al centro della cella  $(i, j, k)$ .

Quando sono presenti superfici libere (o interfacce fluide), è necessario distinguere le celle vuote, quelle che contengono una superficie, e quelle piene di liquido. Per definizione, una cella di superficie è una cella contenente liquido e con almeno una cella adiacente (a  $i \pm 1, j \pm 1$  o  $k \pm 1$ ) vuota (o riempita con un secondo fluido).

Una cella con un valore di  $F$  inferiore all'unità, ma senza celle vicine vuote, è considerata una cella piena nei problemi con un solo fluido.

### **3.4.3 Metodo di soluzione alle Differenze Finite**

La procedura base per raggiungere la soluzione attraverso un incremento nel tempo,  $\delta t$ , consiste in tre passi:

1. Approssimazione esplicita delle equazioni delle quantità di moto (3.4), da utilizzarsi per computare in prima ipotesi le velocità ad un nuovo istante temporale usando le condizioni iniziali o i valori all'istante precedente (*step predictor*)
2. Per soddisfare l'equazione di continuità (3.1), (3.3) o (3.7), utilizzando l'opzione implicita di soluzione, le pressioni sono iterativamente modificate in ogni cella e le variazioni di velocità indotte da ogni cambio di pressione sono aggiunte alle velocità calcolate nel passo precedente (*step corrector*). È necessaria una iterazione perché la variazione di pressione in una cella modifica l'equilibrio nelle sei celle adiacenti.
3. In un problema di moto a superficie libera, questa essere aggiornata usando l'equazione che la definisce (3.7) in termini di frazioni di fluido, per definire la nuova configurazione. Le quantità turbolente sono aggiornate in questo passo.

Ripetendo iterativamente I tre passi appena descritti si giunge alla soluzione per ogni intervallo di tempo. Ad ogni passo, naturalmente, bisogna imporre adeguate condizioni al contorno in tutta la mesh di calcolo, tenendo conto degli ostacoli e della presenza della superficie libera.

#### 3.4.4 Approssimazioni delle Equazioni del Moto

Una generica forma per l'approssimazione numerica delle equazioni del moto (3.4) è la seguente:

$$\begin{aligned}
 u_{i,j,k}^{n+1} &= u_{i,j,k}^n + \delta t^{n+1} \left[ -\frac{P_{i+1,j,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^{n+1}}{(\rho \delta x)_{i+1/2,j,k}^n} - FUX - FUY - FUZ + VISX - WSX \right] \\
 v_{i,j,k}^{n+1} &= v_{i,j,k}^n + \delta t^{n+1} \left[ -\frac{P_{i,j+1,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^{n+1}}{(\rho \delta y)_{i,j+1/2,k}^n} - FVX - FVY - FVZ + VISY - WSY \right] \\
 w_{i,j,k}^{n+1} &= w_{i,j,k}^n + \delta t^{n+1} \left[ -\frac{P_{i,j,k+1}^{n+1} - P_{i,j,k}^{n+1}}{(\rho \delta z)_{i,j,k+1/2}^n} + g - FWX - FWY - FWZ + VISZ - WSZ \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

in cui

$$(\rho \delta x)_{i+1/2,j,k}^n = \frac{(\rho_{i,j,k}^n \delta x_i + \rho_{i+1,j,k}^n \delta x_{i+1})}{2}
 \tag{3.23}$$

ed analogamente per le altre due quantità nelle direzioni y e z.

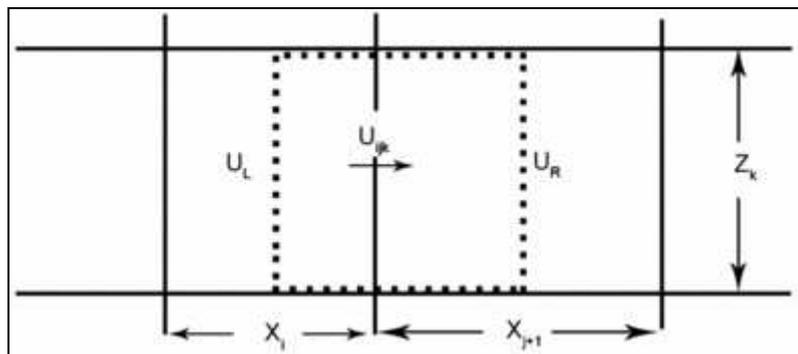
I termini advettivi, viscosi e di accelerazione hanno evidente significato; ad esempio, il termine  $FUX$  rappresenta il moto advettivo della velocità  $u$  nella direzione  $x$ ;  $VISX$  è la componente dell'accelerazione lungo la direzione  $x$ ;  $WSX$  è l'accelerazione viscosa di parete nella direzione  $x$ ;  $GX$  comprende le accelerazioni gravitazionali, rotazionali e non-inerziali. Stesso significato per i termini nelle altre due direzioni.

### 3.4.5 Metodo del primo ordine

La più semplice approssimazione alle differenze finite nel codice FLOW-3D è di un'accuratezza del primo ordine negli incrementi spazio – temporali. In questo caso i termini advettivi e viscosi sono valutati usando i valori delle velocità al precedente istante di tempo ( $n$ ). Le tensioni tangenziali alla parete sono valutate implicitamente nel seguente modo.

Poiché le pressioni all'istante  $n+1$  sono generalmente sconosciute all'inizio del ciclo, queste equazioni non possono essere usate direttamente per valutare le velocità all'istante  $n+1$  ma devono essere combinate con l'equazione di continuità.

Nel primo step della soluzione, i valori  $p^{n+1}$  nelle equazioni sono sostituiti dai valori  $p^n$  per ottenere una prima stima delle nuove velocità. In un'approssimazione esplicita il gradiente di pressione nell'equazione (3.22) è valutato all'istante  $n$ , quindi un'ulteriore variazione della  $p$  non influenza la valutazione di  $u^{n+1}$ .



*Fig. 3.3* Approssimazione alle differenze finite per la quantità di moto  $U$ . Volume di controllo (linea tratteggiata) nel piano  $x-z$

Le approssimazioni specifiche scelte per i vari termini di accelerazione nell'equazione (3.22) sono relativamente importanti, dato che conducono ad una procedura numericamente stabile. Una particolare attenzione va prestata, tuttavia, quando si fanno approssimazioni in una maglia di dimensioni delle celle non uniformi.

Si può mostrare che una mesh variabile conduce ad un'accuratezza inferiore rispetto ad una maglia fissa, anche se, ad esempio, una mesh variabile permette una migliore risoluzione nelle regioni dove le variabili del moto variano velocemente. Tuttavia, le maglie variabili devono essere adoperate con molta attenzione. È meglio, ad esempio,

usare una variazione graduale delle dimensioni delle celle per minimizzare la riduzione dell'ordine di approssimazione. È inoltre interessante cercare altre approssimazioni che non facciano perdere di accuratezza fromale una volta applicate a mesh variabili.

Nel codice FLOW-3D è stata sviluppata un'approssimazione modificata detta della cella – donatore, che mantiene la relativa accuratezza in una maglia variabile e si riduce ad un'espressione conservativa quando la maglia è uniforme [18]. Questo metodo approssima flussi advettivi nella forma non conservativa, che è necessaria a causa della difficoltà legata alle approssimazioni della forma conservativa.

La forma generale di questa approssimazione del termine  $FUX = \left(\frac{A_x}{V}\right) \frac{u\partial u}{\partial x}$  è data da

$$FUX = 0.5 \frac{(\delta x_i + \delta x_{i+1})}{(\delta x_i V_{F_{i,j,k}} + \delta x_{i+1} V_{F_{i+1,j,k}})} \cdot [(UAR - \alpha|UAR|) \cdot DUDR + (UAL + \alpha|UAL|) \cdot DUDL] \quad (3.24)$$

in cui

$$\begin{aligned} DUDL &= \frac{u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k}}{\delta x_i} \\ DUDR &= \frac{u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k}}{\delta x_{i+1}} \\ UAR &= 0.5(u_{i+1,j,k} AFR_{i+1,j,k} + u_{i,j,k} AFR_{i,j,k}) \\ UAL &= 0.5(u_{i,j,k} AFR_{i,j,k} + u_{i-1,j,k} AFR_{i-1,j,k}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Se la maglia è uniforme, questa approssimazione ha un'accuratezza del secondo ordine nello spazio per  $\alpha = 0$ . Quando il  $\alpha = 1$  si ha invece un'accuratezza del primo ordine.

### 3.4.6 Metodo del secondo ordine

Le approssimazioni descritte precedentemente hanno errori di troncamento proporzionali alla prima potenza dell'incremento temporale  $\delta t$  e, se  $\alpha \neq 0$  o la mesh non è uniforme, alla prima potenza delle variazioni spaziali  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ . Il vantaggio di queste approssimazioni del primo ordine è che sono semplici e facili da mantenere stabili da un punto di vista computazionale. Per molte applicazioni inoltre forniscono

buone soluzioni. In alcuni casi, tuttavia, può essere troppo costoso usare una risoluzione della maglia necessaria per ottenere una soluzione accurata al primo ordine. Quando questo accade, può essere utile impiegare un'approssimazione accurata al secondo ordine per le accelerazioni advective e viscosi [14]. Due schemi opzionali di approssimazione al secondo ordine per le equazioni della quantità di moto possono essere impostati con i dati di input.

### 3.4.7 Sforzi tangenziali di parete

Gli sforzi di parete sono espressi implicitamente per evitare le possibili instabilità numeriche che sorgono in celle con grandi aree di parete e piccoli volumi di moto. L'approccio di base per l'equazione della velocità  $w$ , ad esempio, è il seguente.

Le tensioni alla parete che influenzano  $w$  possono sorgere dalle aree di parete situate sulle facce  $x$  o  $y$  della cella intorno a  $w$ . Per ognuna di queste facce, se la frazione di area  $A$  è inferiore all'unità, la frazione restante  $(1 - A)$  è considerata come una parete su cui è generato uno sforzo. Sulla faccia  $x$  alla destra di  $w$ , ad esempio, l'accelerazione dovuta alla tensione di parete,  $w_{sx}$ , è un'approssimazione di

$$w_{sx} = -\frac{2\mu\Lambda}{A_z\delta x^2}(1 - A_x)(w - w_0) \quad (3.26)$$

In cui  $A_x$ ,  $\delta x$  e  $\mu$  sono valutati nella cella in cui è posizionato  $w$ . La frazione di area  $A_z$  è stimata sulla stessa faccia del volume di controllo dove si trova  $w$ .

La velocità  $w_0$  è nulla sulle pareti e sugli ostacoli, oppure è uguale alla velocità tangenziale nella direzione  $z$  ai contorni della mesh. Poiché  $w$  si trova al confine tra due celle,  $A_x$  è la media delle aree delle due celle.

Il fattore  $\Lambda$  tiene conto degli sforzi turbolenti al contorno. Se il numero di Reynolds locale  $R_L$  è abbastanza piccolo, il moto nella regione di contorno sarà laminare e l'approssimazione nell'equazione precedente con  $\Lambda = 1$  rappresenta correttamente lo sforzo tangenziale.

Se il moto è turbolento, tuttavia, allora si ha un moto non laminare e la semplice approssimazione alle differenze finite  $\frac{\partial w}{\partial x}$  considerata nella precedente equazione non è

più esatta.

In tali casi si presume un profilo con legge di parete nella regione di contorno e lo sforzo tangenziale corrispondente richiede un fattore che dipende dal numero di Reynolds locale. Bisogna ricordare che l'espressione logaritmica vale per un moto stazionario e pienamente sviluppato lungo un contorno piano, così che il relativo utilizzo in circostanze più generali è un'approssimazione.

Il termine  $A$  allora vale:

$$A = \begin{cases} 1.0, & \text{per } R_L \leq 157.44 \\ 0.0225 R_L^{\frac{3}{4}}, & \text{per } R_L > 157.44 \end{cases} \quad (3.27)$$

in cui  $R_L = \frac{\rho \cdot \delta x \cdot w}{2\mu}$  è il numero di Reynolds locale valutato con la velocità all'istante

$n$ .

allo stesso modo si valutano gli sforzi sulle altre pareti della cella, e la loro somma definisce lo sforzo totale.

Se la velocità  $w$  che compare nell'equazione (3.26) è il valore all'istante  $n$ , l'approssimazione è esplicita ma soggetta a possibile instabilità numerica. Per evitare questa evenienza, il termine  $w$  va preso come il nuovo valore calcolato con l'equazione completa della quantità di moto. Ciò rende implicita l'equazione della quantità di moto per  $w$ , che però è comunque semplice da risolvere poiché è lineare in  $w$ .

Lo scivolamento sulle pareti è modellato usando un fattore di attrito  $K$ . Lo sforzo tangenziale alla parete dato dall'Eq. (3.26) adattata allo scivolamento è

$$wsz = \frac{2A\mu}{A_x \delta x^2} (I - A_x)(w - w_s) \quad (3.28)$$

in cui  $w_s$  è la velocità di scivolamento del fluido sulla parete:

$$w_s = \frac{\frac{2\mu w}{(A_z \delta x)} + Kw_0}{\frac{2\mu}{(A_z \delta x)} + K} \quad (3.29)$$

Gli sforzi tangenziali alla parete sulle superfici di un ostacolo possono essere modificati definendo una scabrezza della parete. La scabrezza ha le dimensioni di una lunghezza

che è, in un certo senso, proporzionale alla dimensione della rugosità. La scabrezza viene incorporata nel calcolo dello sforzo tangenziale aggiungendo alla viscosità molecolare il prodotto  $\rho \cdot \xi \cdot w$ , in cui  $\xi$  è la scabrezza della superficie e  $w$  è la differenza fra la velocità locale del fluido e la velocità alla parete.

In questa impostazione lo sforzo tangenziale alla parete in moto laminare è uguale a  $\frac{\rho(v + \xi w)w}{\delta x}$ .

Per flussi turbolenti, la legge di parete mantiene la stessa forma del caso di parete liscia, a parte il fatto che la variazione di viscosità (da  $v$  a  $v + \xi w$ ) automaticamente converte la dipendenza logaritmica da una caratteristica scala di lunghezza definita dal rapporto  $v/w$  nel termine  $\xi$ , quando  $\xi$  è la più grande delle due lunghezze caratteristiche.

La scabrezza dovrebbe essere minore della dimensione della cella sul contorno dell'ostacolo, anche se possono essere definiti valori maggiori.

### 3.4.8 Calcolo della pressione

Per i flussi incomprimibili l'equazione di continuità, nella forma (3.3), può essere direttamente interpretata come una condizione ellittica sulle pressioni e sulle velocità nelle celle. Si può anche aggiungere artificialmente una compressibilità limitata, allo scopo di migliorare la convergenza senza introdurre errori significativi nella soluzione [15]

#### 3.4.8.1 Metodo SOR

Le velocità calcolate con l'equazione (3.22) devono soddisfare la seguente approssimazione discretizzata dell'equazione di continuità

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{1}{\rho c^2}\right)_{i,j,k} \cdot V_{F_{i,j,k}} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^n)}{\delta t} + \frac{(u_{i,j,k}^{n+1} AFR_{i,j,k} - u_{i-1,j,k}^{n+1} AFR_{i-1,j,k})}{\delta x_i} + \\ & + \frac{(v_{i,j,k}^{n+1} AFB_{i,j,k} - v_{i,j-1,k}^{n+1} AFR_{i,j-1,k})}{\delta y_j} + \frac{(w_{i,j,k}^{n+1} AFT_{i,j,k} - w_{i,j,k-1}^{n+1} AFT_{i,j,k-1})}{\delta z_k} = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Affinché le velocità soddisfino l'equazione (3.30), è necessario modificare la pressione e, quindi, le velocità in ogni cella di calcolo occupata dal fluido. Ciò è possibile in due modi. Il metodo più semplice è un processo iterativo successivo di sovra-rilassamento (*SOR*). La mesh di calcolo è percorsa cella per cella a partire dalla prima cella non di contorno della maglia, cominciando in primo luogo dai valori in  $i$ , poi  $j$  e infine  $k$ . I calcoli sono effettuati soltanto nelle celle che contengono fluido e non hanno celle adiacenti vuote. La variazione di pressione necessaria affinché le velocità nella cella ( $i, j, k$ ) soddisfino l'equazione (3.30) è data da

$$\delta p = -\frac{S}{\partial S / \partial p} \quad (3.31)$$

in cui la  $S$  indica il primo membro dell'Eq. (3.30). L'equazione (3.31) è semplicemente un tipo Newtoniano di processo di rilassamento che produrrà il valore della  $p$  necessario per rendere  $S = 0$ . In ogni cella i valori di velocità usati nella valutazione del termine  $S$  sono i valori più correnti disponibili durante il processo di iterazione. Usando il risultato dell'equazione (3.31), la nuova valutazione per la pressione nella cella è

$$p_{i,j,k} + \delta p \quad (3.32)$$

e le nuove stime delle velocità situate sui lati della cella sono

$$\begin{aligned}
u_{i,j,k} + \frac{\delta p \delta t}{(\rho \delta x)_{i+\frac{1}{2},j,k}} \\
u_{i-1,j,k} + \frac{\delta p \delta t}{(\rho \delta x)_{i-\frac{1}{2},j,k}} \\
v_{i,j,k} + \frac{\delta p \delta t}{(\rho \delta y)_{i,j+\frac{1}{2},k}} \\
v_{i,j-1,k} + \frac{\delta p \delta t}{(\rho \delta y)_{i,j-\frac{1}{2},k}} \\
w_{i,j,k} + \frac{\delta p \delta t}{(\rho \delta z)_{i,j,k+\frac{1}{2}}} \\
w_{i,j,k-1} + \frac{\delta p \delta t}{(\rho \delta z)_{i,j,k-\frac{1}{2}}}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

in cui le velocità sono anche in questo caso i valori più correnti disponibili durante l'iterazione. Per iniziare il processo di iterazione, le nuove velocità stimate con l'equazione (3.22) sono utilizzate con le pressioni ottenute al precedente istante temporale.

Nelle celle che contengono una superficie libera, che quindi contengono fluido ma hanno una o più celle adiacenti vuote, si segue una procedura differente. La condizione al contorno imposta in queste celle consiste nell'imporre uno specifico valore di pressione,  $p_s$ , *sulla superficie*. La pressione sulla superficie è posta uguale alla somma delle pressioni delle adiacenti regioni vuote,  $p_R$  e della tensione superficiale,  $TS$

$$p_s = P_R(n) + TS_{i,j,k} \tag{3.34}$$

in cui  $n$  è l'indice della regione vuota adiacente. La pressione di superficie,  $p_s$ , allora è determinata estrapolandola dalla pressione  $p_{i,j,k}$  al centro della superficie della cella, assumendo una distribuzione idrostatica all'interno della cella. La variazione idrostatica dipende dall'accelerazione nella direzione normale alla superficie. Questa pressione sulla superficie della cella non viene modificata durante l'iterazione della pressione, ma è trattata come un prefissato valore al contorno. In questo modo la posizione reale della superficie libera all'interno della cella è considerata esplicitamente.

### 3.4.8.2. Metodo GMRES

Nel codice FLOW-3D è stato implementato l’algoritmo di soluzione per la pressione e la velocità denominato *GMRES* (*Generalized Minimum Residual method*) [3], [4], [40], [48]. Si tratta di un algoritmo particolarmente accurato ed efficiente per una vasta gamma di problemi. Possiede infatti buone proprietà di convergenza, simmetria e velocità, anche se impegna molta memoria del calcolatore rispetto agli algoritmi tradizionali.

### 3.4.9 Advezione scalare

L’equazione di continuità (3.1), l’equazione della frazione fluida (3.7), l’equazione dell’energia interna (3.19) e le equazioni dell’energia e della dissipazione turbolenta (3.14) e (3.18), hanno in comune tutte la medesima forma, nella notazione vettoriale,

$$V_F \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot (uA\Phi) \quad (3.35)$$

L’advezione scalare della frazione fluida  $F$  è governata dall’Equazione (3.35). Quando tale equazione viene integrata su una cella di calcolo, le variazioni della  $F$  in una cella si riducono alla somma dei flussi di  $F$  attraverso le facce della cella. Il metodo impiegato nel codice per la determinazione delle variazioni di  $F$  si basa su una approssimazione del tipo “donatore – ricettore”. L’idea centrale è di usare le informazioni sulla  $F$  sia a valle che a monte del contorno del moto per stabilire una forma approssimata dell’interfaccia e quindi di usare questa forma nella computazione del moto.

Il metodo di base è sviluppato secondo la tecnica del Volume di Liquido (*VOF*), e può essere compreso considerando la quantità di  $F$  che scorre in direzione  $x$  attraverso una faccia della cella in un intervallo temporale  $\delta t$  [16]. Il moto del volume che attraversa la faccia della cella per unità di larghezza è  $L = uA_x \delta t$ , in cui la  $u$  è la velocità normale alla faccia e  $A_x$  è l’area attraversata dalla corrente. Il segno della  $u$  determina quale cella è donatore e quale ricettore, rispettivamente la cella che cede volume e quella che lo riceve. Ad esempio, se la  $u$  è positiva, la cella a monte o a sinistra è il donatore, e la

cella a valle o a destra il ricettore. La quantità di  $F$  che attraversa la faccia della cella in un intervallo di tempo è definita dal rapporto tra  $\delta F$  e l'area trasversale della cella,  $(\delta y \cdot \delta z)$ , in cui

$$\delta F = \text{MIN}(F_{AD}|L| + CF; F_D V_{F,D} \delta x_D) \quad (3.36)$$

e

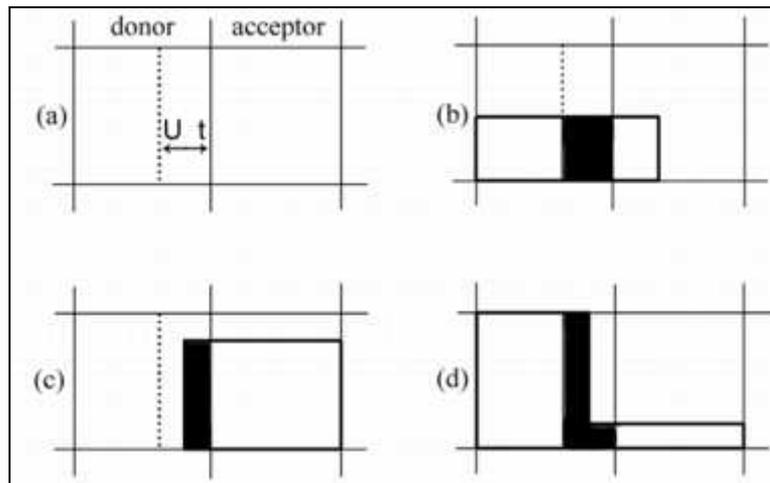
$$CF = \text{MAX}[(F_{DM} - F_{AD})|L| - (F_{DM} - F_D)V_{F,D}\delta x_D, 0.0] \quad (3.37)$$

I pedici denotano le celle “donatore” ( $D$ ) e “ricettore” ( $A$ ). Il doppio pedice,  $AD$ , si riferisce ad  $A$  o a  $D$ , a seconda dell'orientamento dell'interfaccia rispetto alla direzione del moto.  $F_{DM}$  è il valore massimo tra  $F_D$  ed  $F$  nella cella immediatamente a monte della cella donatore.

La funzione  $\text{MIN}$  nell'equazione (3.36) impedisce di far defluire dalla cella donatore un valore di  $F$  superiore a quello disponibile, mentre la funzione  $\text{MAX}$  esprime un moto aggiuntivo,  $CF$ , se la quantità di vuoto  $(I - F)$  eccede quella disponibile. Le celle ricettore e donatore sono definite nella seguente *Fig. 3.4a*, in cui è rappresentato il moto attraverso la faccia verticale di una cella. Quando  $AD = D$ , il moto è espresso dal valore

$$F = F_D \cdot |L| \quad (3.38)$$

in cui il valore di  $F$  nella cella donatore è usato per definire quella parte della possibile area di moto ha esposta al passaggio del fluido (*Fig. 3.4b*). La stabilità numerica richiede che risulti  $|L| < \delta x$ , cosicché non è possibile in questo caso che la cella donatore possa svuotarsi.



**Fig. 3.4** Esempi di forme di superficie libera adoperate nell'advezione di  $F$ . la configurazione donatore – ricettore è mostrata in (a), in cui la linea tratteggiata indica il contorno di sinistra del volume totale. Le regioni evidenziate in nero (b – d) rappresentano la corrente quantità di  $F$  del moto.

Quando  $AD = A$ , il valore di  $F$  nella cella ricettore è usato per definire quella parte della zona della corrente attraverso cui fluisce la  $F$ . Nella figura 3.4c, tutto il fluido  $F$  nella cella donatore è trasferito a valle, perché tutto ciò che si trova fra la linea tratteggiata ed i contorni della corrente si muove nella cella ricettore. Nella figura 3.4d, invece, deve essere erogata una quantità di fluido  $F$  superiore a  $F_A|L|$ . Questi ultimi due casi sono esemplificativi delle funzioni  $MIN$  e  $MAX$  sopra descritte.

Usare una cella donatore o ricettore dipende dall'orientamento della superficie. La cella ricettore si adopera quando la superficie si muove in direzione normale; altrimenti si usa il valore della cella donatore. Tuttavia, se è vuota la cella ricettore o quella a monte di quella donatore, si adopera il valore di  $F$  per determinare il moto indipendentemente dall'orientamento della superficie. Ciò significa che una cella donatore deve essere quasi piena prima che il fluido  $F$  possa entrare in una cella vuota a valle.

Una volta che il moto è stato computato con il metodo anzidetto, è moltiplicato per l'area di contorno per ottenere la quantità di  $F$  da sottrarre dalla cella donatore e sommare a quella ricettore. In questo modo il volume fluido definito da  $F$  si conserva. Quando il processo di advezione è ripetuto per tutti i contorni delle celle della mesh, i valori risultanti di  $F$  corrispondono ai valori aggiornati che soddisfano l'equazione (3.7) ed definiscono ancora accuratamente tutte le interfacce.

### 3.5 Condizioni al contorno

È necessario impostare adeguate condizioni al contorno su tutti i contorni della mesh e sugli ostacoli presenti all'interno della maglia.

Come regola generale tutte le superfici di contorno rigide e libere sono trattate come contorni caratterizzati da scivolamento libero, cioè come superfici sulle quali gli sforzi tangenziali sono nulli. Questa circostanza è imposta ponendo pari a zero le derivate della velocità che sono computate usando una o più componenti di velocità dalle facce delle celle che hanno area di moto nullo (o una faccia al di fuori del fluido nei problemi a superficie libera).

Condizioni di non scivolamento sono imposte considerando invece la presenza di sforzi tangenziali alla parete. Sui contorni della mesh può essere specificata anche una condizione di simmetria, che consente di utilizzare le condizioni di scivolamento libero anche quando sia impostata l'opzione di calcolo della tensione tangenziale di parete.

#### 3.5.1 Condizioni al contorno nel dominio di calcolo

Se il contorno è rappresentato da una parete rigida, la velocità normale deve essere nulla. La velocità tangenziale può essere impostata pari a qualunque valore per una parete con condizione di non scivolamento. Quindi, per una parete rigida le condizioni al contorno sono, per ogni  $j,k$

$$\begin{aligned}u_{1,j,k} &= 0.0 \\p_{1,j,k} &= p_{2,j,k} \\F_{1,j,k} &= F_{2,j,k} \\ \rho_{1,j,k} &= \rho_{2,j,k} \\(\rho I)_{1,j,k} &= (\rho I)_{2,j,k}\end{aligned} \tag{3.39}$$

Le condizioni di scivolamento libero sono impostate automaticamente assicurando che tutti le derivate della velocità attraverso la parete siano nulle. Condizioni di non scivolamento alla parete sono imposte mediante un apposito modello sforzo tangenziale. Le condizioni di cui all'Equazione (3.39) sono utilizzate per ottenere le velocità dalle equazioni della quantità di moto e dopo ogni passaggio attraverso la maglia durante

l'iterazione della pressione.

Le quantità scalari sono definite al centro delle celle di contorno che si trovano a mezza cella di distanza dalla corrente posizione del contorno della mesh. Ciò influisce sui gradienti di queste quantità vicino ai contorni, che possono essere particolarmente importanti per il calcolo delle pressioni. Lo stesso avviene riguardo alle velocità tangenziali su tutti i contorni aperti della mesh (per i contorni di parete le velocità tangenziali sono definite all'estremità del contorno stesso). Le velocità normali al contorno sono impostate sempre all'estremità del contorno. È possibile anche specificare condizioni al contorno dipendenti dal tempo.

I contorni con pressione fissata sono trattati in maniera diversa rispetto al caso di velocità prefissata. In questo caso, infatti, viene generato uno strato supplementare di celle nelle quali vengono stabilite le pressioni. Si possono dunque specificare tre tipi di pressione.

- a) Pressione statica: nello strato di celle supplementare le derivate delle velocità sono poste pari a zero
- b) Pressione di stagnazione: per approssimare le condizioni di stagnazione la velocità normale è posta pari a zero nelle celle del contorno di monte della mesh
- c) Distribuzione idrostatica: si considera la distribuzione idrostatica in una delle direzioni dello spazio nei problemi di fluidi incompressibili.

I contorni con uscita continua (*continulative outflow boundaries*), dove il fluido fuoriesce uniformemente dalla mesh senza effetti a monte, non sono indicati per basse velocità o fluidi incompressibili. Potenzialmente ogni scelta di condizione al contorno può interessare l'intero campo di moto. Nel codice FLOW-3D, le condizioni di tipo *continulative* usate sul contorno  $i = 1$ , quando il moto è diretto al di fuori del dominio di calcolo sono private di tutte le derivate normali, che sono (per ogni  $j, k$ )

$$\begin{aligned}u_{1,j,k} &= u_{2,j,k} \\v_{1,j,k} &= v_{2,j,k} \\w_{1,j,k} &= w_{2,j,k} \\p_{1,j,k} &= p_{2,j,k} \\F_{1,j,k} &= F_{2,j,k} \\\rho_{1,j,k} &= \rho_{2,j,k} \\(\rho I)_{1,j,k} &= (\rho I)_{2,j,k}\end{aligned}\tag{3.40}$$

Se il moto ad un contorno di tipo *continuative* è diretto nel dominio di calcolo, allora sono applicate tutte le condizioni date dall'Eq. (3.40), tranne la componente normale di velocità, che è posta pari a zero.

Per le condizioni al contorno di tipo periodico (*periodic*) nella direzione  $x$ , i contorni  $i = 1$  e  $i = i_{MAX}$  devono essere regolati per rappresentare la periodicità. Ciò è possibile impostando la lunghezza del periodo uguale alla distanza dal contorno delle celle  $i = 1$  e  $2$  e delle celle  $i = i_{MAX} - 2$  e  $i_{MAX} - 1$ . Cioè due strati di celle  $i = i_{MAX}$  e  $i = i_{MAX} - 1$ , sono utilizzati per fissare condizioni al contorno di tipo periodico sulla faccia più lontana della mesh.

Il generatore della mesh tiene conto automaticamente di questo strato supplementare di celle. Il moto periodico in direzione  $x$  è allora espresso, per ogni  $j,k$ , come segue:

$$\begin{aligned}
u_{1,j,k} &= u_{iM2,j,k} \\
v_{1,j,k} &= v_{iM2,j,k} \\
w_{1,j,k} &= w_{iM2,j,k} \\
F_{1,j,k} &= F_{iM2,j,k} \\
\rho_{1,j,k} &= \rho_{iM2,j,k} \\
(\rho I)_{1,j,k} &= (\rho I)_{iM2,j,k}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

e, per ogni  $j,k$ :

$$\begin{aligned}
u_{iM1,j,k} &= u_{2,j,k} \\
v_{iM1,j,k} &= v_{2,j,k} \\
w_{iM1,j,k} &= w_{2,j,k} \\
P_{iM1,j,k} &= P_{2,j,k} \\
(PS)_{iM1,j,k} &= (PS)_{2,j,k} \\
F_{iMAX,j,k} &= F_{3,j,k} \\
v_{iMAX,j,k} &= v_{3,j,k} \\
w_{iMAX,j,k} &= w_{3,j,k} \\
\rho_{iMAX,j,k} &= \rho_{3,j,k} \\
(\rho I)_{iMAX,j,k} &= (\rho I)_{3,j,k}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

dove  $i_{M1} = i_{MAX} - 1$  e  $i_{M2} = i_{MAX} - 3$ . Queste condizioni sono imposte nelle velocità computate con le equazioni della quantità di moto e dopo ogni iterazione della pressione. Simili condizioni al contorno sono utilizzate sugli altri contorni della mesh.

### 3.5.2 *Condizioni al contorno per la pressione*

Generalmente una condizione di pressione non può essere usata su un contorno dove sono specificate anche le velocità, perché le velocità sono influenzate dai gradienti di pressione.

Possono essere specificati due tipi di condizioni al contorno, quello statico e quello di ristagno.

Nella condizione statica, la pressione è più o meno continua attraverso il contorno e alla velocità è ivi assegnato un valore basato sulla condizione di derivata nulla sul contorno.

La condizione di pressione di ristagno assume appunto una condizione di ristagno al di fuori del contorno, in modo che la velocità a monte del contorno stesso sia nulla.

Questa assunzione richiede una diminuzione di pressione attraverso il contorno per consentire alla corrente di entrare nel dominio di calcolo. Poiché la condizione di pressione statica non contiene informazioni sulle velocità fluide fuori del contorno (a meno che non si supponga che sia uguale alla velocità sul contorno), è meno specifica della condizione di ristagno, e quindi si adatta alla maggior parte delle applicazioni

### 3.5.3 *Condizioni al contorno continuative*

In molte simulazioni si verifica che il fluido fuoriesca da uno o più contorni del dominio di calcolo. Nei flussi incomprimibili con bassa velocità le dispersioni introdotte in un contorno di questo tipo possono avere effetti nell'intero dominio di calcolo.

La condizione di uscita dalla mesh più semplice e più comunemente usata è quella di un contorno di tipo continuativo (*continuative*). Una simile condizione al contorno consiste nel porre pari a zero le derivate normali di tutte le quantità al contorno. Tale condizione di derivata nulla serve a rappresentare una continuazione regolare del moto attraverso il contorno.

Va aggiunto, peraltro, che la condizione al contorno *continuative* non ha base fisica; piuttosto è una formulazione matematica che può fornire o meno il comportamento voluto della corrente. In particolare, se si osserva l'ingresso della corrente nel dominio

di calcolo attraverso questo tipo di contorno, allora i calcoli possono essere errati se non sono state specificate le condizioni della corrente al di fuori del contorno.

Se si deve far entrare la corrente nel dominio computazionale attraverso questo tipo di contorno, bisogna partire da una condizione di quiete. Questo metodo può contribuire in sostanza a realizzare un'approssimazione ragionevole di un'uscita regolare dal contorno, anche se va considerato con estrema cautela.

Come regola generale, nei contorni di uscita dalla mesh dovrebbe essere usata una condizione al contorno fisicamente significativa, ad esempio con pressione specificata. Quando si utilizza invece una condizione di tipo *continuative*, questa dovrebbe essere localizzata il più lontano possibile dalla regione principale del moto, in modo che l'influenza nei confronti del moto principale sia minima.

#### **3.5.4 Condizioni al contorno di tipo Outflow**

La condizione al contorno di tipo *outflow* permette di investigare numericamente gli effetti delle interazioni delle onde della corrente con le strutture. Questa capacità consente di ridurre lo sviluppo della mesh di calcolo necessaria per eseguire calcoli accurati.

I contorni aperti nei problemi con bassa velocità della corrente sono difficili da definire perché possono, in linea di principio, influenzare l'intera regione di calcolo. Per i problemi di propagazione di onda è naturale cercare una condizione al contorno che consente alle onde uscenti di lasciare uniformemente la maglia di calcolo con una minima riflessione.

Le onde uscenti hanno la seguente forma (c.d. condizione di Sommerfeld):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3.43)$$

in cui  $Q$  è la generica grandezza, la coordinata  $x$  è diretta fuori dal contorno e  $c$  è la velocità del fronte d'onda.

Per usare questa condizione al contorno, la corrente dovrebbe essere formata da fronti d'onda che si propagano verso il contorno. Le onde non devono essere dirette normalmente al contorno, non devono essere lineari e non è necessaria nessuna

assunzione circa la lunghezza dell'onda. L'espressione matematica nell'equazione (3.43) significa semplicemente che ciascuna grandezza  $Q$  della corrente al contorno trasla attraverso il contorno con velocità  $c$ . Se non c'è variazione nel tempo, questa condizione si riduce alla condizione al contorno *continuative* con derivate normali nulle.

Per poter usare l'equazione (3.43) come base di una condizione al contorno di *outflow* in un calcolo tridimensionale, questa deve essere applicata ad ogni variabile della corrente in ogni posizione del contorno di uscita. La velocità di fase  $c$  è improbabile che sia costante perché grandezze differenti si muoveranno in direzioni differenti (ad esempio, le onde superficiali non si muovono con la stessa velocità delle particelle fluide) e le onde possono raggiungere il contorno in tempi diversi da direzioni differenti.

Per tenere conto di ciò si può supporre che l'equazione (3.43) sia valida non solo al contorno, ma anche in un volume di controllo in prossimità del contorno. Si assume che la velocità di fase  $c$  abbia lo stesso valore in entrambe le posizioni. Questo presupposto permette di usare le approssimazioni numeriche per l'equazione (3.43) nelle due posizioni: una per determinare il valore della  $c$  e l'altra per calcolare un valore al contorno per la grandezza  $Q$ .

La condizione al contorno di *outflow* può essere usata per i flussi incomprimibili confinati o a superficie libera.

L'equazione (3.43) è un'equazione d'onda di primo ordine che descrive la propagazione dell'onda nella direzione  $x$ . Essendo una equazione di primo ordine, richiede soltanto una condizione iniziale di partenza. Per contro, un'equazione d'onda di secondo ordine richiede due condizioni iniziali e può considerare onde che si propagano in entrambe le direzioni.

L'approssimazione con un'espressione del primo ordine facilita l'esecuzione della condizione nel codice FLOW-3D perché non richiede un immagazzinamento supplementare delle informazioni al contorno per ulteriori livelli temporali.

La condizione al contorno usata nel codice viene di seguito illustrata in termini del contorno di destra (massima  $x$ ) del dominio di calcolo.

Indicando con  $i$  l'indice della posizione spaziale sul contorno o al di fuori, dove bisogna specificare il valore di una certa grandezza  $q$ , tale valore è proprio la condizione al contorno cercata. Presupponendo che  $q_i^n$  sia un valore noto di  $q$  in tale posizione

all'istante  $n$ , questo valore può essere usato per calcolare le grandezze all'istante  $n + 1$  all'interno della griglia. Si cerca allora una condizione che fornisca il valore successivo,  $q_i^{n+1}$  necessario per iniziare il ciclo successivo del calcolo.

L'approssimazione alle differenze finite del secondo ordine (nello spazio e nel tempo) per la condizione di Sommerfeld, data dall'equazione (3.43), fornisce:

$$\frac{1}{2}(q_i^{n+1} + q_i^n) + \frac{1}{2}(q_{i-1}^{n+1} + q_{i-1}^n) + \frac{c\delta t}{\delta x} \left[ \frac{1}{2}(q_i^{n+1} - q_{i-1}^{n+1}) + \frac{1}{2}(q_i^n - q_{i-1}^n) \right] = 1 \quad (3.44)$$

I primi due termini sono le derivate temporali posizionate a circa  $n + 1/3$ . Un termine è alla posizione  $i$  e l'altro a  $i - 1$ , in modo che la loro media è localizzata all'incirca alla posizione  $i - 1/2$  lungo  $x$ . L'ultimo termine contiene una media delle due derivate rispetto ad  $x$  posizionate all'incirca ad  $i - 1/2$  agli istanti  $n$  ed  $n + 1$ . È stato assunto che gli intervalli  $\delta x$  e  $\delta t$  della griglia siano costanti.

Riscrivendo la precedente espressione, si ottiene

$$q_i^{n+1} = q_{i-1}^n + \frac{1-C}{1+C} (q_i^n - q_{i-1}^{n+1}) \quad (3.45)$$

in cui  $C = \frac{c\delta t}{\delta x}$ .

Quindi si riscrive l'equazione (3.45) spostando l'indice  $i$  un nodo a sinistra, e si risolve per il coefficiente che contiene la  $C$ , che fornisce l'indicazione della velocità di fase, o in questo caso, una funzione della velocità di fase,

$$\frac{1-C}{1+C} = \frac{q_{i-1}^{n+1} - q_{i-1}^n}{q_{i-1}^n - q_{i-2}^{n+1}} \quad (3.46)$$

Sostituendo l'espressione precedente nell'equazione (3.45) si ottiene il valore al contorno necessario per calcolare  $q_i^{n+1}$ . Per poter usare questa espressione, tuttavia,

bisogna considerare due casi limite.

Poiché si vogliono valutare unicamente le onde uscenti ed eliminare moto in ingresso, il valore della velocità di fase adimensionale  $C$  non deve essere negativo. Inoltre la stabilità di calcolo richiede che  $C$  sia inferiore o uguale all'unità. Ciò completa la specificazione della condizione al contorno di *outflow*. Che è quindi definita dalle equazioni (3.45) e (3.46) con le limitazioni date dall'espressione

$$0 \leq C \leq 1 \quad (3.47)$$

Si può notare che un'onda di Fourier con una componente nella direzione  $x$ , e un'arbitraria velocità di fase  $c$ , rappresenta una soluzione dell'equazione (3.45).

### **3.5.5 Condizioni al contorno dei modelli di turbolenza**

Su tutti i contorni, tranne quelli rigidi con condizione di non scivolamento, le funzioni dell'energia e della dissipazione turbolenta sono trattate in maniera analoga alle altre grandezze al centro della cella, come ad esempio la densità.

Sui contorni di tipo *symmetric* non sono necessarie speciali condizioni, poichè ci sono derivate di velocità nulle attraverso il contorno, e quindi la produzione di turbolenza è nulla. Inoltre, c'è un'area con moto nullo che non garantisce automaticamente flussi advettivi o diffusivi.

Sui contorni rigidi con scivolamento nullo, sono necessarie considerazioni speciali perché la risoluzione numerica è solitamente troppo grossolana per definire i particolari del sottostrato laminare al contorno.

Si è accennato precedentemente al modello di tensione tangenziale alla parete basato su un profilo di velocità turbolenta (legge di potenza). In accordo a ciò, è necessario definire i valori alla parete delle funzioni di energia di dissipazione turbolenta.

Nel contesto del metodo FAVOR, in cui le pareti rigide possono intersecare con ogni angolo una cella della mesh di calcolo, non è automatico che queste condizioni al contorno debbano essere soddisfatte. Allo scopo è stata seguita la seguente procedura.

I valori di energia e di dissipazione turbolenta sono impostati in tutte le celle che hanno una o più facce parzialmente o interamente ostruite da un contorno rigido con condizione di non scivolamento. I valori al contorno di parete sono dedotti dal profilo assunto di velocità (approssimato con la legge di potenza di esponente 1/7) e dal presupposto di un equilibrio locale fra i processi di produzione e dissipazione turbolenta.

### **3.5.6 Contorni a superficie libera**

La condizione di sforzo normale, cioè di pressione specificata, su una superficie libera è soddisfatta dalla pressione secondo lo schema descritto del metodo SOR descritto in precedenza (par. 3.4).

Gli sforzi tangenziali su una superficie libera sono nulli perché tutte le derivate di velocità che interessano componenti di velocità al di fuori della superficie sono poste pari a zero. Le velocità devono essere valutate su ogni contorno delle celle fra una cella di superficie e una cella vuota, per rappresentare correttamente l'advezione fluida. Ciò avviene in due passi successivi.

Innanzitutto ogni componente di velocità su una faccia adiacente ad una cella vuota è posto uguale al valore sulla faccia opposta della cella di superficie. Se le facce opposte l'una all'altra sono entrambe adiacenti a celle vuote, allora la velocità definita su queste facce è pari alla media dei due valori precedentemente ricavati.

Nel secondo passo si procede ad un affinamento con una pressione virtuale per ridurre al minimo la divergenza della velocità nella cella.

### **3.5.7 Considerazioni sulla stabilità**

Nel codice FLOW – 3D si trovano diverse limitazioni sull'ampiezza del passo temporale di integrazione da rispettare, al fine di evitare instabilità numeriche.

È possibile selezionare l'opzione di intervallo automatico, con la quale il codice permette di regolare il passo temporale in modo che sia abbastanza grande da non violare le condizioni di stabilità o superare il massimo intervallo stabilito a priori.

Il passo temporale viene inoltre ridotto quando le iterazioni di temperatura o di pressione eccedono i valori nominali corrispondenti che dipendono dalle opzioni di iterazione. Generalmente, l'intervallo di tempo varia di  $\pm 5\%$  per ogni ciclo a meno che non venga violata la condizione di stabilità, nel qual caso si può verificare una riduzione anche maggiore.

Se non si seleziona il controllo automatico del passo temporale, allora bisogna scegliere gli intervalli in modo da soddisfare i seguenti criteri.

Innanzitutto il fluido non può attraversare più di una cella di calcolo per ciascun intervallo temporale. Questo trasporto advettivo dipende non solo dalla velocità ma anche dalla frazione di area e volume aperta al moto. La condizione base di stabilità è

$$\delta t < CON \cdot \min \left( \frac{V_F \delta x_i}{A_x u}, \frac{V_F \delta y_j}{A_y v}, \frac{V_F \delta x_k}{A_z w} \right) \quad (3.48)$$

in cui  $(u, v, w)$  sono i valori delle velocità e il coefficiente  $CON = 0.45$  è usato tipicamente per rappresentare le situazioni peggiori suggerite da un'analisi semplificata della stabilità.

Una cella con una grande area aperta della faccia e un piccolo volume potrebbe limitare il passo temporale a piccoli valori se al suo interno si verifica un moto significativo. Se ciò dovesse accadere, cosa che può essere determinata osservando nel file di output le posizioni della mesh che controllano il passo temporale, può essere necessario modificare la disposizione della mesh.

Per le superfici libere, inoltre, va introdotta un'altra condizione di stabilità connessa alla propagazione delle onde di superficie. Se un'accelerazione  $ACCN$  è applicata alla corrente in direzione normale alla superficie libera, ci possono essere onde di superficie con velocità di ordine  $\sqrt{ACCN \cdot h}$ , dove la  $h$  è la profondità della corrente o la lunghezza dell'onda. In pratica, si usa la dimensione della cella nella direzione normale ad  $h$  e si include un fattore supplementare di  $1/2$  nel test di stabilità. La condizione attuale è che le onde di superficie non dovrebbero propagarsi per più di una cella per ciascun intervallo di tempo. Per esempio, se la  $z$  è la direzione normale alla superficie e  $ACCZ$  è l'accelerazione normale, allora

$$\delta t < 0.5 \frac{\min\{\delta x_i, \delta y_j\}}{\sqrt{\delta z_k \cdot ACCZ}} \quad (3.49)$$

Simili limitazioni devono essere imposte nelle direzioni  $y$  ed  $x$  per ciascuna cella contenente una superficie libera. Un'analisi lineare indica che l'intervallo di tempo deve essere ulteriormente limitato quando si utilizza un valore non nullo della viscosità dinamica. Questa condizione è espressa da

$$\delta t = \frac{0.25}{\max \left[ RM \cdot \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{1}{DXS} + \frac{1}{\delta y_j^2} + \frac{1}{\delta z_k^2} \right) \right]} \quad (3.50)$$

in cui  $DXS = \delta x_i^2 (1 - 0.334 \cdot CYL)$  e  $RM$  è il moltiplicatore massimo usato per  $\mu$  in tutti i tipi di processi diffusivi. Da un punto di vista fisico tale limitazione significa che nessuna grandezza si dovrebbe diffondere per più di una cella per ciascun intervallo temporale.

## CAPITOLO 4

### INSTALLAZIONE SPERIMENTALE

L'installazione sperimentale su cui sono state eseguite le prove è stata realizzata presso il laboratorio di Grandi Modelli Idraulici del Dipartimento di Difesa del Suolo dell'Università della Calabria. Essa comprende un modello di traversa con luce di fondo e l'insieme degli strumenti per l'acquisizione dei dati: asta idrometrica, stramazzo Thomson, misuratore di portata elettromagnetico, trasduttore di pressione, micromulinello, sonda ADV – Vector, fotocamera digitale, computer con software per acquisizione dati. )

#### 4.1 Descrizione del modello

Il modello riproduce una valle naturale col suo andamento planoaltimetrico; al suo interno è situata un'opera di sbarramento costituita da una traversa per laminazione delle piene dotata di luce di fondo rettangolare (*Figg. 4.1 e 4.2*).

Il modello della valle è stato realizzato in legno rivestito con vetroresina ed ha dimensioni in pianta di circa 4 x 4 m.

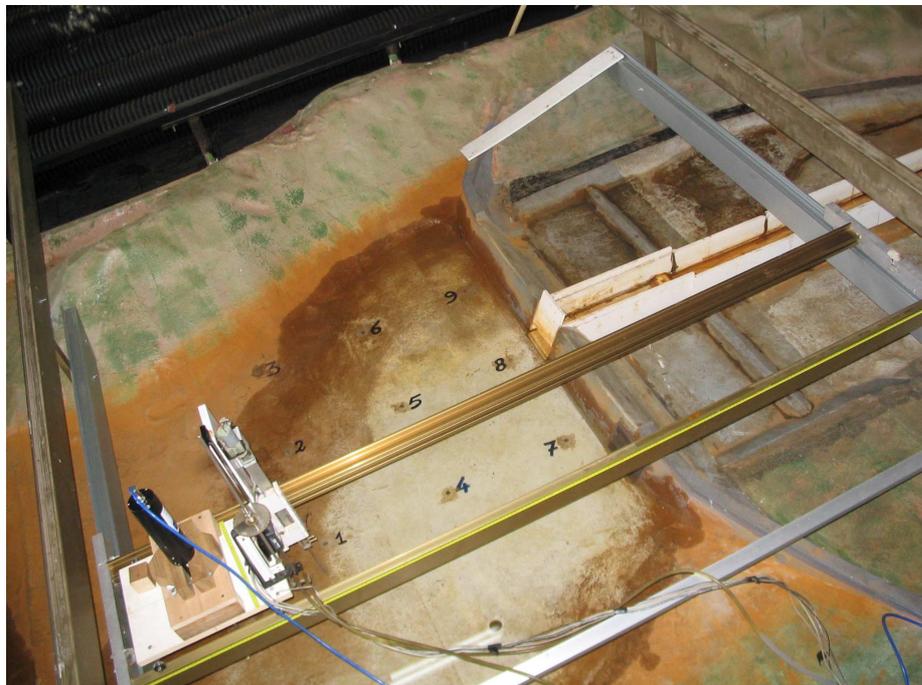
La traversa è anch'essa in legno e presenta un profilo di trascinamento tipo Creager (*Fig. 4.3*); nella sua sezione mediana è stata realizzata una luce di fondo rettangolare.

La luce è stata ottenuta rimuovendo un blocco dal corpo della traversa e inserendovi una paratoia fissa che segue l'andamento del paramento di monte, pertanto con un'inclinazione di circa 63° rispetto all'orizzontale; le dimensioni della paratoia sono: larghezza 14.2 cm altezza 12.2 cm, spessore di 1 cm, con estremità inferiore smussata con un taglio a 45° e spigolo vivo (2 mm). Le dimensioni della luce di fondo sono pertanto: larghezza 14.2 cm e altezza 4 cm.

Alla base della luce è posta una soglia di larghezza pari all'apertura della luce (14,2 cm) e di altezza 2 cm. La soglia è stata realizzata in PVC, presenta una lunghezza di 15,5 cm ed è ben raccordata sia monte che a valle.



*Fig 4.1 – Modello fisico. Vista d'insieme*



*Fig 4.2 – Modello fisico. Cassa di espansione, traversa e canale*

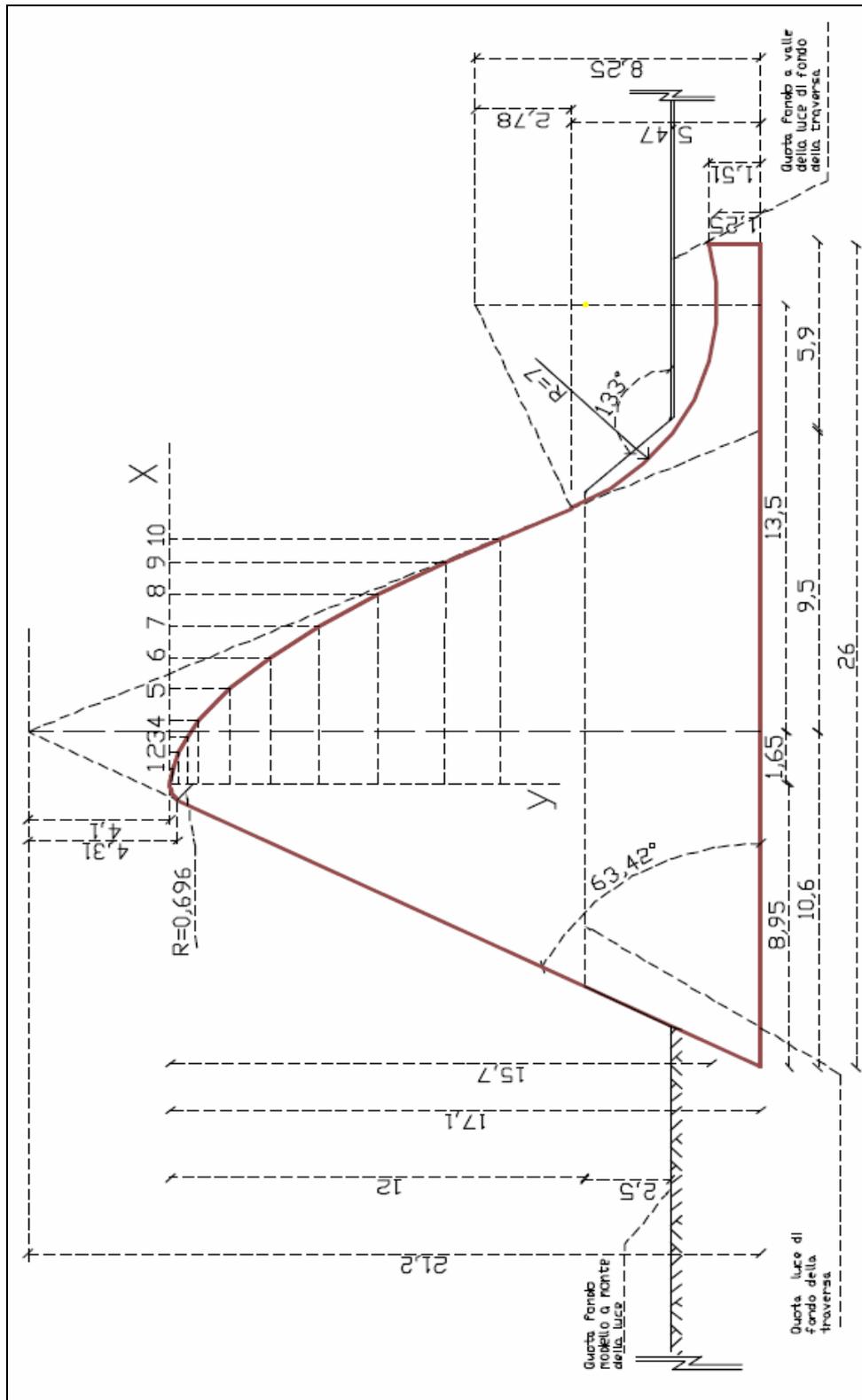


Fig 4.3 – Traversa. Profilo Creager - Scimemi

A valle della luce si trova un canale a sezione rettangolare di larghezza 14.2 cm, altezza 15 cm e lunghezza 1.5 m circa. All'interno del canale è posizionata una seconda soglia di sezione trapezoidale, posta 30 cm a valle del piede della prima. Le dimensioni di questa soglia sono: altezza 2.5 cm, base maggiore 9 cm, base minore 4.5 cm (Figg. 4.4 a e 4.4. b).



*Fig 4.4. Canale a sezione rettangolare. Vista dall'alto*



*Fig 4.4b – Canale a sezione rettangolare. Vista da valle*

## 4.2 Descrizione della strumentazione

### 4.2.1 *Stramazzo Thomson*

Per eseguire le misure di portata entrante nel modello si è utilizzato uno stramazzo triangolare in parete sottile, del tipo Thomson.

Esso è costituito da una piastra di dimensioni  $0,8\text{ m} \times 0,5\text{ m}$  in cui è praticata un'apertura costituita da un triangolo, isoscele con angolo di  $90^\circ$ , con base di  $0,60\text{ m}$  e altezza  $0,30\text{ m}$ .

Lo stramazzo è montato su un cassone in lamiera di dimensioni  $1,7 \times 1,2 \times 1\text{ m}$  circa riportato in *Fig. 4.5*.



*Fig 4.5 – Stramazzo Thomson.*

Lo spigolo a monte dell'apertura è vivo e il bordo superiore (cresta) ha uno spessore di  $1,5\text{ mm}$ . La faccia di valle dello stramazzo è raccordata da uno smusso a  $45^\circ$ ; il petto dello stramazzo misurato dal fondo del cassone è pari  $0,59\text{ m}$ .

La presa piezometrica è collocata a  $0,26\text{ m}$  dal fondo e a  $0,50\text{ m}$  dalla parete del cassone in cui è inserito lo stramazzo.

Il procedimento con cui avviene la misurazione del carico, può essere così sintetizzato: attraverso una tubazione d'arrivo, l'acqua è immessa in un primo settore

occupante la porzione superiore della parte di monte del cassone. Questo settore, avente la larghezza di 42 cm, è separato dal fondo in lamiera del cassone da due griglie poste orizzontalmente a 28,5 cm dal fondo e dal resto del cassone da una parete in lamiera. Attraverso le griglie l'acqua giunge nella parte di valle del cassone e s'innalza fino a raggiungere il vertice dello stramazzo a partire dal quale, attraverso un'asta idrometrica a punta scorrevole, munita di nonio, posizionata su una guida posta al di sopra del cassone in un punto posto a circa 0,50 a monte del piatto, viene effettuata la misurazione del carico. Noto il carico  $h_{Th}$ , attraverso la relazione sotto riportata, ricavata in [6] è possibile valutare il coefficiente d'efflusso  $\mu_{Th}$

$$\mu_{Th} = \left( \mu_0 + \frac{\alpha}{h_{Th}} \right) \left[ 1 + \frac{h_{Th}^4}{rB^2 (h_{Th} + P)^2} \right] \quad (4.1)$$

dove:

$$\mu_0 = 0.296$$

$$\alpha = 0,0022$$

$$B = 1,2 \quad (\text{larghezza dello stramazzo})$$

$$r = 0,17 \quad (\text{parametro di taratura})$$

Il valore del coefficiente d'efflusso risulta variabile col carico, dando conto del particolare fenomeno di contrazione che si riscontra nel cassone.

La portata viene infine calcolata con la formula:

$$Q = \mu \sqrt{2gh}^{2.5} \quad (4.2)$$

#### 4.2.2 Aste idrometriche

Nelle prove di laboratorio sono state utilizzate due aste idrometriche; la prima, posta su una guida al di sopra del cassone dello stramazzo Thomson e munita di nonio decimale, è stata utilizzata per valutare i carichi piezometrici al livello del vertice dello stramazzo.

La seconda asta, a lettura di digitale, è stata montata su un ponte metallico realizzato

al di sopra del modello e, tramite delle guide, può scorrere nelle due direzioni tra di loro perpendicolari; essa è stata utilizzata per valutare l'altezza idrica nella vasca e nel canale.



*Fig. 4.4 Asta idrometrica per le misure dei livelli idrici nella vasca*

#### **4.2.3 Piezometro**

Per ulteriore controllo dei carichi piezometrici a monte dello stramazzo è possibile utilizzare un piezometro il cui foro di presa nel cassone è situato a 0,26 m dal fondo e a 0,50 m da parete in cui è inserito lo stramazzo. Esso è costituito da un tubo in vetro trasparente nel quale l'acqua, proveniente dal tubicino di gomma collegato alla presa, s'innalza fino a raggiungere lo stesso livello dell'acqua nel cassone; all'interno del tubo è posta un'asta idrometrica con nonio decimale.

#### **4.2.4 Misuratore di portata elettromagnetico**

All'interno del circuito di alimentazione, su un cavallotto con tubazione da 200 mm che bypassa il circuito principale, è posto un misuratore di portata ad induzione elettromagnetica.

Durante le prove sperimentali si è constatato che lo strumento funziona in maniera accettabile per portate superiori a 1,6 – 1,7 l/s, valore comunque sempre superato in tutti

i test effettuati. Il confronto con i valori misurati allo stramazzo Thomson ha infine evidenziato che i valori forniti dai due strumenti sono risultati sempre praticamente coincidenti.

#### **4.2.5 *Trasduttore di pressione***

Per rilevare l'altezza liquida all'interno della traversa è stato anche utilizzato un trasduttore di pressione Druck PDCR 930 dotato di una membrana interna affacciata.

La membrana affacciata permette di eseguire la pulizia del sensore ed evitare che si formino residui sulla zona di misura che renderebbero imprecisa la misurazione. La parte sensibile del trasduttore è quindi la membrana: il diaframma si flette sotto l'azione della pressione dell'acqua e una volta valutata la deformazione viene generato un segnale elettrico proporzionale alla deformazione meccanica e quindi alla pressione applicata.

Il trasduttore usato nelle prove di laboratorio è collegato ad un indicatore digitale di processo, modello Druck serie DPI 270, strumento che consente di visualizzare tensione, corrente e resistenza da dispositivi esterni.

In pratica, i dati rilevati col trasduttore sono trasformati in misure di livello e visualizzati mediante il display dell'indicatore digitale di processo.

Il trasduttore presenta una forma quasi cilindrica con lunghezza di circa 10 cm e un diametro di circa 1,75 cm.

Il collegamento del trasduttore con il modello avviene mediante una tubazione flessibile costituita da due tratti separati da una piccola saracinesca: il primo tratto di tubazione è collegato dall'estremo di monte a 9 fori di presa posizionati sul fondo della cassa di espansione, come rappresentato nelle *Fig. 4.5 e 4.6.*; il secondo tratto è collegato a monte con la saracinesca e all'altro estremo con un tubo in plexiglas chiuso, contenente il trasduttore.



*Fig. 4.5 Prese piezometriche nella vasca. Vista dall'alto*



*Fig. 4.6 Prese piezometriche nella vasca. Vista da destra*

#### **4.2.6 Micromulinello**

Per la misura delle velocità assiali è stato adoperato un micromulinello del tipo

“Nixon – Streamflow velocità 403“. All’estremità dello strumento è posto un rotore in pvc del diametro di 11.6 mm, che ruota all’interno di un anello toroidale dello spessore di 2 mm. Il baricentro del rotore si trova pertanto a circa 6 mm dall’estremità inferiore dell’anello. Lo strumento è collegato ad un indicatore digitale di frequenza con display lcd.

Questo strumento è indicato per la misura delle velocità in correnti prevalentemente monodimensionali, nel campo 0.05 – 1.50 m/s.

Lo strumento fornisce in output la frequenza di rotazione,  $F$ , espressa in Hertz. La conversione in velocità avviene mediante le seguenti espressioni:

$$- v_m = \frac{19}{32}F + 3.25 \quad \text{per } v_m < 30 \text{ cm/s} \quad (4.3a)$$

$$- v_m = \frac{19}{32}F + 2.50 \quad \text{per } v_m > 30 \text{ cm/s} \quad (4.3b)$$

#### **4.2.7 Sonda ADV - Vector**

Le velocità sono state misurate anche mediante la sonda Nortek ADV – Vector, che consente di acquisire le tre componenti del vettore velocità della corrente.

Lo strumento ha dei vincolanti limiti di funzionamento, legati al fatto che la sonda deve essere completamente immersa nel mezzo in cui vanno effettuate le misure, ed inoltre le componenti del vettore velocità vengono valutate all’interno di un volumetto di controllo posto all’incirca a 5 cm più in basso rispetto alla sonda stessa. Questi vincoli comportano che, in sostanza, le misure possano essere eseguite soltanto per altezze idriche superiori a 7 – 8 cm, valori raggiunti nella vasca in prossimità della traversa, e soltanto per le portate più elevate.

### **4.3 Prove Sperimentali**

#### **4.3.1 Obiettivo dello studio sperimentale e formulazione del problema**

Lo studio sperimentale è stato condotto allo scopo di acquisire le misure delle grandezze significative del moto, al fine di confrontare i valori misurati con quelli risultanti dalle simulazioni numeriche effettuate con il codice di calcolo Flow – 3D, che sono discusse nel successivo Capitolo 5.

#### **4.3.2 Procedura di svolgimento delle prove sperimentali**

- a) Le prove eseguite in laboratorio sono state eseguite seguendo la procedura di seguito riportata:
- b) Rilevamento dello zero idrometrico dell'asta all'interno del cassone con lo stramazzo Thomson.
- c) Rilevamento dello zero idrometrico del piezometro collegato al cassone.
- d) Rilevamento dello zero del trasduttore di pressione Druck (quota della prima soglia).
- e) Rilevamento dello zero (quota della prima soglia) attraverso l'asta idrometrica .
- f) Immissione dell'acqua nel cassone dello stramazzo Thomson
- g) Lettura della portata attraverso l'elettromagnetico.
- h) Controllo della vena d'acqua stramazante dal Thomson.
- i) Attesa per un tempo di circa 15 minuti per la stabilizzazione del livello d'acqua nel piezometro collegato allo stramazzo Thomson.
- j) Lettura del piezometro collegato allo stramazzo Thomson.
- k) Valutazione della portata attraverso l'altezza idrica ricavata dallo stramazzo Thomson.
- l) Controllo del comportamento della corrente liquida nel passaggio attraverso la luce di fondo per verificare la presenza o meno del risalto e di eventuali anomalie.
- m) Attesa, per un tempo variabile da 25 minuti a circa 1 ora, per rilevare la lettura il carico a monte della traversa con il trasduttore di pressione.
- n) Lettura dell'altezza d'acqua a monte della traversa con il trasduttore di pressione.
- o) Lettura dell'altezza idrica a monte della traversa attraverso l'asta idrometrica.
- p) Elaborazione dei dati per ricavare il coefficiente d'efflusso.

### ***4.3.3 Descrizione delle fasi più importanti della procedura***

#### ***4.3.3.1 Rilevamento zero idrometrico nello stramazzo Thomson e nel piezometro***

Nel seguito si riporta un esempio delle operazioni eseguite per rilevare lo zero idrometrico dello stramazzo e del piezometro. Si è rilevata la posizione del vertice attraverso l'asta idrometrica munita di nonio, trovando 37,77 cm; si è determinato poi, facendo scorrere l'asta, la posizione della superficie liquida a circa 50 cm dal vertice stesso, trovando 38,29 cm; dal confronto dei due valori rilevati si è riscontrato un dislivello della superficie liquida rispetto al vertice dello stramazzo di 0,52 cm. Con il piezometro, posizionato a circa 50 cm dalla parete in cui è sistemata la piastra dello stramazzo, è stata effettuata la lettura per un livello d'acqua corrispondente al vertice dello stramazzo pari a 34,92 cm.

Per ottenere lo zero, al valore della lettura piezometrica è stato sottratto il valore 0,52 cm in precedenza calcolato ottenendo quindi la misura di 34,40 cm.

#### ***4.3.3.2 Rilevamento zero idrometrico nel trasduttore di pressione e nell'asta idrometrica***

Il rilevamento dello zero del trasduttore di pressione è stato eseguito anch'esso all'inizio d'ogni giornata di prova, quando lo specchio liquido a monte della traversa nella cassa d'espansione era in una condizione di quiete.

Ogni volta che il modello è stato completamente svuotato, vista la sensibilità della membrana presente nell'estremità della sonda del trasduttore. Per evitare che possibili bolle d'aria presenti nella tubazione in PVC a cui essa è collegata potessero compromettere la misurazione, il collegamento tra la sonda e la tubazione è stato fatto a tubo pieno, con le dovute precauzioni, per impedire appunto la formazione di bolle. Dopo aver inserito la sonda, per rilevare lo zero è stata immessa acqua nel modello finché il livello idrico raggiungeva la quota della soglia della luce di fondo della traversa, poi si è atteso il tempo necessario (alcune ore) finché dalla luce di fondo della traversa non vi fosse più acqua che defluiva a valle. A questo punto si è agito manualmente sulla vite presente nella parte frontale dell'indicatore digitale di processo Druck azzerando il display e verificando che il valore visualizzato subito dopo non subisse oscillazioni rilevanti.

Il rilievo dello zero nell'asta idrometrica richiede che nel livello idrico a monte della traversa vi siano le stesse condizioni richieste per valutare lo zero con il trasduttore, pertanto è stato effettuato subito dopo questa misurazione.

In pratica, la stima dello zero nella prima prova è stata eseguita facendo scorrere l'asta, montata sul ponte situato in corrispondenza della traversa, fino a quando la punta idrometrica sfiorava l'estremità superiore della soglia della luce di fondo della traversa; in queste condizioni è stato azzerato il display collegato all'asta idrometrica, poi facendo scorrere l'asta e posizionandola a 50 cm a monte della traversa, al di sopra del punto in cui s'intravedeva il foro di collegamento con il trasduttore di pressione, è stata eseguita una seconda misurazione, che si confrontata con la prima. Qualora le misure non risultassero vicine entro un decimo di mm, si rettificava la posizione delle guide fino ad ottenere il parallelismo tra queste e la superficie liquida.

#### ***4.3.3.3 Valutazione della portata attraverso l'altezza d'acqua ricavata dallo stramazzo Thomson***

Una volta rilevati gli zeri, è stata attivata la pompa n° 2 e aperta la saracinesca situata sulla condotta di mandata in modo da immettere dell'acqua nel cassone dello stramazzo Thomson. Per avere una prima stima del valore della portata immessa, si leggevano i valori di forniti dal display dell'elettromagnetico. Si controllava quindi la vena d'acqua stramazante dallo stramazzo Thomson, soprattutto nelle misurazioni eseguite per valori bassi di portata, in modo da assicurare che essa fosse distaccata dallo spigolo a monte dello stramazzo. Per portate minori del valore di 1.3 l/s si verificava l'aderenza della vena alla parete e le relative portate non sono state misurate.

La lettura del piezometro collegato al cassone dello stramazzo Thomson è stata eseguita dopo un'attesa di circa 15 – 20 minuti e, per essere certi della stabilizzazione del livello d'acqua all'interno del cassone, sono state effettuate misure consecutive fino a ottenere valori successivi coincidenti.

Il valore del carico  $h_{Th}$  allo stramazzo Thomson, in ogni prova, è stato quindi ricavato sottraendo alla lettura del piezometro il valore dello zero idrometrico (34,40 cm) precedentemente ricavato.

Il carico  $h_{Th}$  è stato introdotto nella relazione del coefficiente d'efflusso  $\mu_{Th}$  data dall'eq. (4.1) e la portata in uscita dallo stramazzo Thomson è stata valutata con il

valore del coefficiente d'efflusso  $\mu_{Th}$  calcolato nella relazione (4.2).

#### ***4.3.3.4 Valutazione dell'altezza idrica a monte della traversa***

Dopo aver constatato che, all'interno del modello, all'aumentare delle portate effluenti dallo stramazzo Thomson, la superficie liquida risultava essere notevolmente perturbata, è stato opportuno inserire una griglia nel punto in cui la corrente sversata dallo stramazzo si immette nella vasca d'espansione, in modo da favorire una dissipazione d'energia e quindi una riduzione dei tempi d'attesa per la stabilizzazione del livello liquido.

Dopo un'attesa, per un tempo variabile da 30 a circa 55 minuti, è stato rilevato il valore minimo  $h_{Tr \ min}$  e il massimo  $h_{Tr \ max}$  dell'altezza d'acqua dal trasduttore di pressione mediante l'indicatore digitale di processo. Al valore  $h_{Tr}$  ottenuto dalla media tra il minimo e massimo è stato poi sottratto il valore dello zero del trasduttore, che, per tutte le prove, è risultato pari a circa 600 Hz.

Quasi contemporaneamente, a monte della traversa, è stata eseguita anche la misura con l'asta idrometrica posizionata sul ponte. La misura è stata condotta in corrispondenza dello stesso punto in cui è stato rilevato lo zero e per verificarne la precisione è stata ripetuta più volte.

La misura  $h_{Tr}$ , eseguita con il trasduttore è stata poi confrontata con quella rilevata dall'asta idrometrica e i due valori sono risultati coincidenti.

## CAPITOLO 5

# IMPLEMENTAZIONE DEL MODELLO NUMERICO E VERIFICA DEI RISULTATI OTTENUTI

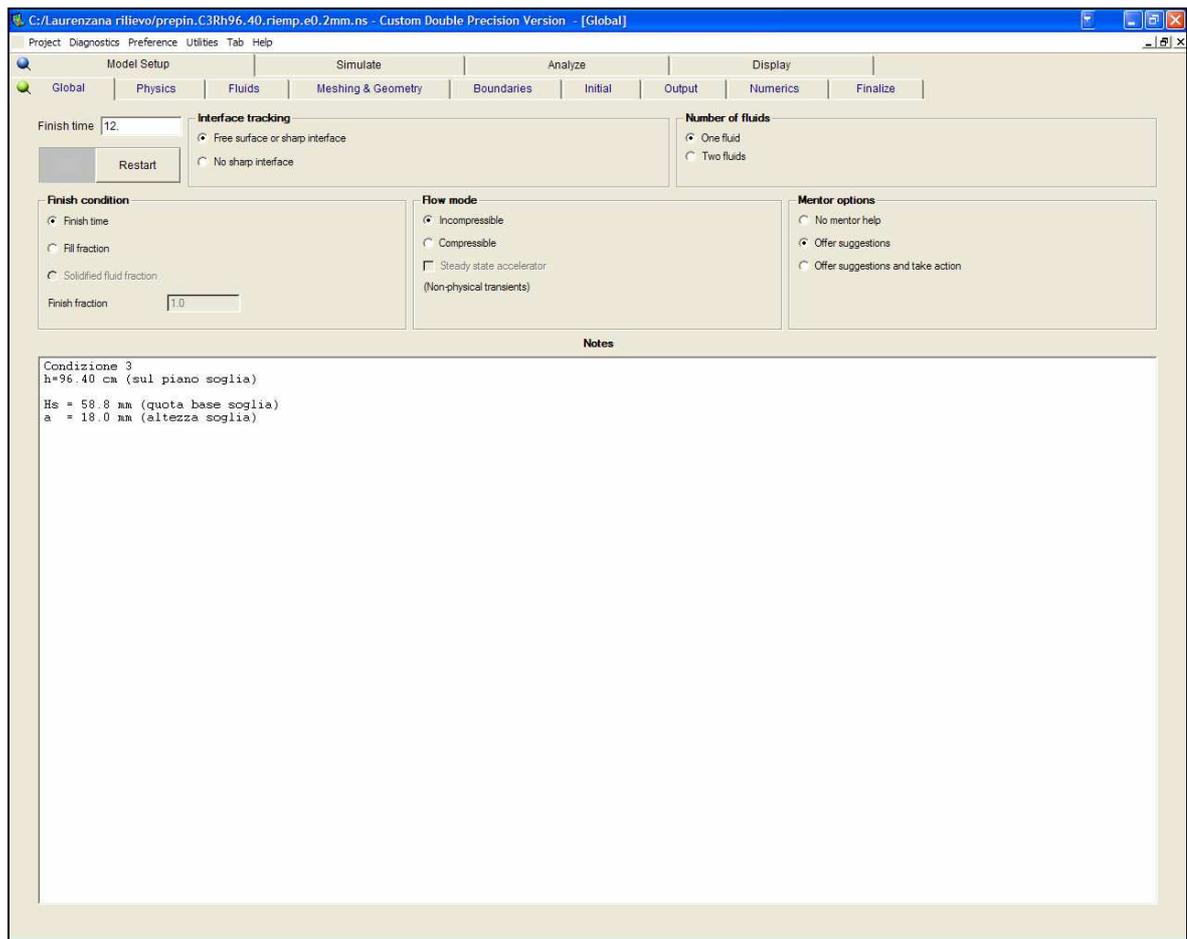
### 5.1 Implementazione con il codice Flow – 3D

Per le simulazioni numeriche del fenomeno oggetto di studio è stato utilizzato il modello di fluidodinamica computazionale FLOW-3D della *Flow Science Inc. (USA)*, che permette la risoluzione delle equazioni di Navier Stokes in campo turbolento con un codice di calcolo ai volumi finiti (VOF). I risultati numerici sono stati quindi verificati con i dati rilevati nell'istallazione di laboratorio descritta nel precedente Cap. 4.

Il programma ha una agevole interfaccia windows, consentendo di inserire tutte le informazioni necessarie attraverso numerose finestre alle quali accedere a partire dalla schermata principale.

#### 5.1.1 *Model Setup*

Una volta predisposto il modello fisico si accede al programma, inserendo tutte le necessarie informazioni nelle diverse sezioni (*Global, Physics, Fluids, Meshing&Geometry, Boundaries, Initial, Numerics*) che compaiono nella schermata principale (*Fig. 5.1*), e che vengono di seguito descritte sinteticamente.



**Fig.5.1** Codice Flow – 3D. Schermata Funzione “Model Setup”.

### 5.1.1.1 Model Setup

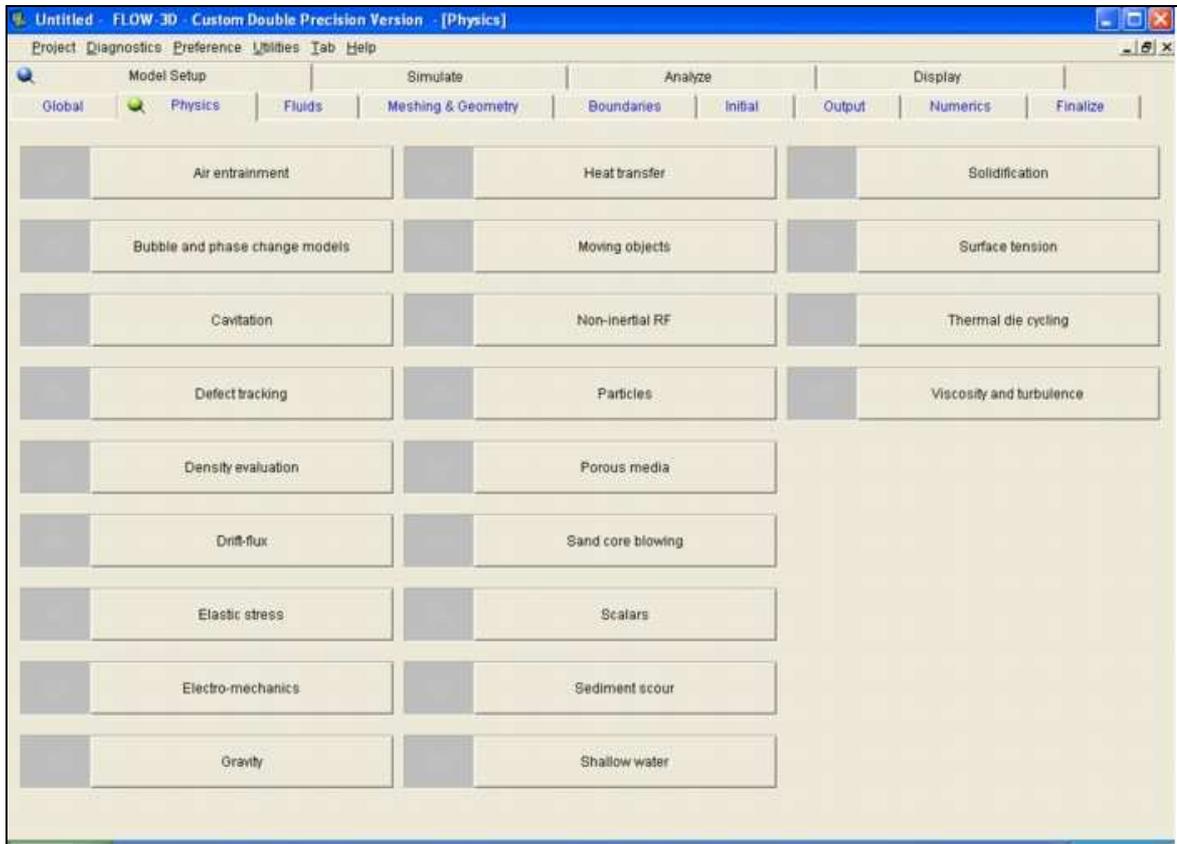
In questa finestra Si imposta la durata della simulazione. Si assegnano inoltre la condizione di fine della simulazione, che si è fatta coincidere con la medesima durata, e la condizione di incomprimibilità o meno del fluido, optando per la prima. Si deve infine indicare se la corrente è a superficie libera oppure no.

### 5.1.1.2 Physics (Proprietà fisiche)

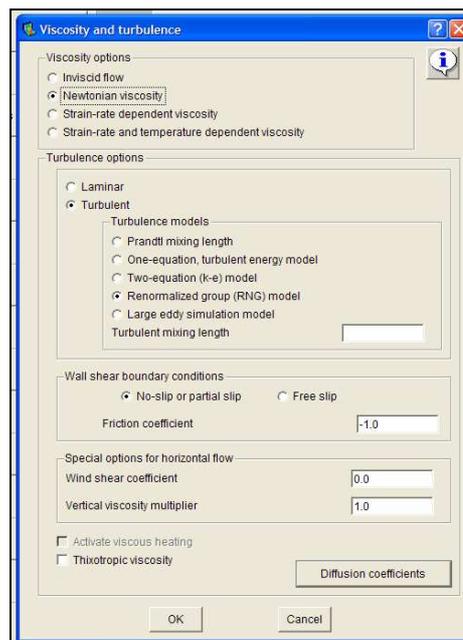
La schermata, riportata in Fig. 5.2a, permette di accedere a tutti i modelli fisici disponibili nel codice. Ad ognuna delle voci è associato uno o più finestre attraverso le quali si possono inserire le necessarie informazioni.

In questa sede sono state considerate l’accelerazione di gravità (*Gravity*), e la viscosità (*Viscosity and Turbulence*), attraverso la finestra rappresentata in Fig. 5.2b, nella quale si può scegliere di ipotizzare il fluido perfetto (*inviscid*), opzione a cui corrisponde

automaticamente la condizione di moto laminare, ovvero, come nel presente lavoro, selezionare un valore della viscosità.



*Fig.5.2a* Codice Flow – 3D. Schermata Funzione “Physics”.



*Fig.5.2b* Codice Flow – 3D. Schermata Funzione “Physics – Viscosity and Turbulence”.

Selezionando la viscosità, e quindi considerando il comportamento del fluido reale, bisogna scegliere un opportuno modello di turbolenza tra i cinque presenti all'interno del codice (*Prandtl mixing length; One equation, turbulent energy model; Two equation ( $k - \epsilon$ ) model; Renormalized group (RNG) model; Large Eddy Simulation (LES) model*).

Nel presente lavoro è stato adoperato il modello *RNG*.

In questa sezione devono inoltre essere specificate le condizioni di attrito alla parete (*Wall shear boundary conditions*).

Come regola generale a tutti i corpi rigidi e alle superfici non confinate sono assegnate condizioni al contorno a scivolamento libero (*free slip boundaries*), quindi vengono considerate come superfici con tensione tangenziale nulla. Questa condizione viene realizzata imponendo pari a zero tutte le derivate della velocità che vengono calcolate utilizzando una o più componenti di velocità dalle superfici delle celle non attraversate dalla corrente.

Le condizioni di non scivolamento (*no-slip*) sono imposte utilizzando una opportuna opzione di tensione tangenziale di attrito.

#### ***5.1.1.3 Fluids (Selezione dei fluidi nel sistema)***

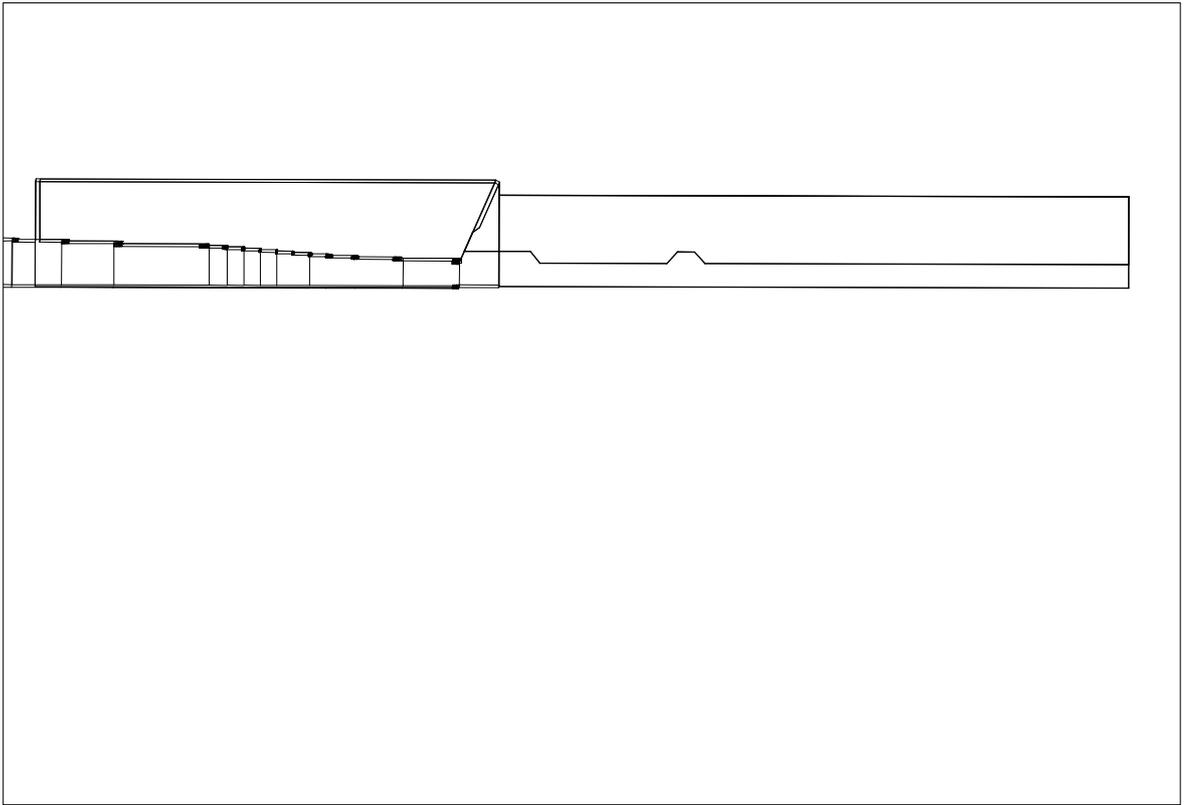
Questa sezione consente di definire le proprietà dei fluidi adoperati, ricorrendo al database disponibile ovvero definendo nuovi fluidi.

#### ***5.1.1.4 Meshing and geometry (Definizione della mesh e della geometria)***

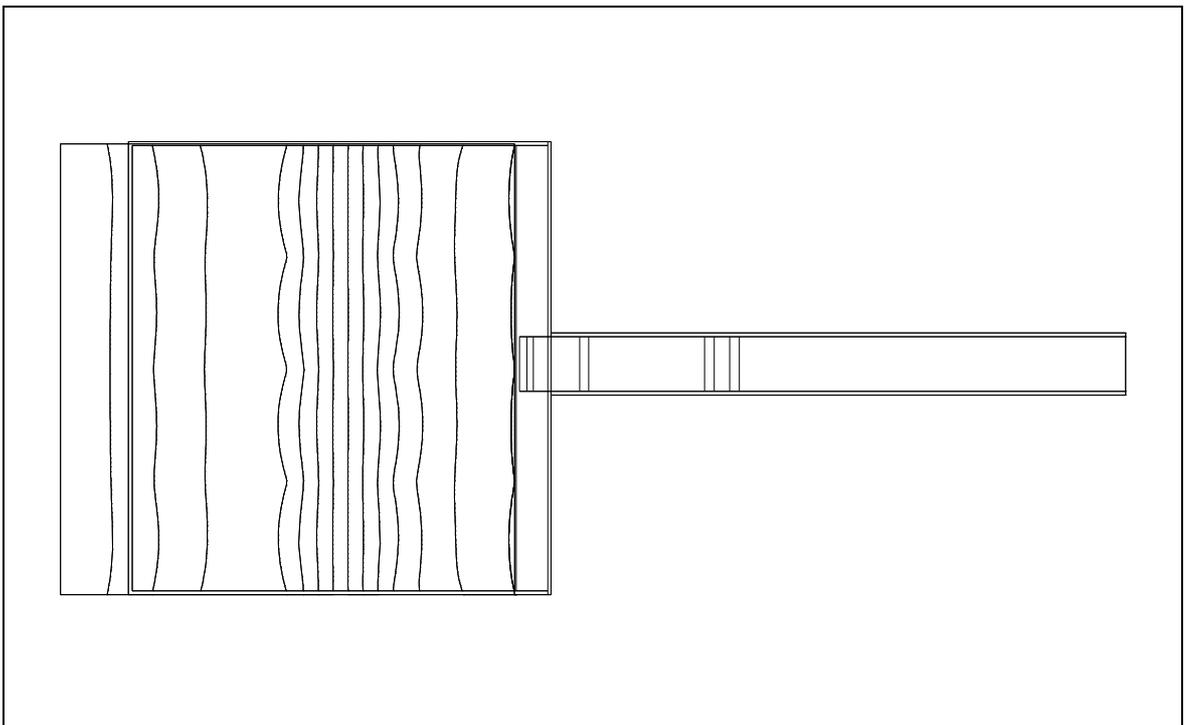
Si tratta della sezione più complessa, nella quale bisogna inserire la geometria del sistema fisico e definire il dominio di calcolo.

Il primo problema può essere affrontato utilizzando l'editor grafico interno al codice stesso, oppure importando la geometria dall'esterno. In questa sede si è proceduto innanzitutto a generare il modello in ambiente CAD, e successivamente lo si è convertito in formato *\*.stl* e quindi importato nel codice.

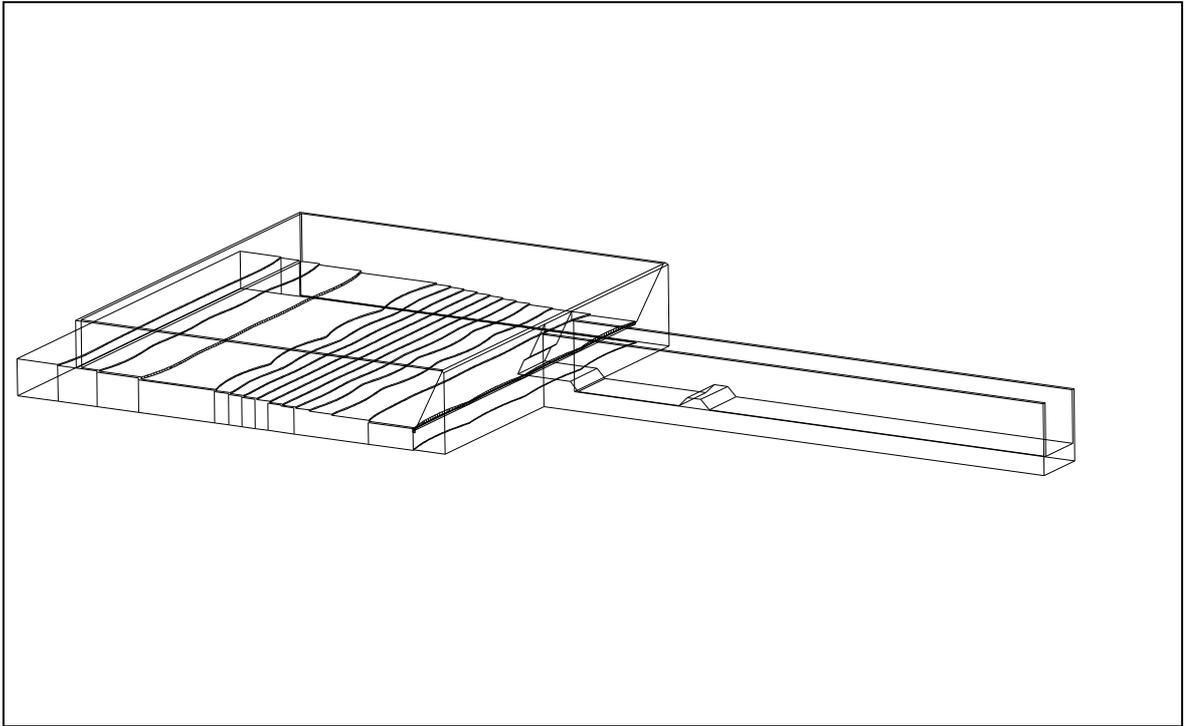
Stante la difficoltà di riprodurre il sistema fisico reale, si è scelto in questa sede di riprodurre un modello fisico approssimato, riproducendo il profilo del fondo rilevato sperimentalmente, ma considerando le pareti della vasca verticali. Il modello introdotto nel codice, pertanto, è caratterizzato da una pianta rettangolare di dimensioni 1.20m x 1.20m circa e da un profilo longitudinale del fondo variabile (*Figg. 5.3 – 5.5*).



*Fig. 5.3. Modello fisico. Sezione longitudinale*



*Fig. 5.4. Modello fisico. Pianta*



*Fig. 5.5. Modello fisico. Vista 3D*

Una volta definita la geometria del sistema è necessario costruire il dominio di calcolo definendo una opportuna *mesh* per la risoluzione discreta delle equazioni di Navier – Stokes.

Si è scelto di utilizzare due distinti blocchi di celle interconnessi tra loro.

Il primo (*block 1*) è situato all'interno della vasca e si estende fino a comprendere il paramento di valle della traversa. Il secondo (*block 2*) è inserito all'interno del canale, come indicato in *Fig. 5.6*.

In particolare tali blocchi hanno le proprietà descritte di seguito.

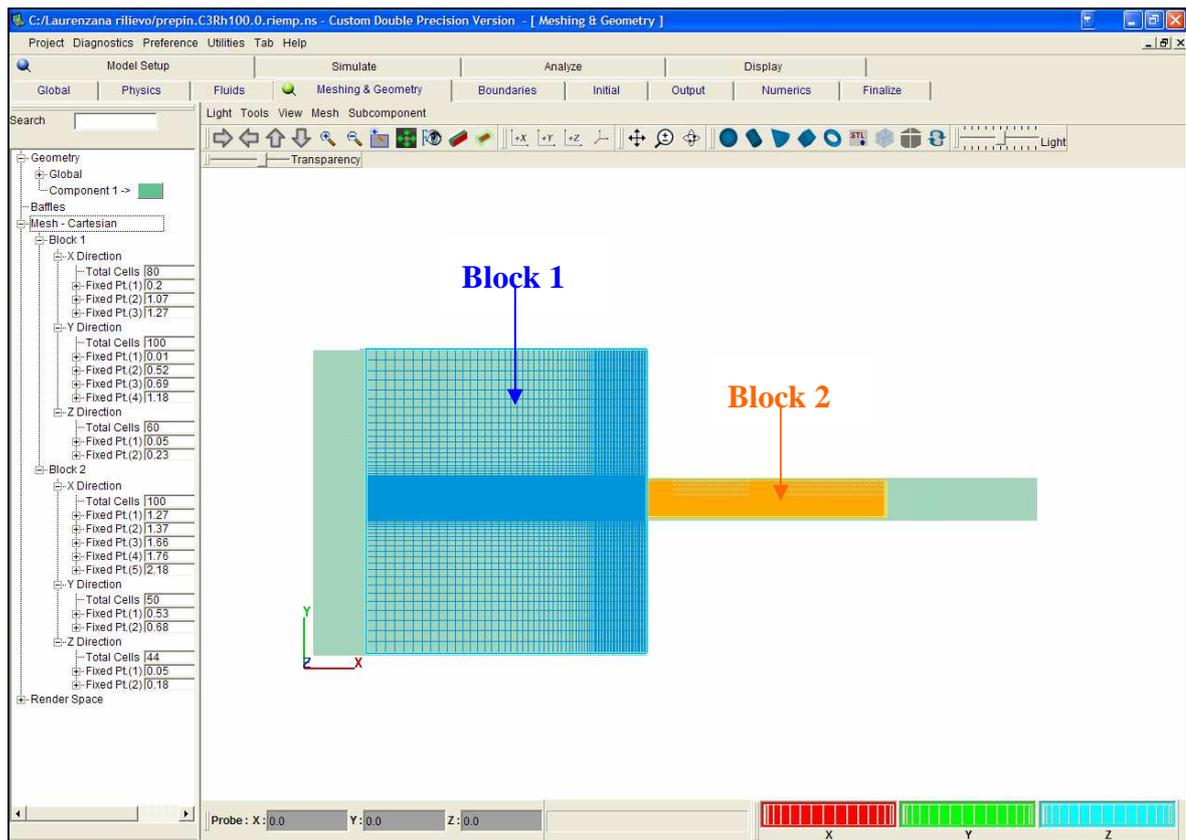


Fig. 5.6.. Modello numerico. Mesh di calcolo

- **Blocco 1:** Si estende per tutta la larghezza della vasca, a partire da 87 cm a monte del piede della soglia all'imbocco del canale, fino a circa metà della soglia stessa, dove si ritiene di poter individuare la sezione contratta di efflusso, per complessivi 107 cm di lunghezza; la larghezza del blocco di *mesh* è di 117 cm in totale. L'altezza del blocco di celle è diverso per ciascuna prova, allo scopo di ridurre i tempi di calcolo, limitando il dominio computazionale allo stretto necessario. Il numero totale di celle risulta pertanto dipendente dalle dimensioni della mesh. In ogni caso si è scelto di adoperare celle di dimensione costante lungo l'altezza  $z$ , variabile nelle altre due direzioni  $x$  e  $y$ , infittendo il passo nelle zone in cui si ritiene di aver bisogno di una accuratezza maggiore. In particolare, nella direzione trasversale al moto è stato infittito il passo  $\Delta y$  nella zona centrale del blocco, in corrispondenza della luce di fondo della traversa. Nella direzione del moto è stato invece infittito il passo  $\Delta x$  in corrispondenza della soglia all'imbocco della luce, a partire da una distanza di 10 cm dal piede della soglia fino alla fine del blocco medesimo. In tal modo si è pensato di definire con più precisione la griglia di calcolo per simulare con più accuratezza la corrente nella zona prossima all'imbocco del canale e l'efflusso attraverso la luce di fondo.

- Blocco 2: Si estende nel canale dall'estremità di valle del blocco 1, posta all'incirca a metà della soglia posta all'imbocco, per una lunghezza di 1 metro, sufficiente per far verificare, nella sezione più a valle, la condizione di moto stazionario; la larghezza del blocco coincide con quella del canale (14,2 cm), mentre l'altezza varia per ogni prova.

Nella tabella 5.1 sono riassunte le informazioni sulle mesh di calcolo utilizzate per tutte le simulazioni numeriche.

<b><math>h_{vasca}</math> (mm)</b>	<b>Blocco 1</b>				<b>Blocco 2</b>				<b>n. celle Totali</b>
	<b>nx</b>	<b>ny</b>	<b>nz</b>	<b>n. celle</b>	<b>nx</b>	<b>ny</b>	<b>nz</b>	<b>n. celle</b>	
36.40	80	100	27	216000	70	57	24	95760	311,760
45.80	80	100	34	272000	70	50	27	94500	366,500
52.90	80	100	40	320000	70	57	30	119700	439,700
61.83	80	100	40	320000	70	50	27	94500	414,500
71.90	80	100	44	352000	70	50	30	105000	457,000
89.50	70	100	50	350000	70	50	30	105000	455,000
96.40	80	100	57	456000	70	50	40	140000	596,000
105.0	80	100	54	432000	115	50	30	172500	604,500
110.0	80	100	60	480000	100	50	44	220000	700,000

*Tab. 5.1. Modello numerico. Mesh di calcolo nelle prove effettuate*

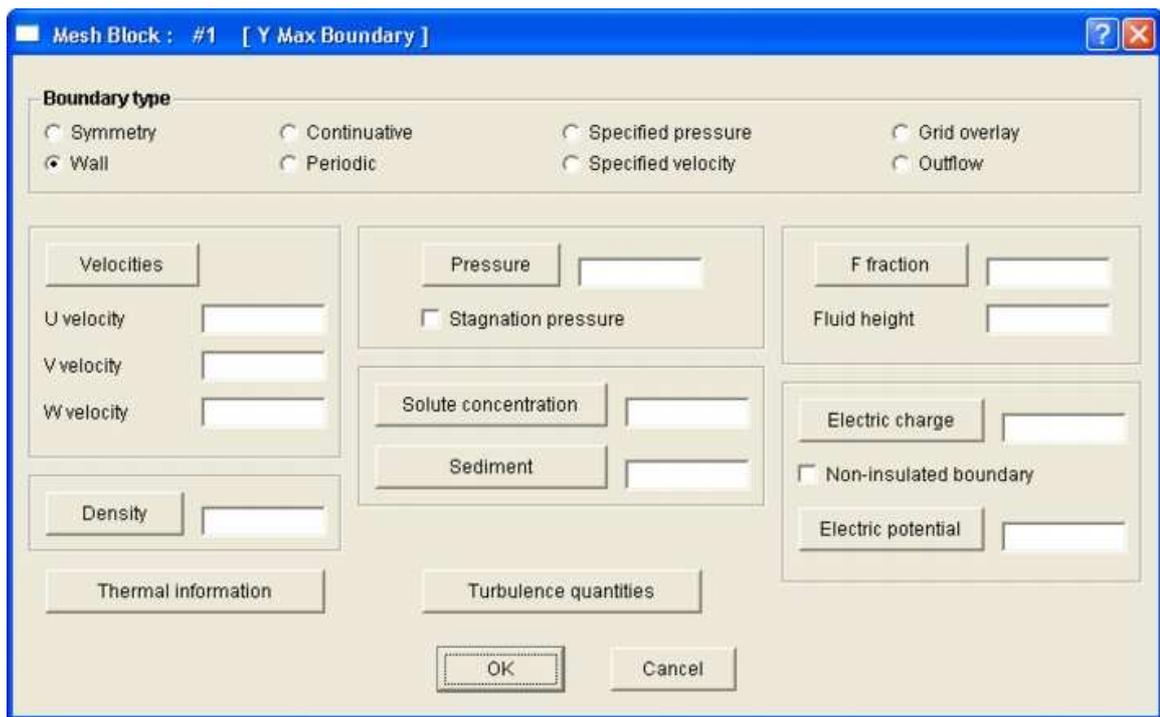
All'interno di questa sezione è possibile anche inserire informazioni sulla scabrezza superficiale del modello. Nel presente lavoro la scabrezza è risultata essere l'unico parametro per il quale è stata necessaria una taratura.

A seguito delle prove effettuate è stato ricavato il valore  $r = 0.5$  mm.

#### **5.1.1.5 Boundaries (Condizioni al contorno)**

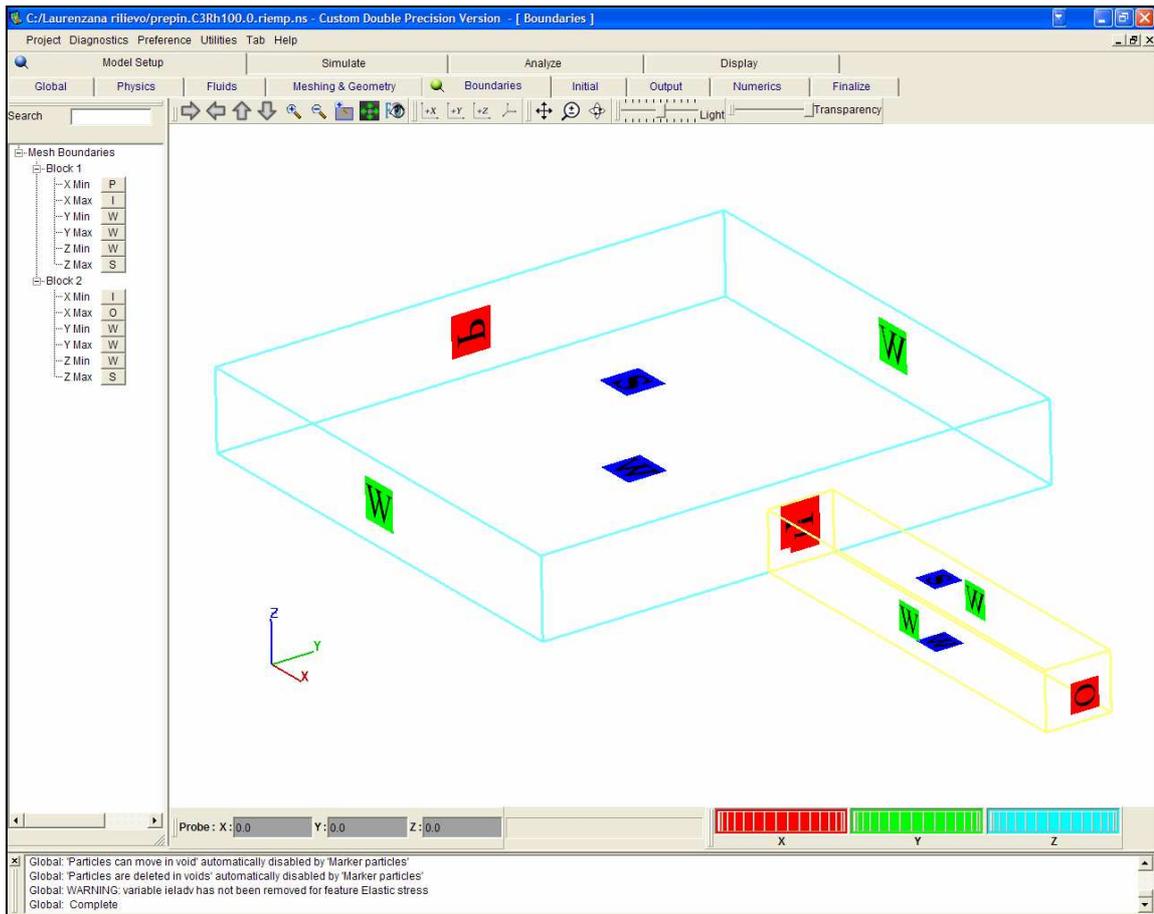
In questa sezione, illustrata in Fig. 5.7, vanno specificate le condizioni al contorno alle estremità della mesh di calcolo per ciascuno dei blocchi definiti in precedenza, con riferimento a velocità, pressione, altezza del fluido, ed altri parametri atti a descrivere le condizioni del fluido, definendo eventualmente una loro variazione nel tempo.

In particolare, per quanto riguarda la pressione, è possibile imporre una condizione di pressione statica, ovvero una pressione di ristagno (*stagnation pressure*), secondo quanto riportato nel cap. 3.



*Fig. 5.7. Modello numerico. Schermata Funzione “Boundaries”*

È possibile inoltre specificare il tipo di contorno, scegliendo tra gli otto presenti: *Symmetry*, *Wall*, *Continuative*, *Periodic*, *Specified pressure*, *Specified pressure*, *Specified velocity*, *Grid overlay*, *Outflow*. Utilizzando due o più blocchi di mesh interconnessi tra loro (come nel presente caso). in fase di pre-processing viene riassegnata automaticamente dal codice la condizione *inter-block*.



*Fig. 5.8. Modello numerico. Condizioni al contorno*

Nello specifico sono state adottate le seguenti condizioni al contorno, per il cui significato si rimanda al cap. 3.

#### Blocco 1

- $X_{min}$  = Pressione di ristagno (**P**)
- $X_{max}$  = Connessione inter – blocco (**I**)
- $Y_{min}$  = Parete solida (**W**)
- $Y_{max}$  = Parete solida (**W**)
- $Z_{min}$  = Parete solida (**W**)
- $Z_{max}$  = Condizione di simmetria (**S**)

#### Blocco 2

- $X_{min}$  = Connessione inter – blocco (**I**)
- $X_{max}$  = Outflow (**O**)
- $Y_{min}$  = Parete solida (**W**)
- $Y_{max}$  = Parete solida (**W**)
- $Z_{min}$  = Parete solida (**W**)
- $Z_{max}$  = Condizione di simmetria (**S**)

### 5.1.1.6 Initial (condizioni iniziali)

Dopo aver impostato le condizioni al contorno per la mesh di calcolo, è necessario definire le condizioni iniziali al tempo  $t = 0$  della simulazione numerica (Fig. 5.9)

Per le prove eseguite si è fatto riferimento a due differenti condizioni iniziali.

In primo luogo si è pensato di riprodurre una condizione idrostatica nella vasca, definendo un blocco di acqua in quiete compreso tra la sezione più a monte della vasca e il piede della soglia, immaginando di fatto una istantanea apertura della luce di fondo (Fig. 5.10).

A fronte delle risultanze delle simulazioni numeriche, come specificato in seguito, è stata successivamente imposta una seconda condizione iniziale, che simula l'apertura istantanea di una paratoia nella faccia più a monte del modello (Fig. 5.11); poiché vi è un volume vuoto tra questa e la traversa, tale condizione dovrebbe permettere uno smorzamento delle oscillazioni in vasca.

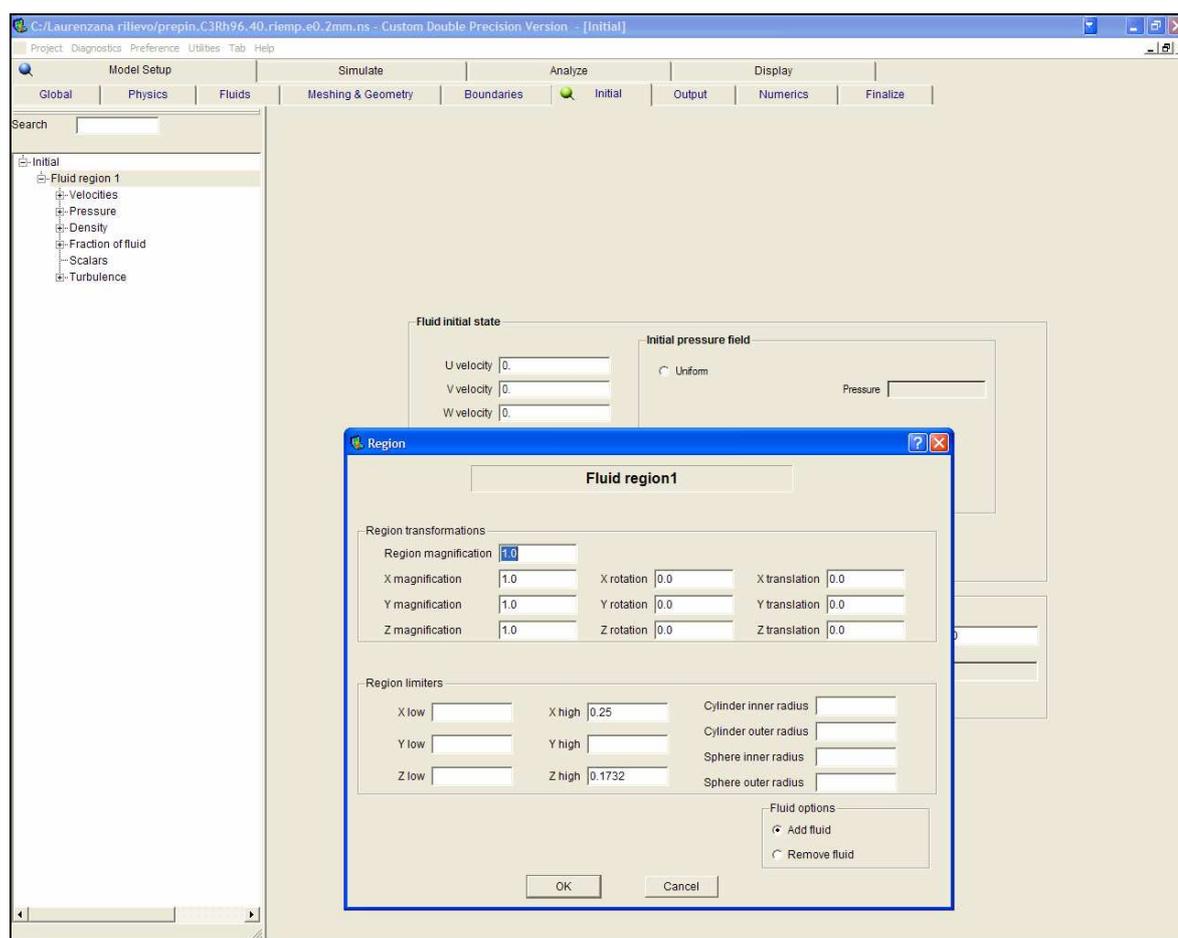
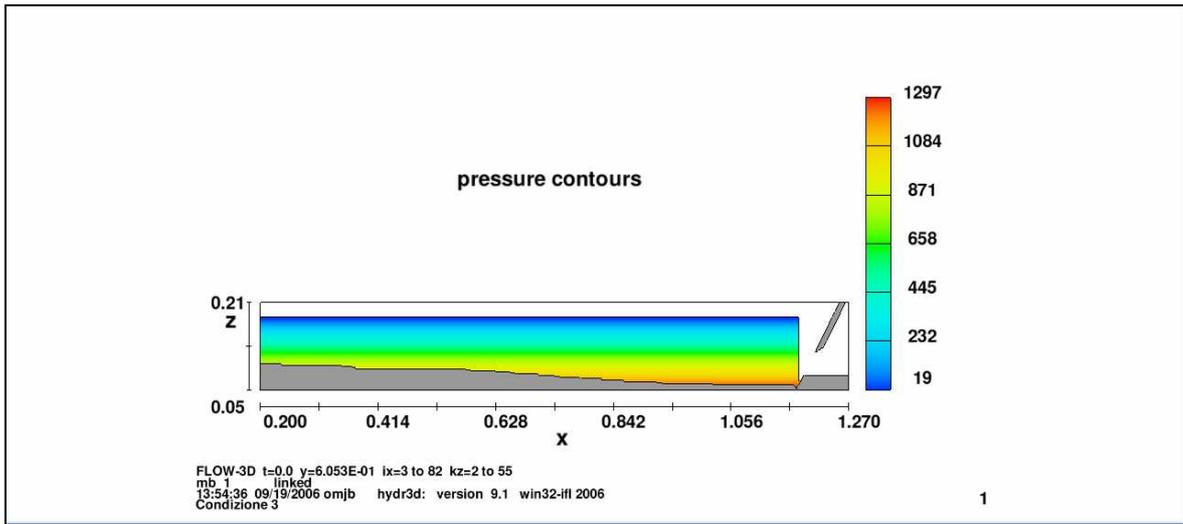
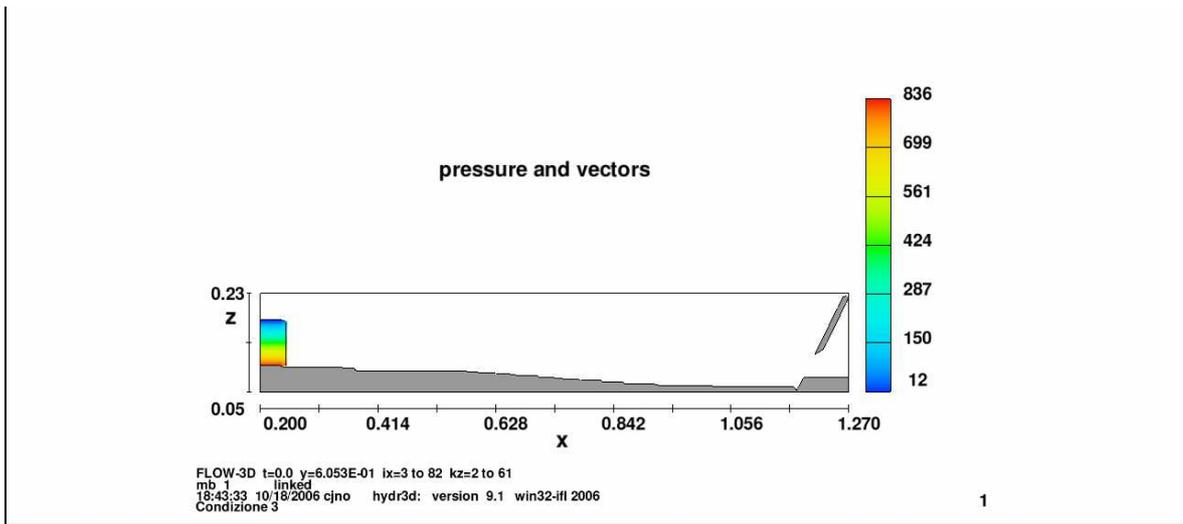


Fig. 5.9. Modello numerico. Condizioni iniziali



*Fig. 5.10. Modello numerico. Condizione iniziale idrostatica*



*Fig. 5.11. Modello numerico. Condizione iniziale con riempimento graduale*

### 5.1.1.7 Numerics (*Impostazioni del modello numerico*)

In questa finestra (*Fig. 5.12*) il programma consente di definire gli algoritmi di risoluzione e i controlli sul passo di integrazione temporale e sulla stabilità.

#### *- Time Step Controls*

In questa finestra possono essere definiti i passi temporali iniziale, minimo e massimo. In generale, tuttavia, è inutile specificare questi valori.

#### *- Pressure Solver Options*

Questa funzione permette di scegliere lo schema per l'iterazione della pressione (Cap. 3). Il tasto dei comandi di convergenza apre una finestra di dialogo che permette all'utente di controllare i parametri di convergenza.

#### *- Explicit/Implicit Solver Options*

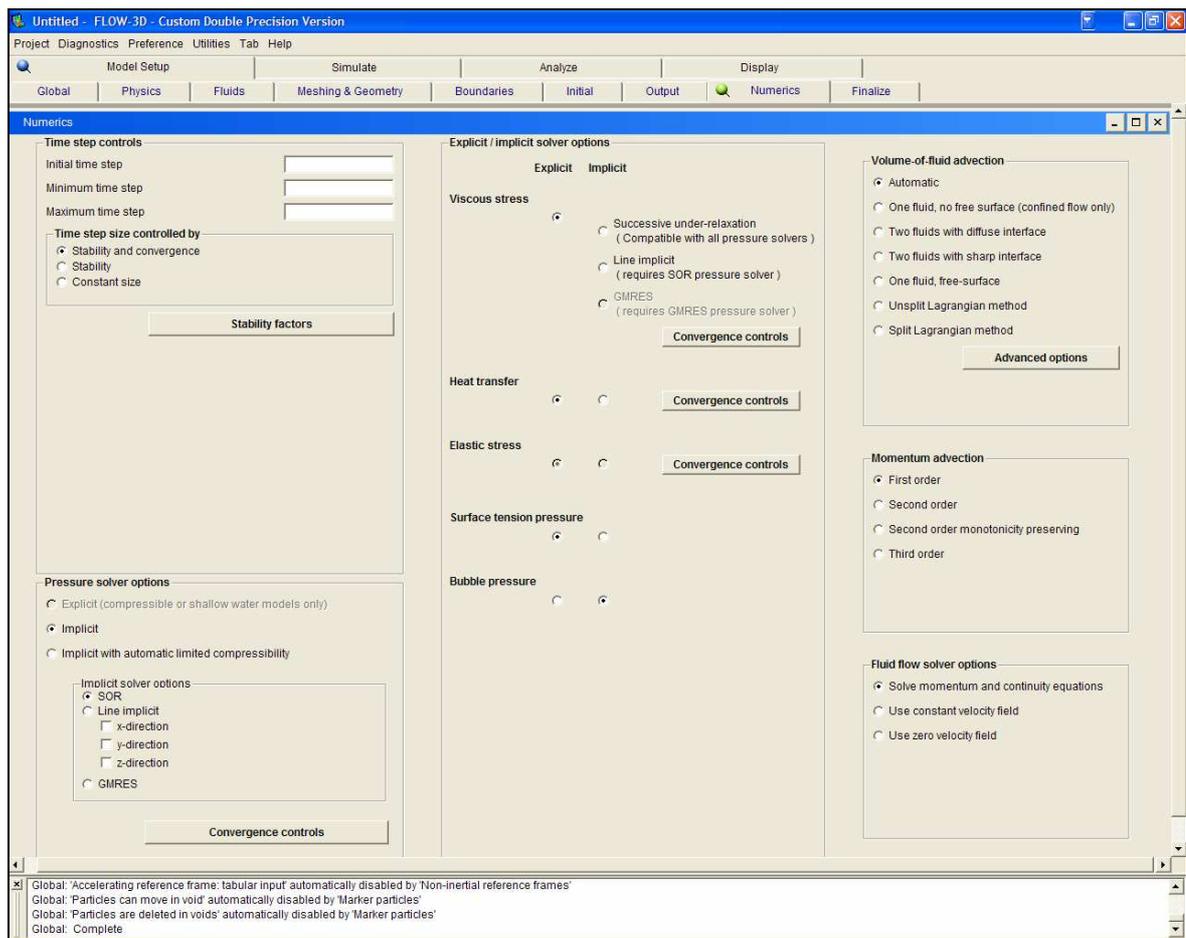
In questa finestra si possono cambiare le opzioni numeriche associate a grandezze quali, ad esempio, la viscosità, lo scambio di calore, lo sforzo elastico e la tensione superficiale. Appositi comandi consentono di selezionare i risolutori espliciti o impliciti e, per quanto riguarda la viscosità, scegliere fra tre opzioni per la valutazione implicita della tensione viscosa. I comandi di "controllo della convergenza" permettono di modificare, se necessario, i test di verifica di convergenza di default, quando sono selezionate le opzioni implicite.

#### *- Volume of Fluid Advection*

Sette *radio button* consentono di selezionare il tipo di metodo *VOF* in base al tipo di interfaccia presente e del numero di fluidi nel sistema.

#### *- Momentum advection group*

In questa sezione si seleziona il tipo di approssimazione dell'equazione della quantità di moto, che può essere del primo, secondo e terzo ordine.



*Fig. 5.12. Modello numerico. Schermata “Numerics”*

## 5.2 Simulazioni numeriche

### 5.2.1 Risultati numerici

Le simulazioni numeriche sono state eseguite utilizzando un computer parallelo biprocessore doppio Xeon HP Workstation XW 8000.

I tempi di calcolo necessari per lo svolgimento delle simulazioni sono risultati molto variabili in dipendenza sia della mesh di calcolo che, seppure in maniera meno evidente, della durata stabilita per ciascuna prova. Al crescere della griglia di calcolo e della durata della prova corrisponde conseguentemente una maggiore dimensione del file di output.

La durata delle prove è stata imposta pari a 12 secondi per tutte le prove, tranne una la cui durata è stata posta pari a 10 secondi. È stata inoltre eseguita una prova con durata estesa fino a 26 secondi. Il dominio di calcolo per la prova caratterizzata dalla portata più elevata e dal livello maggiore in vasca è risultato composto da 700.000 celle, di cui 480.000 nella

vasca e 220.000 nel canale a valle. Per le altre prove, caratterizzate da livelli inferiori, si è cercato di diminuire il numero di celle, pur se l'ordine di grandezza è rimasto sostanzialmente invariato.

I tempi necessari all'esecuzione delle simulazioni numeriche sono risultati variare dalle 48 ore circa a 7 giorni per tutte le prove eseguite, ad eccezione della prova con durata pari a 26 secondi, che ha impiegato circa 10 giorni per arrivare a compimento.

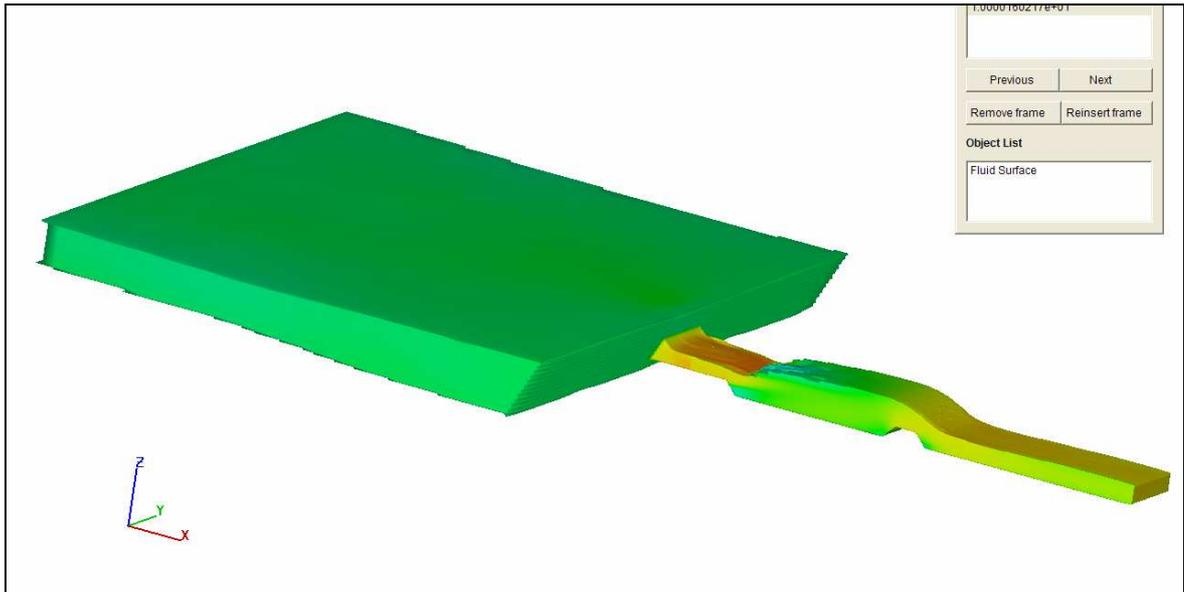
L'analisi delle soluzioni ha riguardato innanzitutto il calcolo della portata, che è stata valutata nella sezione più a valle del dominio di calcolo nel canale, ad 1 m circa a monte della luce di fondo della traversa.

Sono state quindi acquisite le velocità, le pressioni ed i livelli idrici all'interno sia della vasca che del canale.

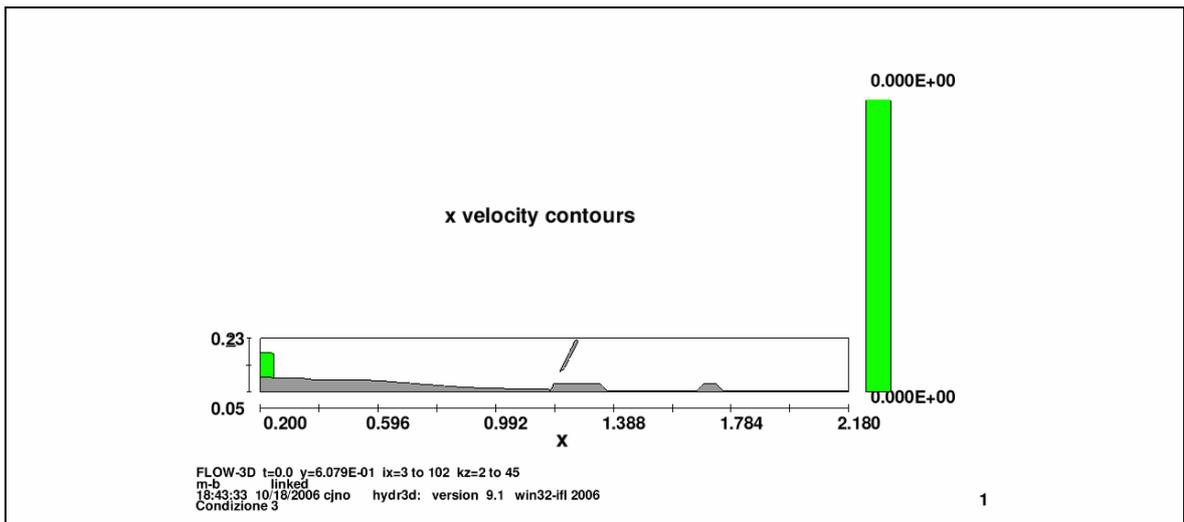
I riscontri con il modello hanno riguardato, come già detto, l'osservazione delle medesime grandezze, al fine di verificare la rispondenza dei risultati numerici delle elaborazioni.

In conclusione: il modello ha dimostrato di poter rappresentare il fenomeno nelle sue linee essenziali, facendo uso di un minimo numero di parametri (scabrezza). La curva portate-livelli viene riprodotta correttamente, salvo fenomeni di oscillazione dovuti ai ridotti tempi di calcolo. Non è stato possibile, per limiti dell'installazione sperimentale e per la lunghezza dei tempi di calcolo, ottenere più approfonditi riscontri, in particolar modo, sulle componenti di velocità.

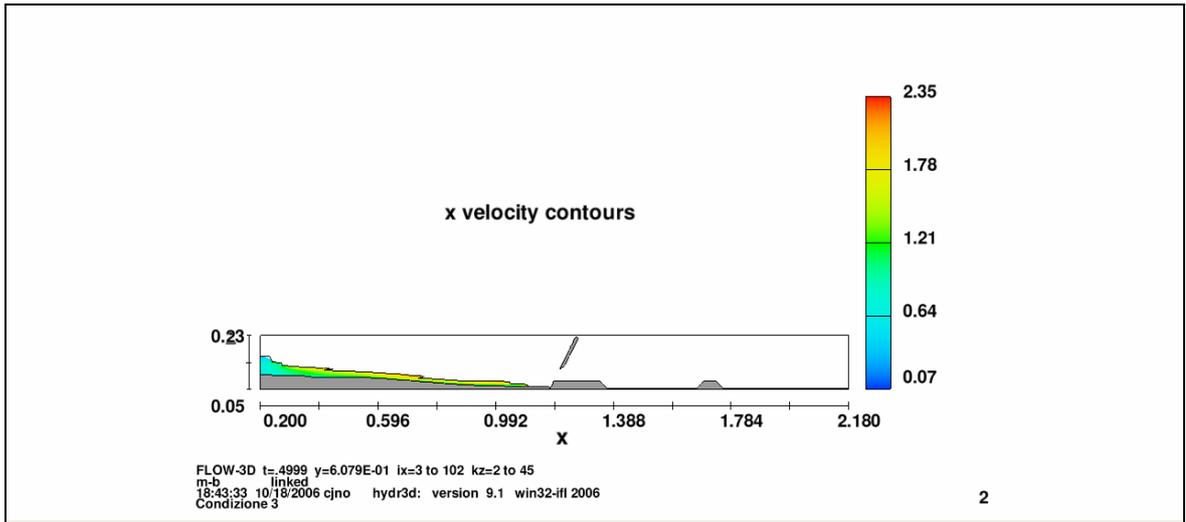
Sono state eseguite in tutto 13 simulazioni numeriche con il codice Flow – 3D, che hanno consentito di ottenere i livelli, le pressioni e il campo di velocità a intervalli di tempo prefissati. Nel seguito si riportano, per la sola prova con  $h = 105.0 \text{ mm}$ , la raffigurazione 3D del modello all'istante finale della simulazione (*Fig. 5.13*), e la rappresentazione, ai diversi istanti, dell'andamento della corrente nella sezione longitudinale corrispondente alla mezzeria del modello (*Figg. 5.14a- l*).



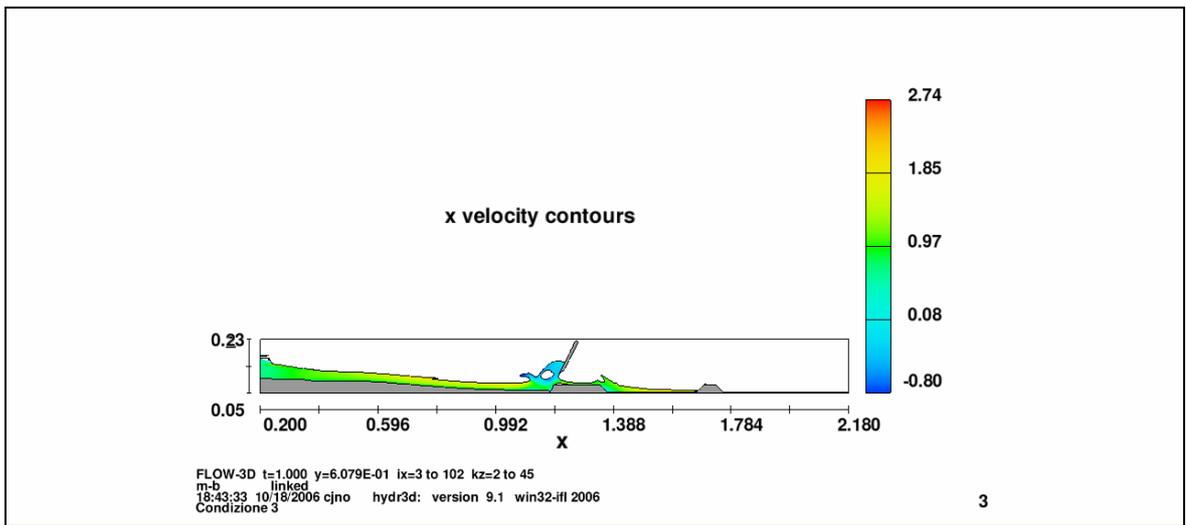
**Fig. 5.13.** Modello numerico. Prova con  $h=105.0$  mm. Istante finale della simulazione. Rappresentazione 3D



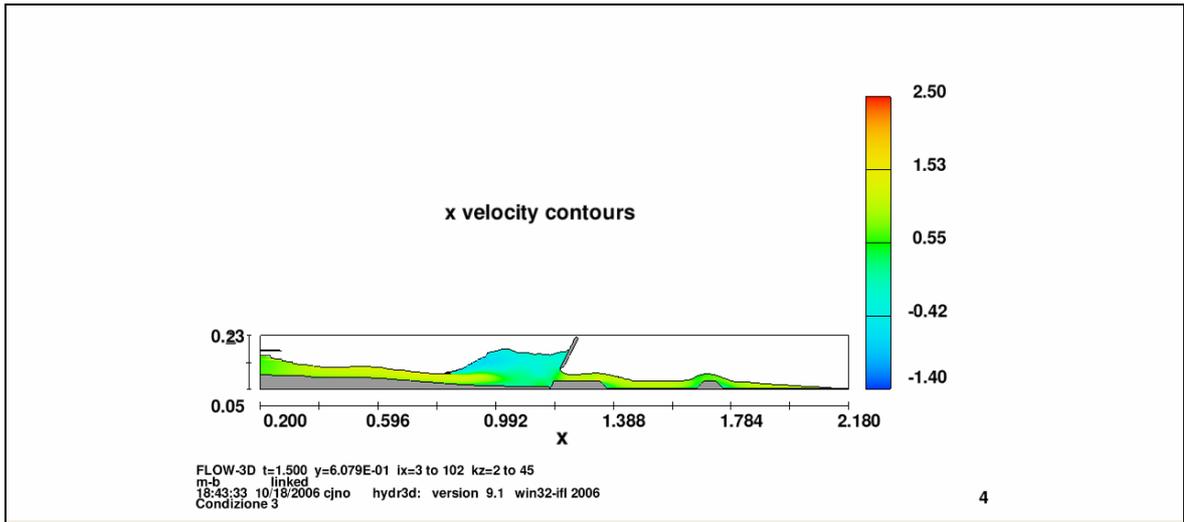
**Fig. 5.14a.** Modello numerico. Prova con  $h=105.0$  mm. Sezione longitudinale. Istante iniziale



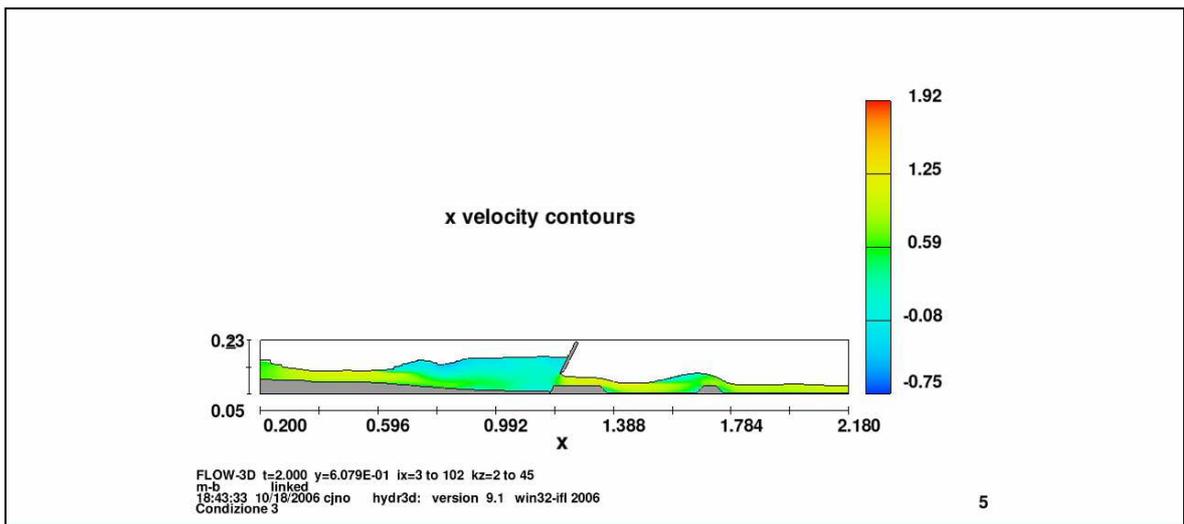
*Fig. 5.14b. Modello numerico. Prova con  $h=105.0$  mm. Sezione longitudinale.  $T = 0.5$  s*



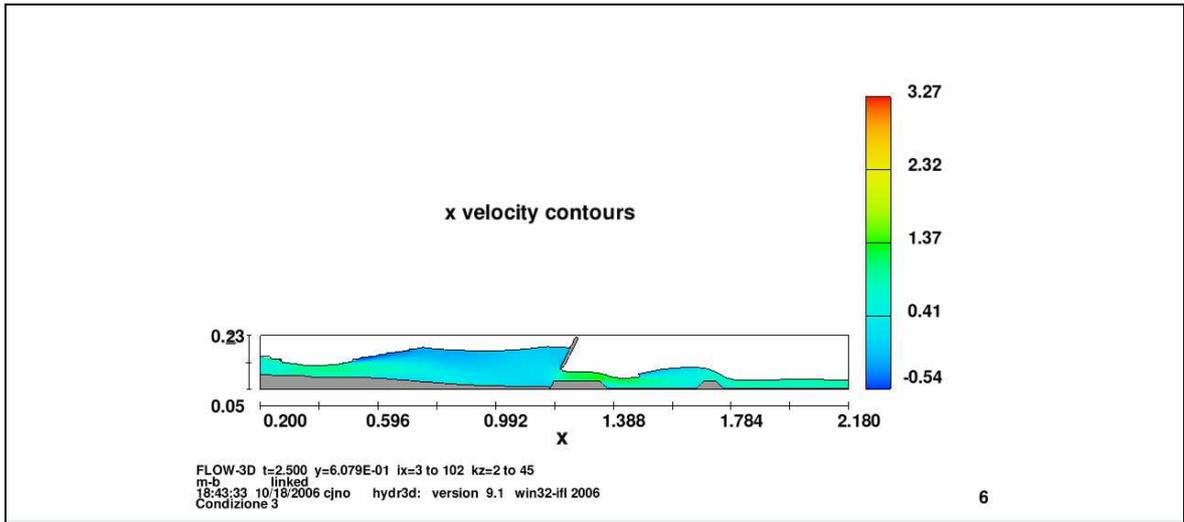
*Fig. 5.14c. Modello numerico. Prova con  $h=105.0$  mm. Sezione longitudinale.  $T = 1.0$  s*



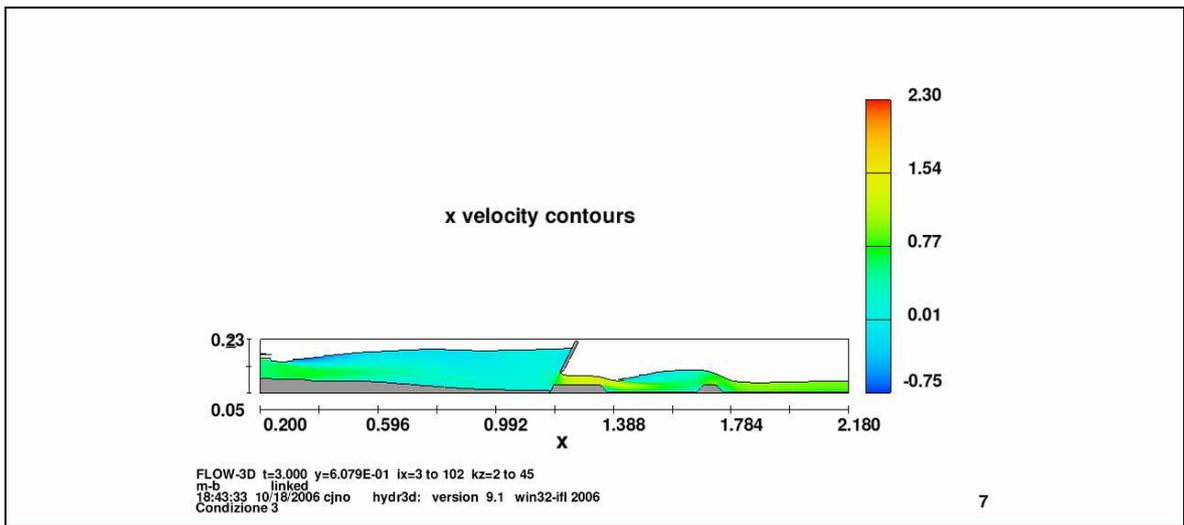
*Fig. 5.14d. Modello numerico. Prova con  $h=105.0$  mm. Sezione longitudinale.  $T = 1.5$  s*



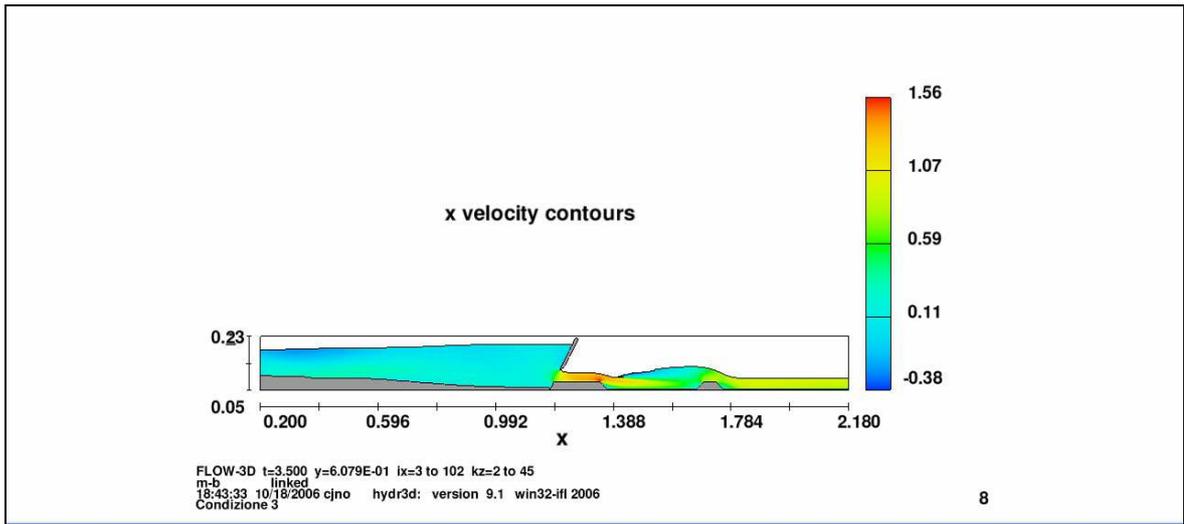
*Fig. 5.14e. Modello numerico. Prova con  $h=105.0$  mm. Sezione longitudinale.  $T = 2.0$  s*



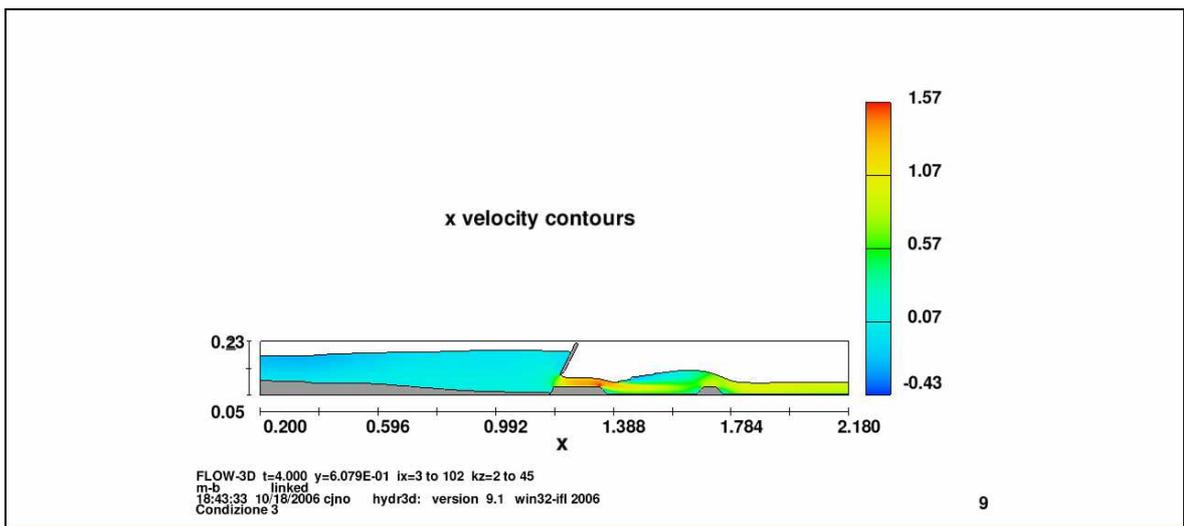
*Fig. 5.14f. Modello numerico. Prova con  $h=105.0$  mm. Sezione longitudinale.  $T = 2.5$  s*



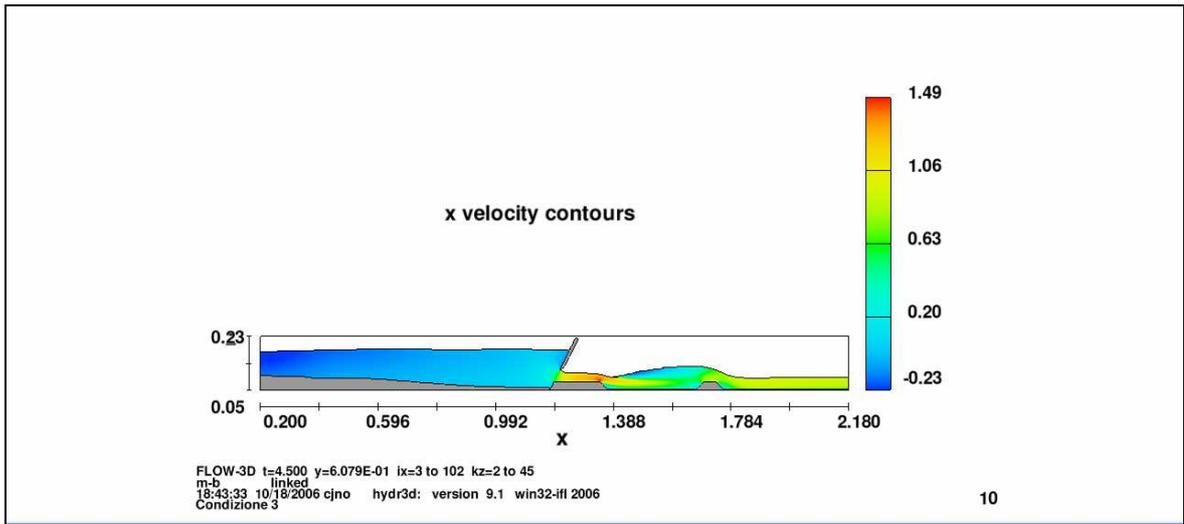
*Fig. 5.14g. Modello numerico. Prova con  $h=105.0$  mm. Sezione longitudinale.  $T = 3.0$  s*



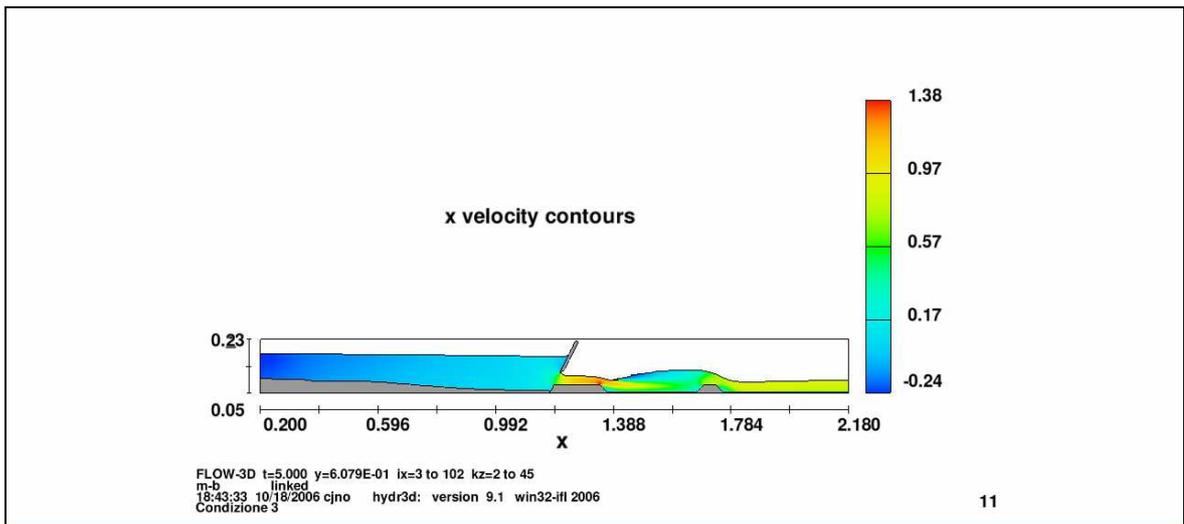
*Fig. 5.14h. Modello numerico. Prova con  $h=105.0$  mm. Sezione longitudinale.  $T = 3.5$  s*



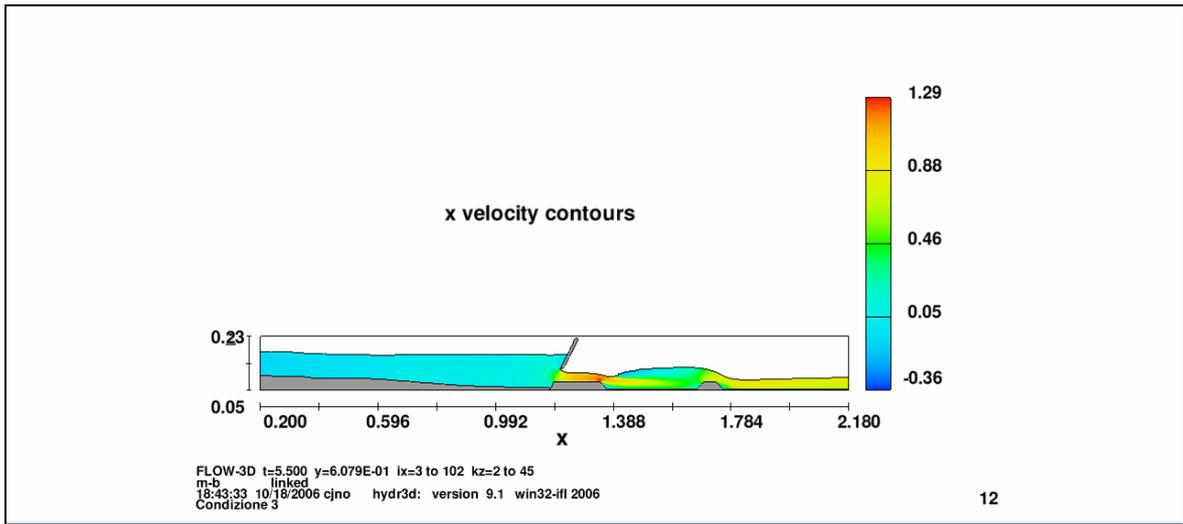
*Fig. 5.14i. Modello numerico. Prova con  $h=105.0$  mm. Sezione longitudinale.  $T = 4.0$  s*



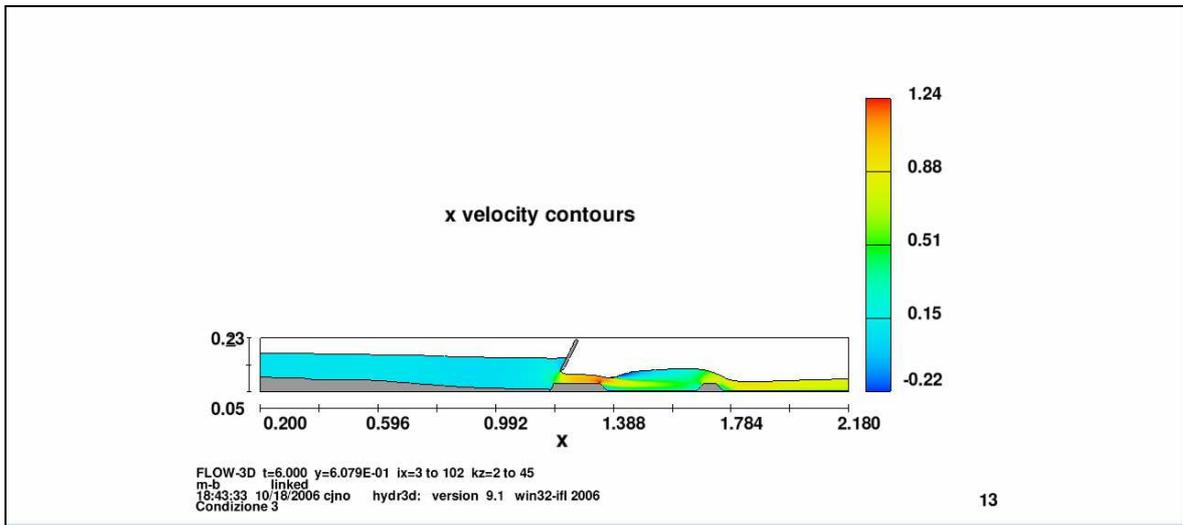
*Fig. 5.14l. Modello numerico. Prova con  $h=105.0$  mm. Sezione longitudinale.  $T = 4.5$  s*



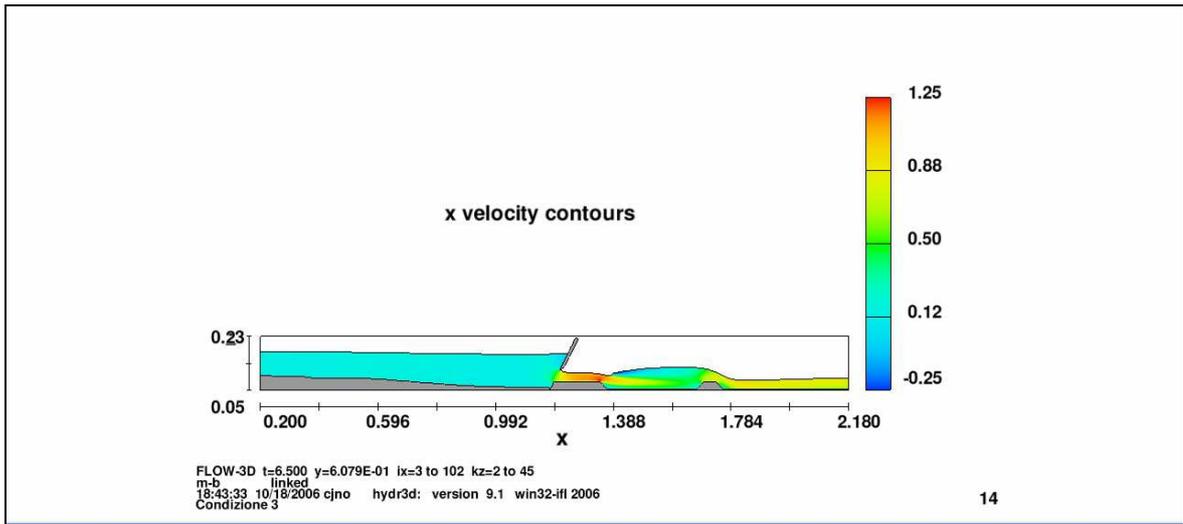
*Fig. 5.14m. Modello numerico. Prova con  $h=105.0$  mm. Sezione longitudinale.  $T = 5.0$  s*



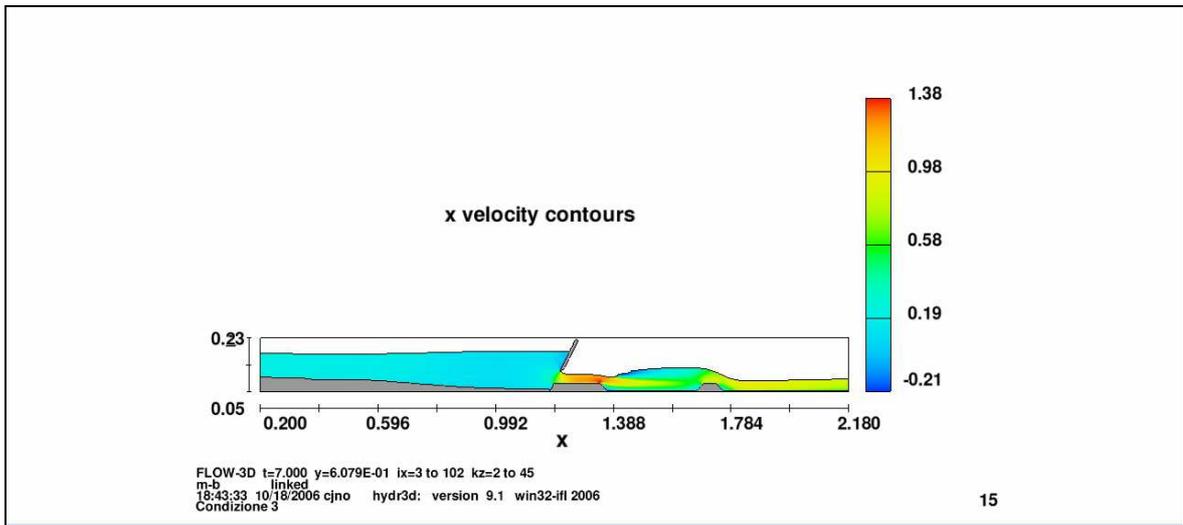
*Fig. 5.14n. Modello numerico. Prova con  $h=105.0$  mm. Sezione longitudinale.  $T = 5.5$  s*



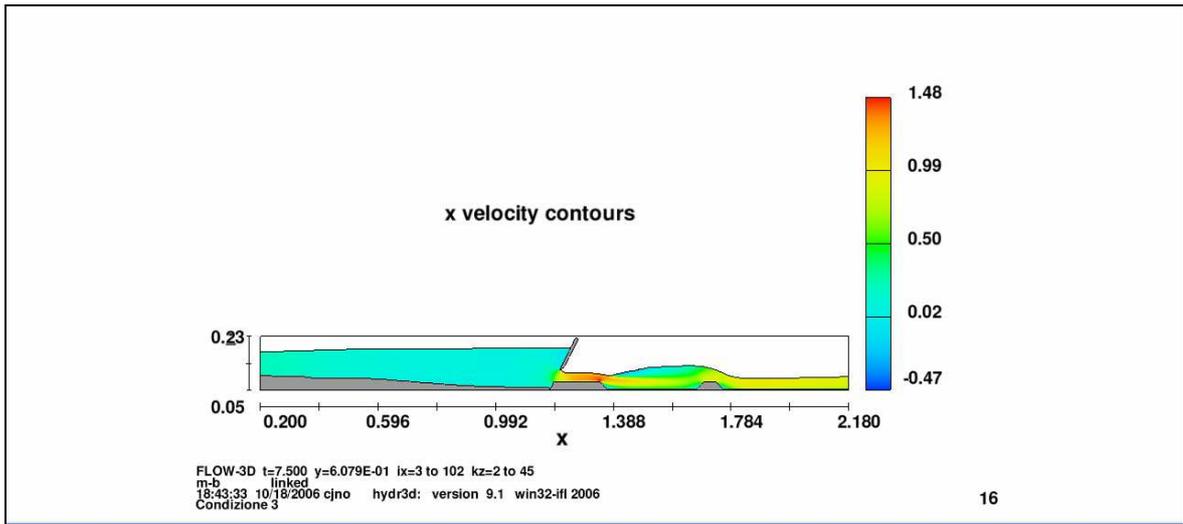
*Fig. 5.14o. Modello numerico. Prova con  $h=105.0$  mm. Sezione longitudinale.  $T = 6.0$  s*



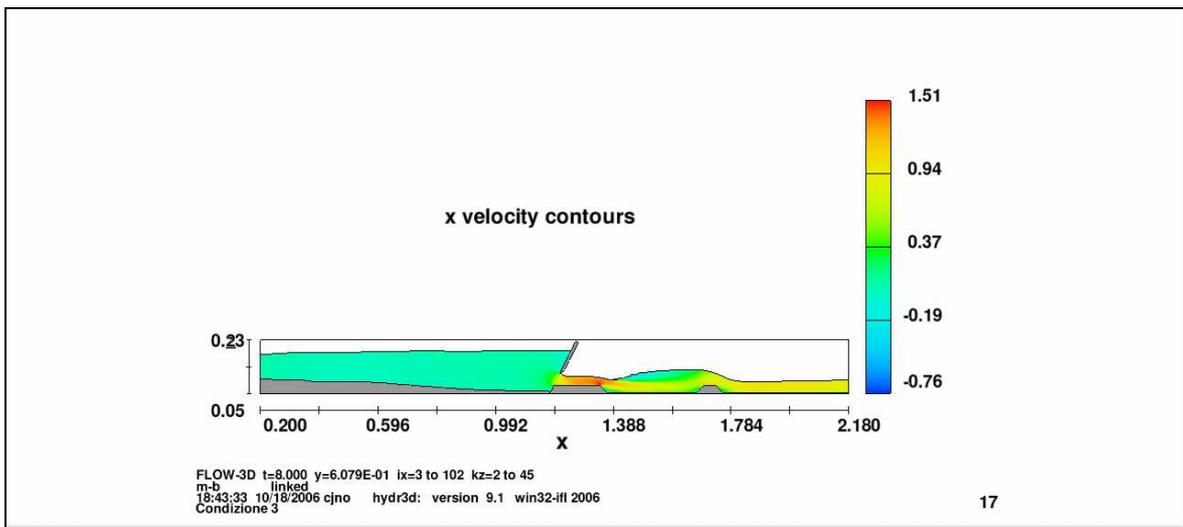
*Fig. 5.14p. Modello numerico. Prova con  $h=105.0$  mm. Sezione longitudinale.  $T = 6.5$  s*



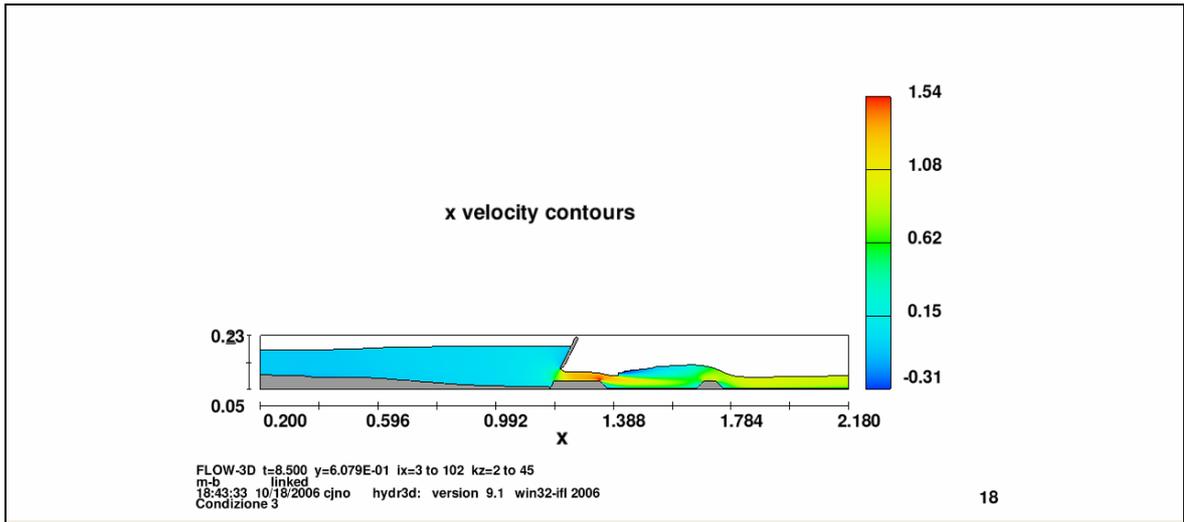
*Fig. 5.14q. Modello numerico. Prova con  $h=105.0$  mm. Sezione longitudinale.  $T = 7.0$  s*



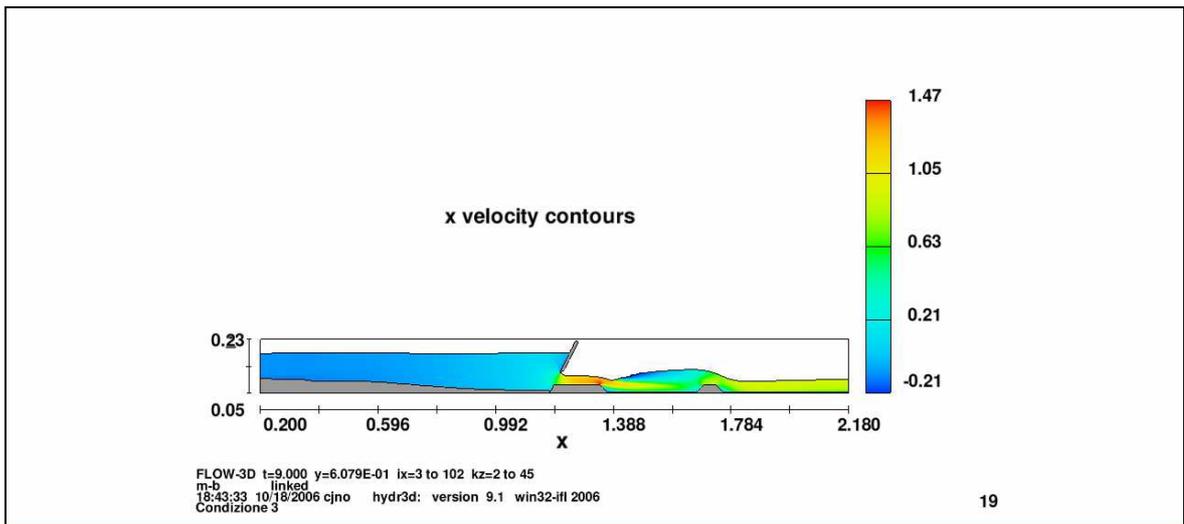
*Fig. 5.14r. Modello numerico. Prova con  $h=105.0$  mm. Sezione longitudinale.  $T = 7.5$  s*



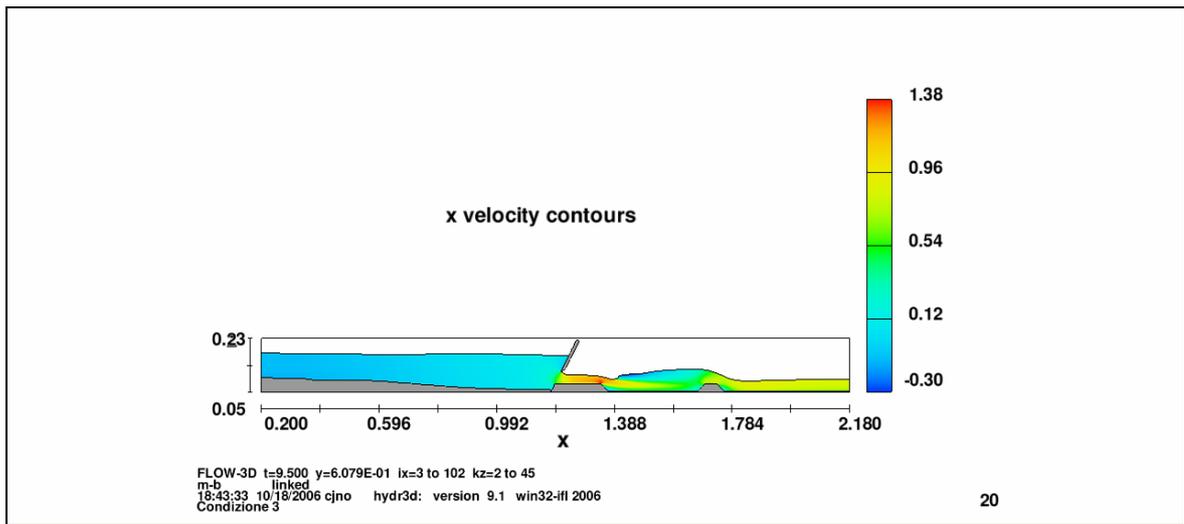
*Fig. 5.14sr. Modello numerico. Prova con  $h=105.0$  mm. Sezione longitudinale.  $T = 8.0$  s*



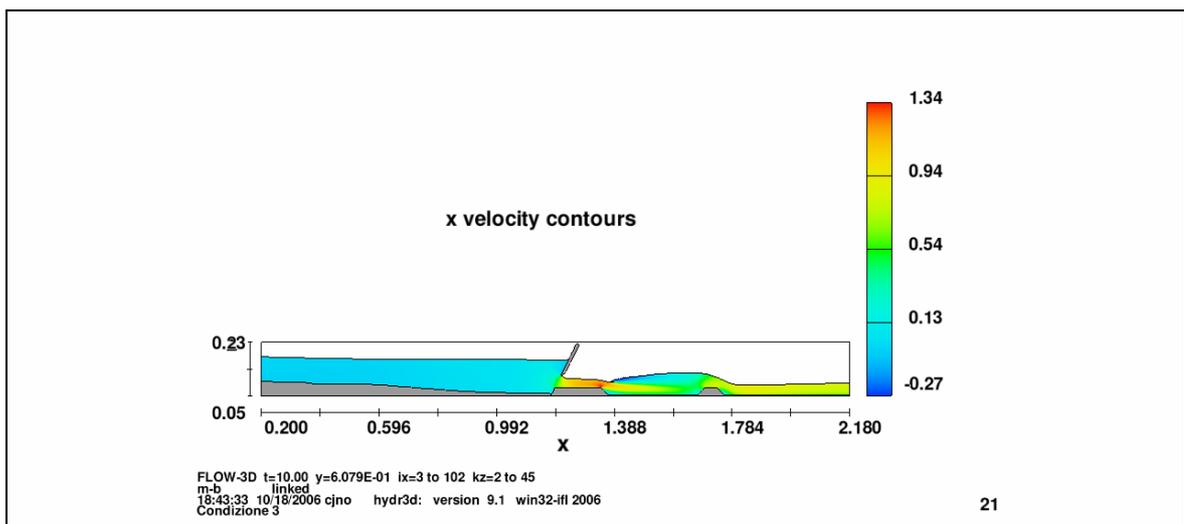
*Fig. 5.14t. Modello numerico. Prova con  $h=105.0$  mm. Sezione longitudinale.  $T = 8.5$  s*



*Fig. 5.14u. Modello numerico. Prova con  $h=105.0$  mm. Sezione longitudinale.  $T = 9.0$  s*



*Fig. 5.14v. Modello numerico. Prova con  $h=105.0$  mm. Sezione longitudinale.  $T = 9.5$  s*



*Fig. 5.14z. Modello numerico. Prova con  $h=105.0$  mm. Sezione longitudinale.  $T = 10$  s*

Poiché si disponeva di 9 prove eseguite sul modello, in corrispondenza di altrettanti valori di portata, le simulazioni numeriche sono state eseguite impostando condizioni al contorno tali da approssimare quanto più possibile quelle sperimentali. Come spiegato in precedenza sono state utilizzate due distinte condizioni iniziali

- Condizione 1: condizione idrostatica immediatamente monte della traversa
- Condizione 2: condizione idrostatica circa 1 m a monte della traversa

Infatti, le simulazioni numeriche condotte con la prima condizione hanno evidenziato forti oscillazioni all'interno della vasca, dovute sostanzialmente al brusco impatto del fluido sulla traversa. A fronte della durata alquanto breve delle prove, tali oscillazioni non vengono smorzate, e si riflettono nel canale a valle dove, in particolare, nella sezione terminale si osserva una fluttuazione del livello idrico nei diversi istanti temporali, con conseguente variazione del valore della portata calcolata con la procedura di cui sopra.

Per cercare di limitare gli effetti dovuti a tali oscillazioni si è pensato allora di impostare un secondo tipo di condizione iniziale, che in sostanza sposta più a monte il problema.

È stata quindi definita un'altezza costante, pari a quella di regime, coincidente con l'altezza imposta nella condizione al contorno relativa alla sezione più a monte del primo blocco di mesh.

### 5.2.2 Verifiche. Calcolo della portata

Per il calcolo della portata si è fatto riferimento alla sezione terminale del blocco 2, nella quale si è potuto osservare che la corrente si trova in condizioni di moto sostanzialmente stazionario, non risentendo dell'influenza della soglia posta a monte.

Tra le grandezze calcolate vi sono le tre componenti di velocità ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) e la frazione di fluido  $f$  (*fluid fraction*). Le prime sono riferite al baricentro di ogni singola cella della mesh di calcolo; la frazione di fluido indica, in termini percentuali, la frazione di riempimento del volume ogni cella: valori di  $f$  pari all'unità sono indicativi di una cella interamente piena di fluido, viceversa un valore nullo indica che la cella è vuota.

Il volume fluido nella cella si ottiene pertanto come

$$V_i = f \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (5.1)$$

essendo  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  le dimensioni delle celle.

L'area della sezione trasversale occupata dal fluido risulta quindi pari a

$$A_i = f \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (5.2)$$

La portata che attraversa la singola cella si ottiene quindi attraverso l'equazione di continuità

$$q_i = f \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot u_i \quad (5.3)$$

Per determinare la portata nell'intera sezione trasversale bisogna pertanto sommare le portate calcolate singolarmente nelle  $n$  celle

$$Q_i = \sum_{i=1}^n f_i \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot u_i \quad (5.4)$$

L'idea iniziale riguardo all'applicazione di questa procedura consisteva nel valutare la portata all'istante finale della simulazione numerica, ritenendo che in tale istante il moto fosse diventato stazionario.

Dall'esame dei risultati ottenuti, descritti nei successivi paragrafi (5.2.2.1 e 5.2.2.2) si è notato che la portata valutata con la procedura appena descritta, nella sezione finale nei vari istanti di tempo, aveva un andamento variabile per effetto delle oscillazioni di livello riscontrate nella vasca a monte, pertanto non sempre all'istante finale il valore calcolato coincideva con quello simulato.

In entrambi i casi, comunque, sono state valutate le portate nell'estremità di valle del dominio di calcolo, calcolando il valore medio ottenuto ai diversi passi temporali, a partire dall'istante in cui viene raggiunta in vasca l'altezza corrispondente alla condizione di regime.

Il valore della portata risultante dal calcolo per come appena illustrato è stato quindi confrontato con quello misurato nel modello di laboratorio, ottenuto sia dalla misura con lo stramazzo Thomson che mediante il misuratore elettromagnetico presenti nel circuito di alimentazione del modello.

#### **5.2.2.1 Calcolo della portata. Condizione 1**

In questo paragrafo si riportano i risultati relativi alla verifica della portata calcolata imponendo la condizione iniziale di tipo idrostatico a monte della traversa.

In particolare, la prima prova illustrata, con altezza idrica a regime sulla soglia  $h = 36.40$  mm, è indicativa di un comportamento a stramazzo sulla soglia. Le restanti prove sono invece riferite al funzionamento a battente.

t	Qsim	Qmis	$\Delta Q\%$
3,5	1,523	1,68	-9,3
4	1,713	1,68	2,0
4,5	1,848	1,68	10,0
5	1,978	1,68	17,7
5,5	1,965	1,68	16,9
6	2,015	1,68	19,9
6,5	2,101	1,68	25,0
7	2,034	1,68	21,1
7,5	2,043	1,68	21,6
8	1,961	1,68	16,8
8,5	1,858	1,68	10,6
9	1,879	1,68	11,8
9,5	1,889	1,68	12,5
10	1,776	1,68	5,7
10,5	1,799	1,68	7,1
11	1,875	1,68	11,6
11,5	1,877	1,68	11,7
12	1,919	1,68	14,2
	<b>Q<sub>med</sub> (l/s)</b>	<b>1,914</b>	
	<b><math>\Delta Q</math> (%)</b>	<b>13,90</b>	

Tab. 5.2. Condizione 1 – Portata calcolata nella sezione finale. h 36.40 mm sulla soglia

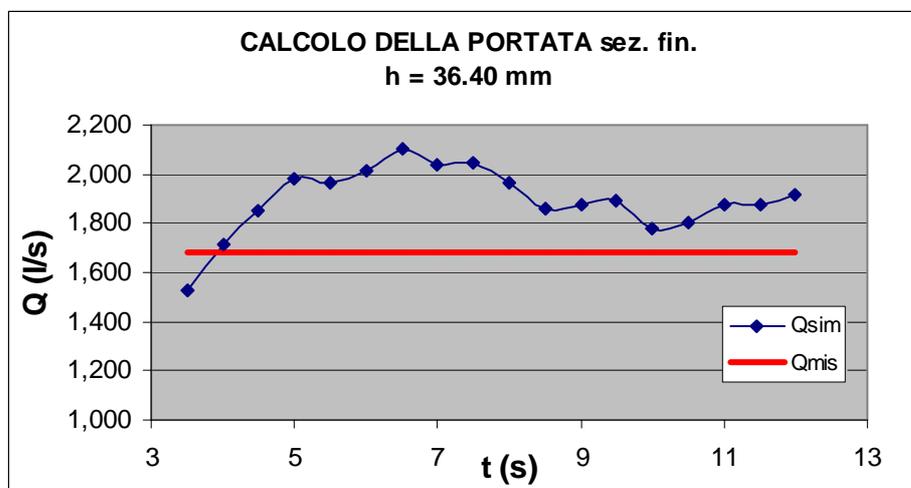
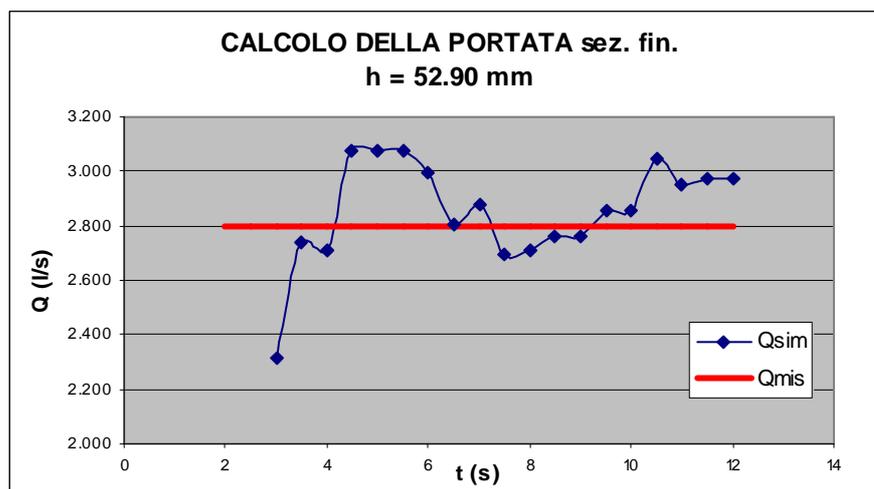


Fig. 5.15. Condizione 1 – Portata calcolata nella sezione finale. h 36.40 mm sulla soglia

t	Qsim	Qmis	$\Delta Q\%$
2		2,80	-100,0
2,5		2,80	-100,0
3	2,318	2,80	-17,2
3,5	2,739	2,80	-2,2
4	2,712	2,80	-3,1
4,5	3,076	2,80	9,9
5	3,075	2,80	9,8
5,5	3,075	2,80	9,8
6	2,995	2,80	7,0
6,5	2,806	2,80	0,2
7	2,876	2,80	2,7
7,5	2,696	2,80	-3,7
8	2,707	2,80	-3,3
8,5	2,764	2,80	-1,3
9	2,764	2,80	-1,3
9,5	2,853	2,80	1,9
10	2,853	2,80	1,9
10,5	3,048	2,80	8,9
11	2,948	2,80	5,3
11,5	2,975	2,80	6,2
12	2,975	2,80	6,2
	<b>Q<sub>med</sub> (l/s)</b>	<b>2,894</b>	
	<b><math>\Delta Q</math> (%)</b>	<b>3,36</b>	

**Tab. 5.3.** Condizione 1 – Portata calcolata nella sezione finale. h 52.90 mm sulla soglia



**Fig. 5.16.** Condizione 1 – Portata calcolata nella sezione finale. h 52.90 mm sulla soglia

t	Qsim	Qmis	$\Delta Q\%$
2,5	2,195	3,25	-32,5
3	3,393	3,25	4,4
3,5	3,289	3,25	1,2
4	3,234	3,25	-0,5
4,5	3,547	3,25	9,1
5	3,334	3,25	2,6
5,5	3,383	3,25	4,1
6	3,173	3,25	-2,4
6,5	3,173	3,25	-2,4
7	3,409	3,25	4,9
7,5	3,409	3,25	4,9
8	3,171	3,25	-2,4
8,5	3,357	3,25	3,3
9	3,269	3,25	0,6
9,5	3,457	3,25	6,4
10	3,457	3,25	6,4
10,5	3,326	3,25	2,3
11	3,326	3,25	2,3
11,5	3,276	3,25	0,8
12	3,174	3,25	-2,3
	<b>Q<sub>med</sub> (l/s)</b>	<b>3,324</b>	
	<b><math>\Delta Q</math> (%)</b>	<b>2,3</b>	

Tab. 5.4. Condizione 1 – Portata calcolata nella sezione finale. h 61.83 mm sulla soglia

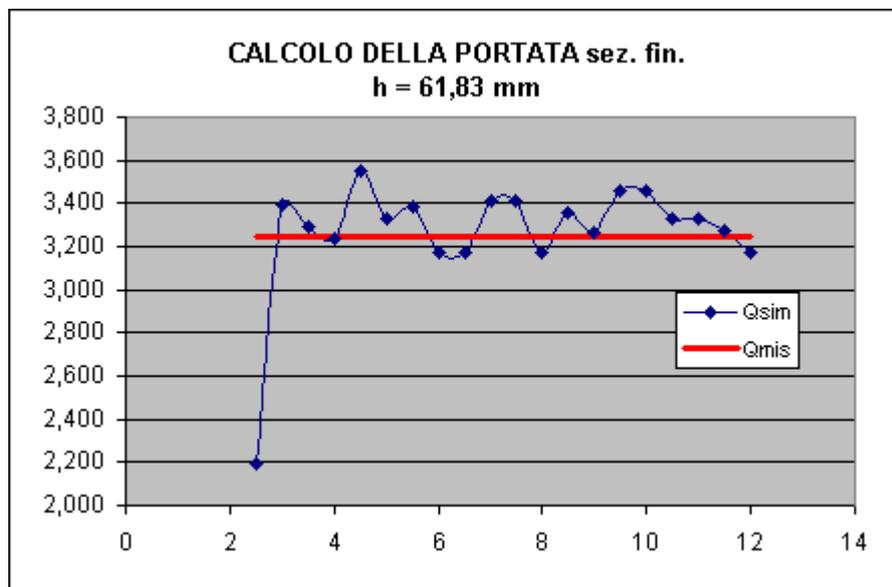


Fig. 5.17. Condizione 1 – Portata calcolata nella sezione finale. h 61.83 mm sulla soglia

t	Qsim	Qmis	$\Delta Q\%$
2,5	2,542	3,56	-28,6
3	3,385	3,56	-4,9
3,5	3,623	3,56	1,8
4	4,043	3,56	13,6
4,5	3,608	3,56	1,3
5	3,874	3,56	8,8
5,5	3,693	3,56	3,7
6	3,468	3,56	-2,6
6,5	3,492	3,56	-1,9
7	3,746	3,56	5,2
7,5	3,268	3,56	-8,2
8	3,730	3,56	4,8
8,5	3,967	3,56	11,4
9	3,708	3,56	4,2
9,5	3,891	3,56	9,3
10	3,731	3,56	4,8
10,5	3,731	3,56	4,8
11	3,652	3,56	2,6
11,5	3,565	3,56	0,1
12	3,431	3,56	-3,6
	<b>Q<sub>med</sub> (l/s)</b>	<b>3,679</b>	
	<b><math>\Delta Q</math> (%)</b>	<b>3,3</b>	

Tab. 5.5. Condizione 1 – Portata calcolata nella sezione finale. h 71.90 mm sulla soglia

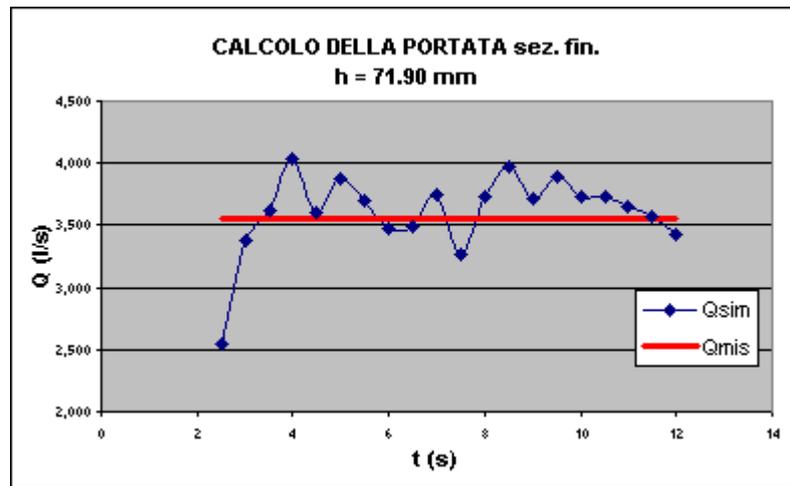


Fig. 5.18. Condizione 1 – Portata calcolata nella sezione finale. h 71.90 mm sulla soglia

t	Qsim	Qmis	$\Delta Q\%$
3.5	3.752	4.00	-6.2
4	4.313	4.00	7.8
4.5	4.272	4.00	6.8
5	4.091	4.00	2.3
5.5	4.131	4.00	3.3
6	3.998	4.00	0.0
6.5	4.024	4.00	0.6
7	3.766	4.00	-5.9
7.5	4.355	4.00	8.9
8	4.080	4.00	2.0
8.5	4.339	4.00	8.5
9	4.215	4.00	5.4
9.5	4.086	4.00	2.1
10	4.026	4.00	0.6
10.5	4.126	4.00	3.1
11	3.918	4.00	-2.0
11.5	4.127	4.00	3.2
12	3.975	4.00	-0.6
	<b>Q<sub>med</sub> (l/s)</b>	<b>4.108</b>	
	<b><math>\Delta Q</math> (%)</b>	<b>2.7</b>	

Tab. 5.6. Condizione 1 – Portata calcolata nella sezione finale. h 89.50 mm sulla soglia

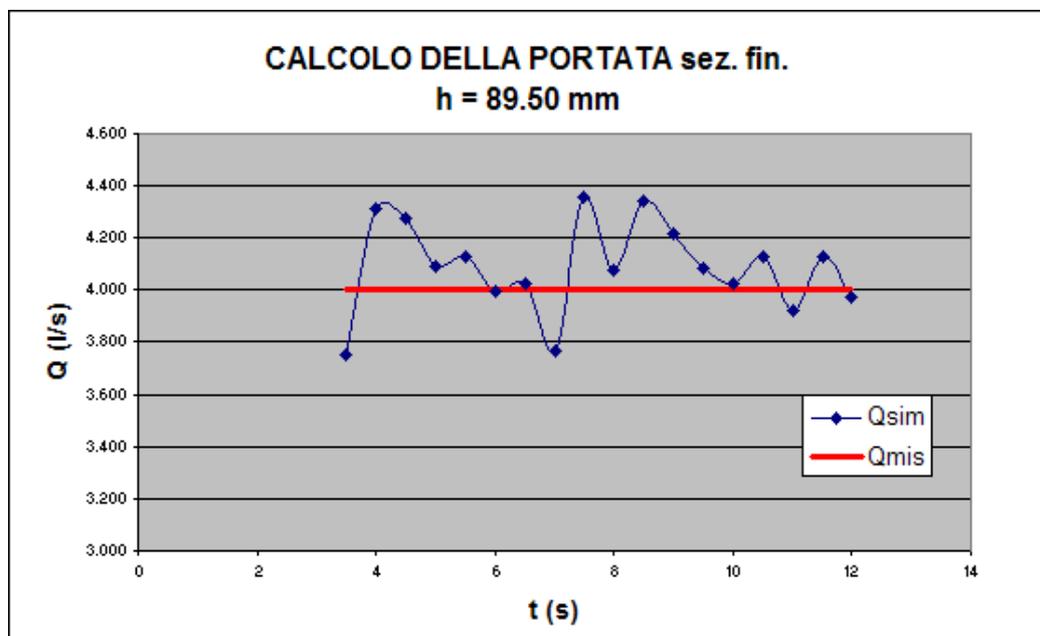


Fig. 5.19. Condizione 1 – Portata calcolata nella sezione finale. h 89.50 mm sulla soglia

### 5.2.2.2 Calcolo della portata. Condizione 2

In questo paragrafo si riportano i risultati relativi alla valutazione della portata calcolata imponendo la condizione iniziale 2 di cui si è detto in precedenza. Tutte le prove effettuate con questa condizione sono riferite al comportamento di luce a battente.

t	Qsim	Qmis	$\Delta Q\%$
4.5	1.713	2.81	-39.0
5	2.337	2.81	-16.8
5.5	2.452	2.81	-12.7
6	2.643	2.81	-5.9
6.5	2.791	2.81	-0.7
7	2.954	2.81	5.1
7.5	3.166	2.81	12.7
8	3.056	2.81	8.7
8.5	2.940	2.81	4.6
9	2.976	2.81	5.9
9.5	2.664	2.81	-5.2
10	2.569	2.81	-8.6
10.5	2.578	2.81	-8.3
11	2.651	2.81	-5.7
11.5	2.603	2.81	-7.4
12	2.713	2.81	-3.5
	Q <sub>med</sub> (l/s)	2.805	
	$\Delta Q$ (%)	-0.2	

Tab. 5.7. Condizione 2 – Portata calcolata nella sezione finale. h 52.90 mm

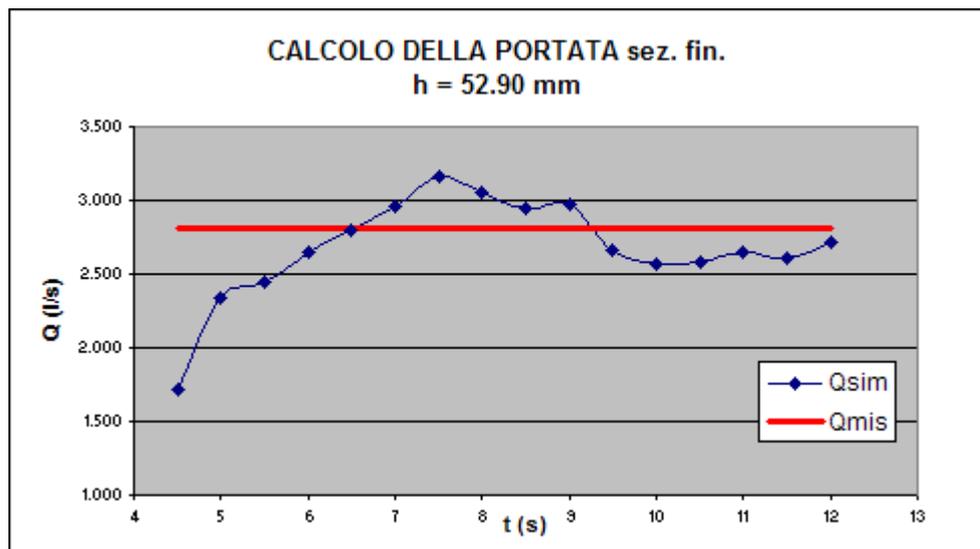


Fig. 5.20. Condizione 2 – Portata calcolata nella sezione finale. h 52.90 mm

t	Qsim	Qmis	$\Delta Q\%$
3.5	1.959	3.25	-39.7
4	2.547	3.25	-21.6
4.5	2.825	3.25	-13.1
5	2.967	3.25	-8.7
5.5	3.210	3.25	-1.2
6	3.424	3.25	5.3
6.5	3.701	3.25	13.9
7	3.438	3.25	5.8
7.5	3.128	3.25	-3.8
8	3.097	3.25	-4.7
8.5	3.004	3.25	-7.6
9	2.879	3.25	-11.4
9.5	2.834	3.25	-12.8
10	3.197	3.25	-1.6
10.5	3.296	3.25	1.4
11	3.250	3.25	0.0
11.5	3.420	3.25	5.2
12	3.411	3.25	4.9
	<b>Q<sub>med</sub> (l/s)</b>	3.217	
	<b><math>\Delta Q</math> (%)</b>	-1.0	

Tab. 5.8. Condizione 2 – Portata calcolata nella sezione finale. h 61.83 mm

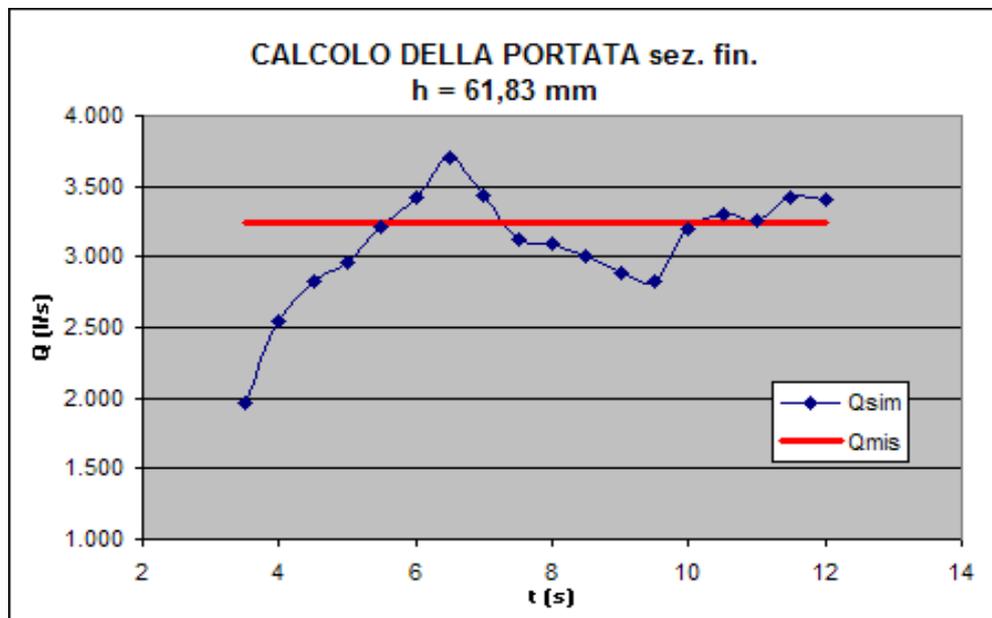


Fig. 5.21. Condizione 2 – Portata nella sezione finale. h 61.83 mm

t	Qsim	Qmis	$\Delta Q\%$
3.5	2.772	3.56	-22.1
4	3.330	3.56	-6.5
4.5	3.700	3.56	3.9
5	3.708	3.56	4.1
5.5	4.101	3.56	15.2
6	3.964	3.56	11.4
6.5	3.722	3.56	4.6
7	3.393	3.56	-4.7
7.5	3.545	3.56	-0.4
8	3.295	3.56	-7.5
8.5	3.170	3.56	-11.0
9	3.670	3.56	3.1
9.5	3.752	3.56	5.4
10	3.724	3.56	4.6
10.5	3.968	3.56	11.5
11	3.909	3.56	9.8
11.5	3.689	3.56	3.6
12	3.557	3.56	-0.1
	<b>Q<sub>med</sub> (l/s)</b>	3.609	
	<b><math>\Delta Q</math> (%)</b>	1.4	

Tab. 5.9. Condizione 2 – Portata calcolata nella sezione finale. h 71.9 mm

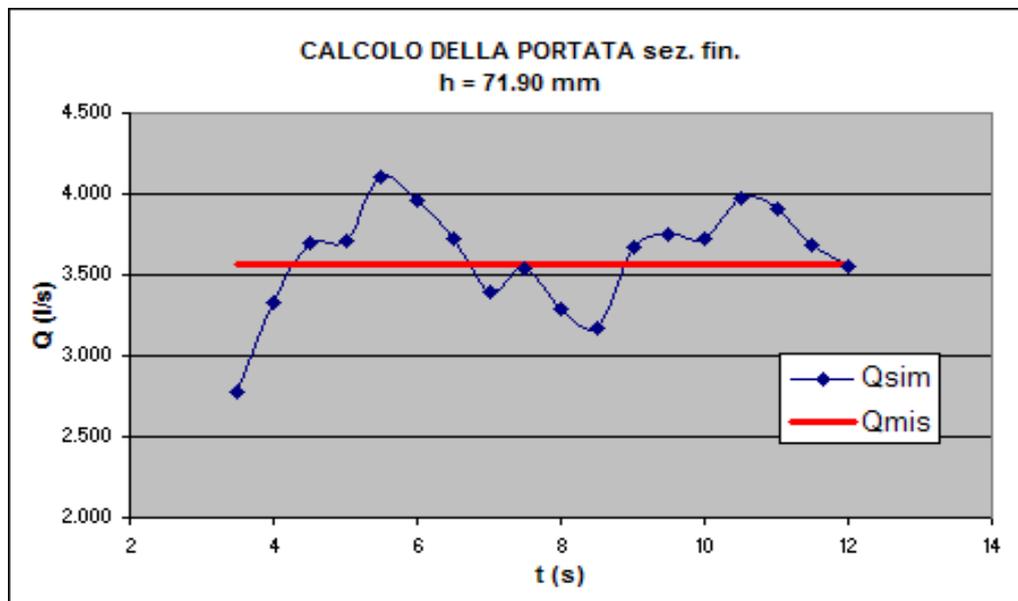


Fig. 5.22 Condizione 2 – Portata nella sezione finale. h 71.90 mm

t	Qsim	Qmis	$\Delta Q\%$
2.5	3.049	4.17	-
3	3.214	4.17	-
3.5	4.246	4.17	1.8
4	4.242	4.17	1.7
4.5	4.602	4.17	10.4
5	4.718	4.17	13.1
5.5	4.163	4.17	-0.2
6	3.689	4.17	-11.5
6.5	3.962	4.17	-5.0
7	3.739	4.17	-10.3
7.5	3.937	4.17	-5.6
8	4.617	4.17	10.7
8.5	4.652	4.17	11.6
9	4.580	4.17	9.8
9.5	4.648	4.17	11.5
10	4.309	4.17	3.3
10.5	3.868	4.17	-7.2
11	3.951	4.17	-5.3
11.5	3.810	4.17	-8.6
12	3.885	4.17	-6.8
	<b>Q<sub>med</sub> (l/s)</b>	4.201	
	<b><math>\Delta Q</math> (%)</b>	0.7	

Tab. 5.10. Condizione 2 – Portata nella sezione finale. h 96.4 mm

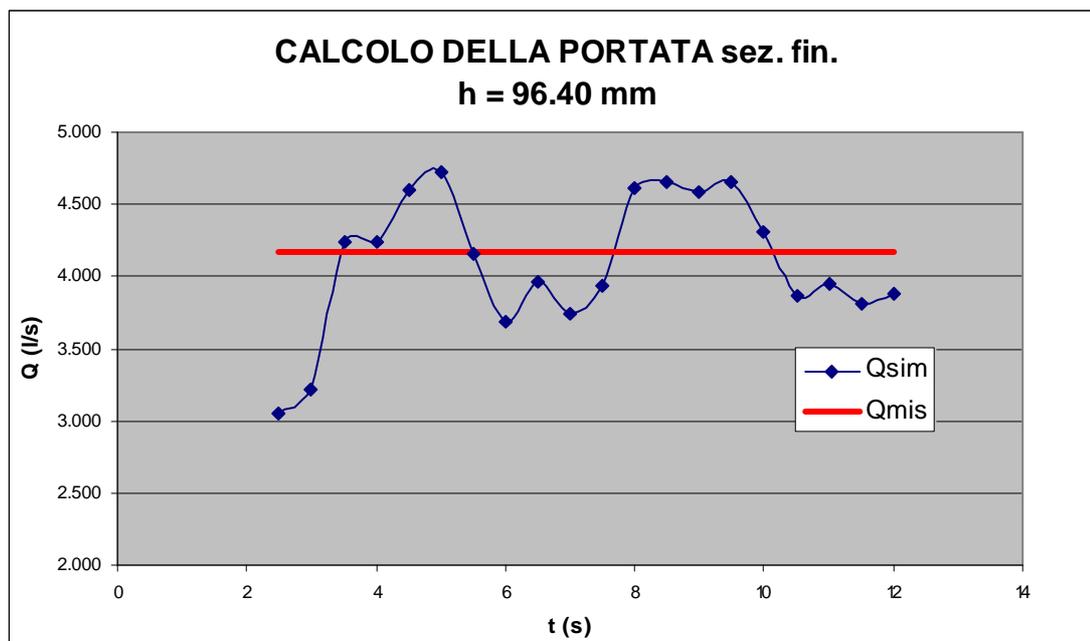


Fig. 5.23 Condizione 2 – Portata nella sezione finale. h 96.40 mm

t	Qsim	Qmis	$\Delta Q\%$
2.5	2.628	3.94	-33.3
3	2.872	3.94	-27.1
3.5	3.543	3.94	-10.1
4	4.358	3.94	10.6
4.5	4.579	3.94	16.2
5	4.461	3.94	13.2
5.5	4.125	3.94	4.7
6	3.975	3.94	0.9
6.5	3.714	3.94	-5.7
7	3.535	3.94	-10.3
7.5	3.868	3.94	-1.8
8	4.182	3.94	6.1
8.5	4.295	3.94	9.0
9	4.514	3.94	14.6
9.5	4.507	3.94	14.4
10	4.195	3.94	6.5
10.5	3.997	3.94	1.5
11	3.371	3.94	-14.5
11.5	3.670	3.94	-6.9
12	3.864	3.94	-1.9
	Q <sub>med</sub> (l/s)	4.042	
	$\Delta Q$ (%)	2.6	

Tab. 5.11. Condizione 2 – Portata nella sezione finale. h 89.5 mm

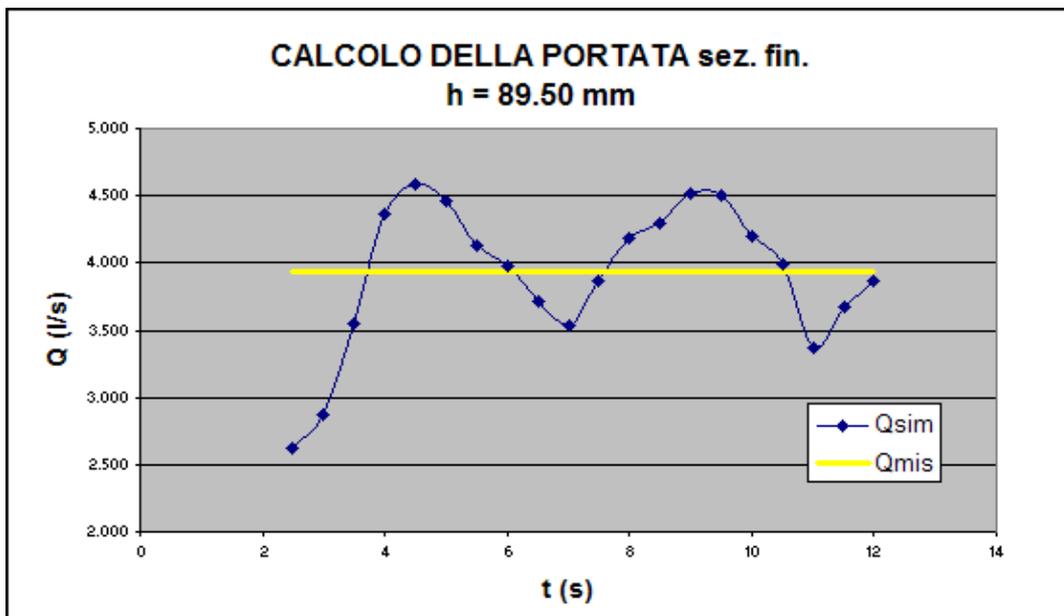


Fig. 5.24. Condizione 2 – Portata nella sezione finale. h 89.50 mm

t	Qsim	Qmis	$\Delta Q\%$
2	2.837	4.40	-35.5
2.5	3.267	4.40	-25.8
3	4.034	4.40	-8.3
3.5	4.348	4.40	-1.2
4	4.532	4.40	3.0
4.5	4.842	4.40	10.0
5	4.485	4.40	1.9
5.5	4.026	4.40	-8.5
6	3.856	4.40	-12.4
6.5	3.835	4.40	-12.8
7	3.988	4.40	-9.4
7.5	4.622	4.40	5.0
8	4.768	4.40	8.4
8.5	4.664	4.40	6.0
9	4.825	4.40	9.7
9.5	4.381	4.40	-0.4
10	4.038	4.40	-8.2
	<b>Q<sub>med</sub> (l/s)</b>	4.372	
	<b><math>\Delta Q</math> (%)</b>	-0.6	

Tab. 5.12. Condizione 2 – Portata nella sezione finale. h 105 mm

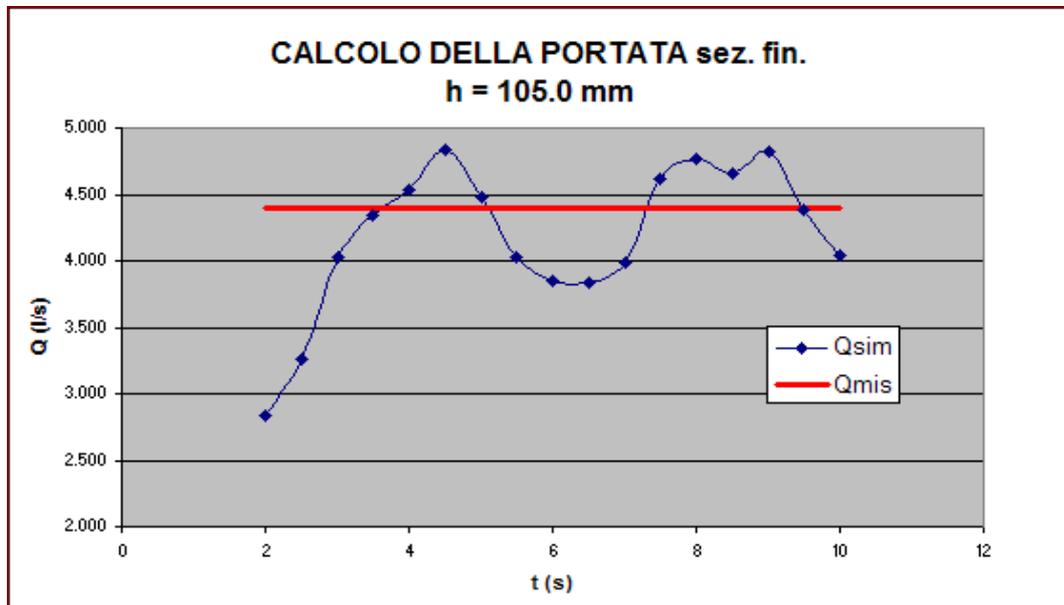


Fig. 5.25. Condizione 2 – Portata nella sezione finale. h 105 mm

t	Qsim	Qmis	$\Delta Q\%$
2	3.442	4.55	-24.4
2.5	4.024	4.55	-11.6
3	4.147	4.55	-8.9
3.5	4.968	4.55	9.2
4	5.145	4.55	13.1
4.5	4.938	4.55	8.5
5	4.334	4.55	-4.7
5.5	4.116	4.55	-9.5
6	3.870	4.55	-14.9
6.5	4.057	4.55	-10.8
7	4.733	4.55	4.0
7.5	4.923	4.55	8.2
8	5.087	4.55	11.8
8.5	5.040	4.55	10.8
9	4.840	4.55	6.4
9.5	4.297	4.55	-5.6
10	4.178	4.55	-8.2
10.5	4.054	4.55	-10.9
11	4.277	4.55	-6.0
11.5	4.818	4.55	5.9
12	4.943	4.55	8.6
	<b>Q<sub>med</sub> (l/s)</b>	4.590	
	<b><math>\Delta Q</math> (%)</b>	0.9	

Tab. 5.13. Condizione 2 – Portata calcolata nella sezione finale. h 110 mm

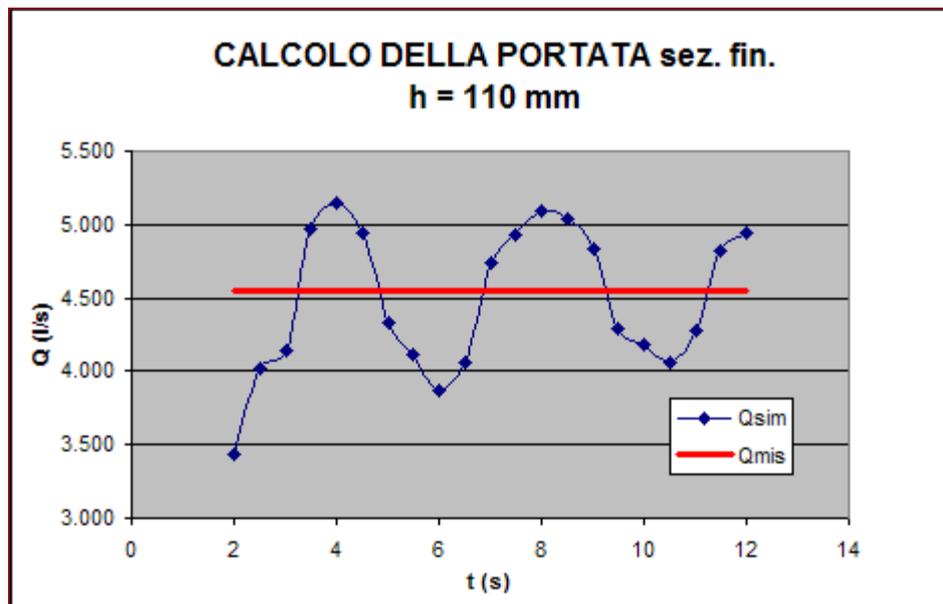


Fig. 5.26. Condizione 2 – Portata calcolata nella sezione finale. h 110 mm

### 5.2.2.3 Calcolo della portata. Confronto risultati

Si riportano di seguito le curve portate – livelli riferite alle prove appena descritte, per entrambe le condizioni iniziali adoperate.

h (mm)	Q <sub>sim</sub> (l/s)	Q <sub>mis</sub> (l/s)	ΔQ (%)
36.40	1.914	1.680	13.90
52.90	2.894	2.800	3.36
61.83	3.324	3.250	2.28
71.90	3.679	3.560	3.34
89.50	4.108	4.000	2.71
96.40	4.576	4.200	8.95

Tab. 5.14. Condizione 1 – Confronto portate

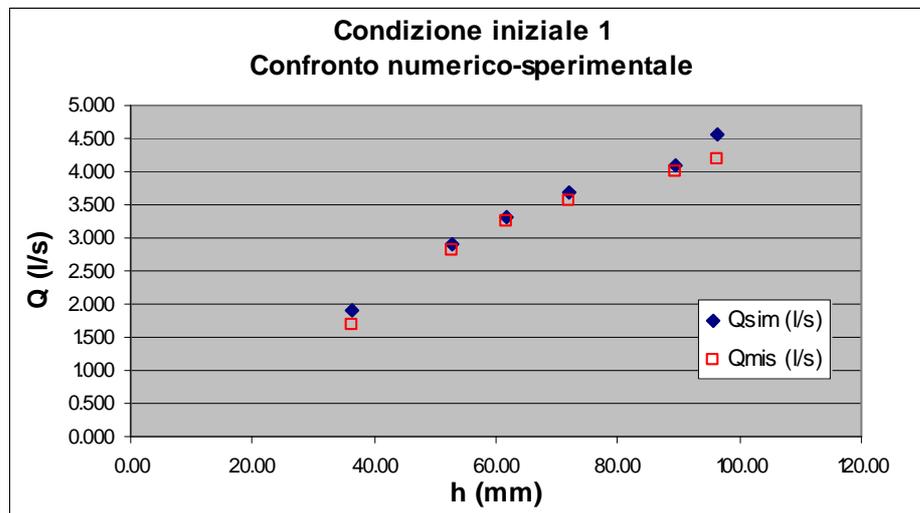


Fig. 5.27. Condizione 1 – Confronto portate

h (mm)	Q <sub>sim</sub> (l/s)	Q <sub>mis</sub> (l/s)	ΔQ (%)
52.90	2.805	2.810	-0.18
61.83	3.217	3.250	-1.02
71.90	3.609	3.560	1.39
89.50	4.042	3.940	2.59
96.40	4.17	4.201	-0.74
105.00	4.372	4.400	-0.63
110.00	4.590	4.550	0.88

Tab. 5.15. Condizione 2 – Confronto portate

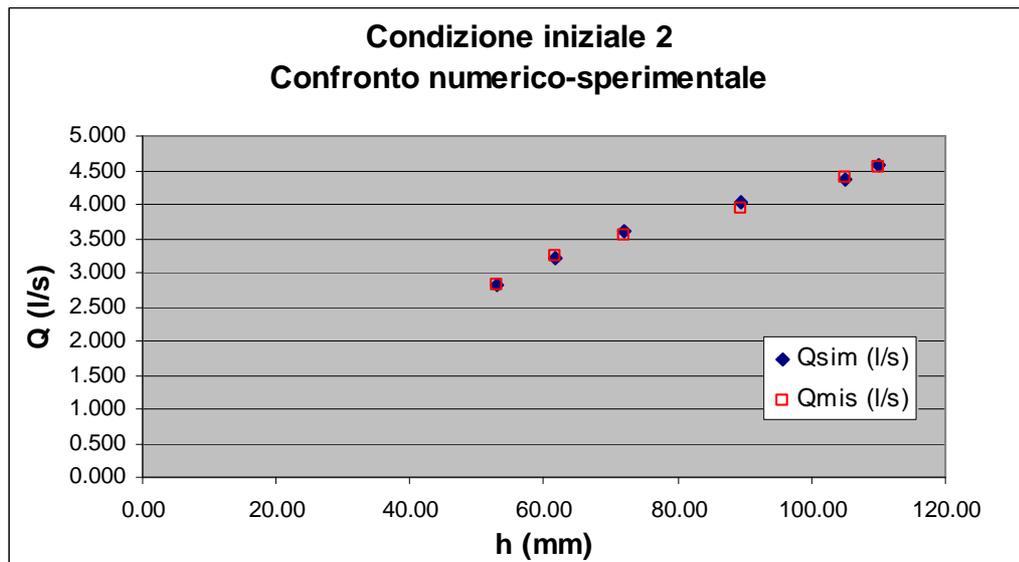


Fig. 5.28. Condizione 2 – Confronto portate

Come si evince dalle tabelle e figure sopra riportate, le simulazioni condotte con l'ipotesi di cui alla *condizione 1* conducono ad una valutazione peggiore della portata, che in generale è sovrastimata rispetto al dato sperimentale.

La *condizione 2* conduce invece, come ci si attendeva, ad una stima migliore, con scarti sia in difetto che in eccesso rispetto al valore misurato.

#### 5.2.2.4 Simulazione numerica estesa

Si è proceduto ad effettuare una simulazione numerica con una durata superiore rispetto alle prove sinora illustrate, al fine di verificarne le differenze nei risultati.

È stata pertanto considerata la prova con  $h = 105.0$  mm sulla soglia per la *condizione 2*. La durata della simulazione è stata posta pari a  $T = 26$  s.

Come per le altre prove, la portata è stata valutata nella sezione più a valle del dominio di calcolo nel canale, nei diversi istanti temporali.

t (s)	Q <sub>sim</sub> (l/s)	Q <sub>mis</sub> (l/s)	ΔQ%
3	4.083	4.40	-7.2
4	4.609	4.40	4.7
5	4.478	4.40	1.8
6	3.880	4.40	-11.8
7	4.029	4.40	-8.4
8	4.743	4.40	7.8
9	4.811	4.40	9.3
10	4.038	4.40	-8.2
11	3.968	4.40	-9.8
12	4.539	4.40	3.2
13	4.644	4.40	5.5
14	4.357	4.40	-1.0
15	4.075	4.40	-7.4
16	4.347	4.40	-1.2
17	4.620	4.40	5.0
18	4.646	4.40	5.6
19	4.193	4.40	-4.7
20	4.127	4.40	-6.2
21	4.680	4.40	6.4
22	4.325	4.40	-1.7
23	4.190	4.40	-4.8
24	4.169	4.40	-5.3
25	4.388	4.40	-0.3
26	4.572	4.40	3.9
	Q <sub>med</sub> (l/s)	4.355	
	ΔQ (%)	-1.03	

Tab. 5.16. Simulazione estesa con  $T = 26$  s – Portata calcolata nella sezione finale.  $h = 105.0$  mm

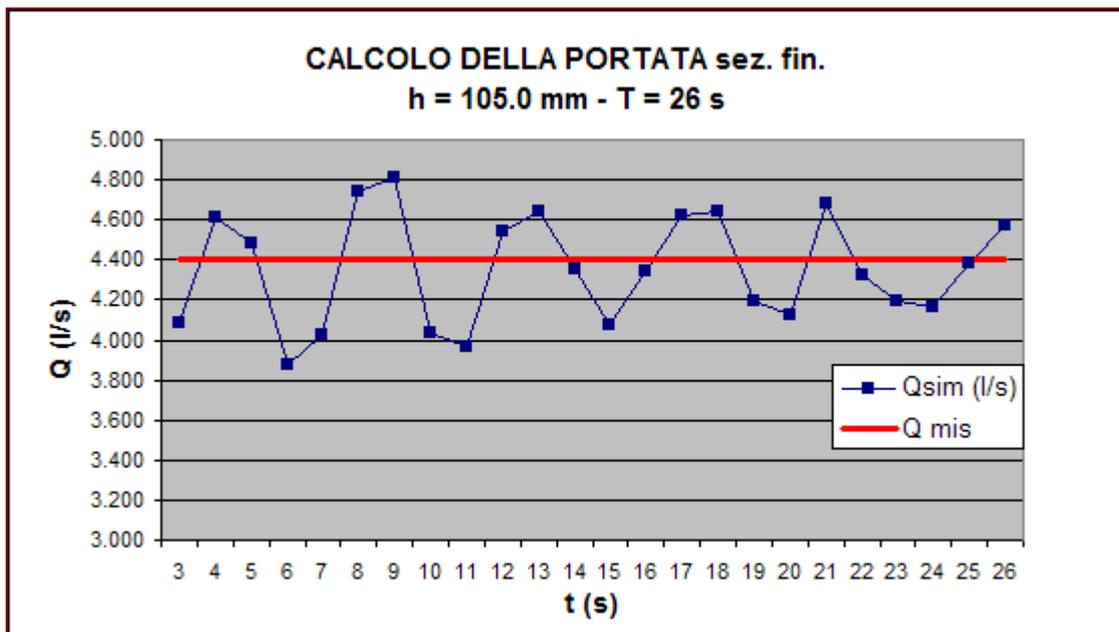


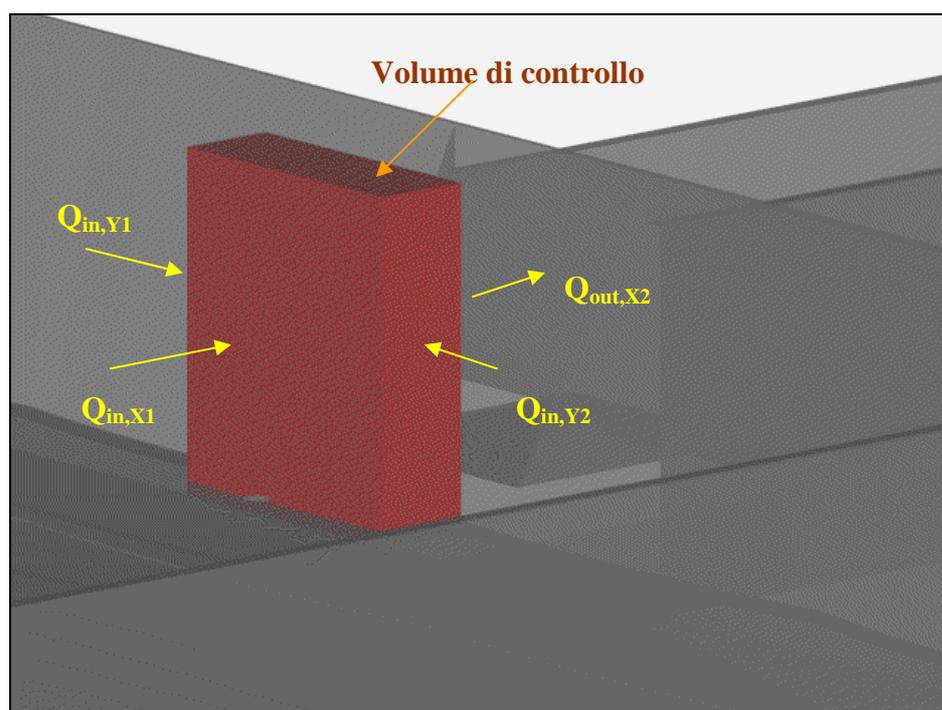
Fig. 5.29. Simulazione estesa con  $T = 26$  s – Portata calcolata nella sezione finale.  $h = 105.0$  mm

Come si nota dall'esame dei risultati (*Tab. 5.16*) e dal grafico corrispondente (*Fig. 5.27*), si verifica un progressivo smorzamento delle oscillazioni, anche se, nel complesso, la stima della portata conduce ad un valore non troppo dissimile da quello stimato con la simulazione di durata inferiore.

### 5.2.3 Verifica della continuità

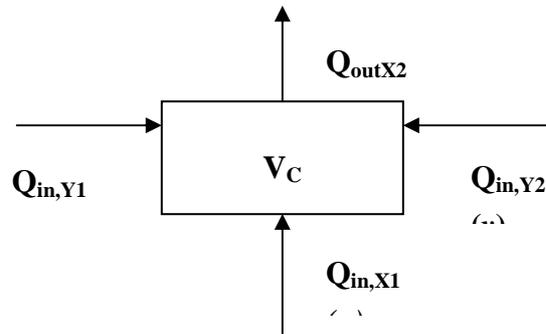
È stata eseguita una verifica all'interno del dominio di calcolo, allo scopo di accertare il rispetto della continuità del flusso.

Scelta la prova relativa al livello  $h = 105.0 \text{ mm}$  come rappresentativa di tutte quelle effettuate, si è individuato un volume di controllo a ridosso della traversa, in corrispondenza dell'imbocco (*Fig. 5.30*), e si sono calcolate le portate entranti attraverso le superfici laterali del volumetto, adoperando la procedura precedentemente descritta (*par. 5.2.1.*).



*Fig. 5.30. Volume di controllo per la verifica della continuità dei volumi*

Le superfici inferiore e superiore del volume di controllo coincidono, rispettivamente, con il fondo della vasca e con la superficie libera. Le coppie di superfici laterali sono localizzate al piede della soglia ed un centimetro più a monte (in direzione  $x$ ), e in corrispondenza delle estremità della luce nella traversa (in direzione  $y$ ).



*Fig. 5.31. Volume di controllo. Continuità delle portate*

Con riferimento alla simbologia della *figura 5.31*, nel volume di controllo il fluido entra nelle facce  $X_1$ ,  $Y_1$  e  $Y_2$ , fuoriuscendo dalla sezione  $X_2$ .

Sono state calcolate le portate con la procedura illustrata al par. 5.2.2, considerando ovviamente la componente di velocità  $u$  per la valutazione delle portate  $Q_{in,X1}$  e  $Q_{out,X2}$ , e la componente  $v$  per le portate  $Q_{in,Y1}$  e  $Q_{in,Y2}$ .

Elaborando i dati si ottengono i seguenti valori delle portate:

- $Q_{in,Y1} = 0.276$  l/s
- $Q_{in,Y2} = 0.201$  l/s
- $Q_{in,X1} = 2.761$  l/s
- $Q_{out,X2} = 3.234$  l/s

Il valore risultante dalla somma dei valori ottenuti ( $Q_{in,Y1} + Q_{in,Y2} + Q_{in,X1} = 3.238$  l/s) è stato quindi confrontato con quello calcolato in corrispondenza della superficie di uscita del volume, evidenziando la coincidenza tra i due.

Con riferimento a tale volume di controllo, pertanto, la verifica di continuità dei volumi è soddisfatta.

#### **5.2.4 Verifica delle pressioni e delle altezze idriche**

Come accennato in precedenza, i dati forniti in output dal codice sono stati elaborati per ottenere i valori della variabili significative (portate, velocità, pressioni, altezze) nel dominio di calcolo ai diversi istanti di tempo.

I risultati ottenuti sono stati quindi confrontati con le misure effettuate sul modello fisico.

Per quanto riguarda la pressione, dunque, in questo paragrafo si riportano i risultati delle elaborazioni effettuate in corrispondenza delle sezioni, all'interno della vasca, sulle quali

sono posizionate le prese piezometriche collegate al trasduttore di pressione.

Secondo la simbologia adottata sul modello fisico, le prese piezometriche sono così localizzate (Fig. 5.32):

- Prese 1, 2 e 3: nella sezione più a monte del dominio di calcolo nella vasca, a  $x = 96$  cm dal piede della traversa;
- Prese 4, 5 e 6: all'incirca a metà del dominio di calcolo, a  $x = 51$  cm dal piede della traversa;
- Prese 7, 8 e 9: in prossimità della luce di fondo, a  $x = 11$  cm circa dal piede della traversa.

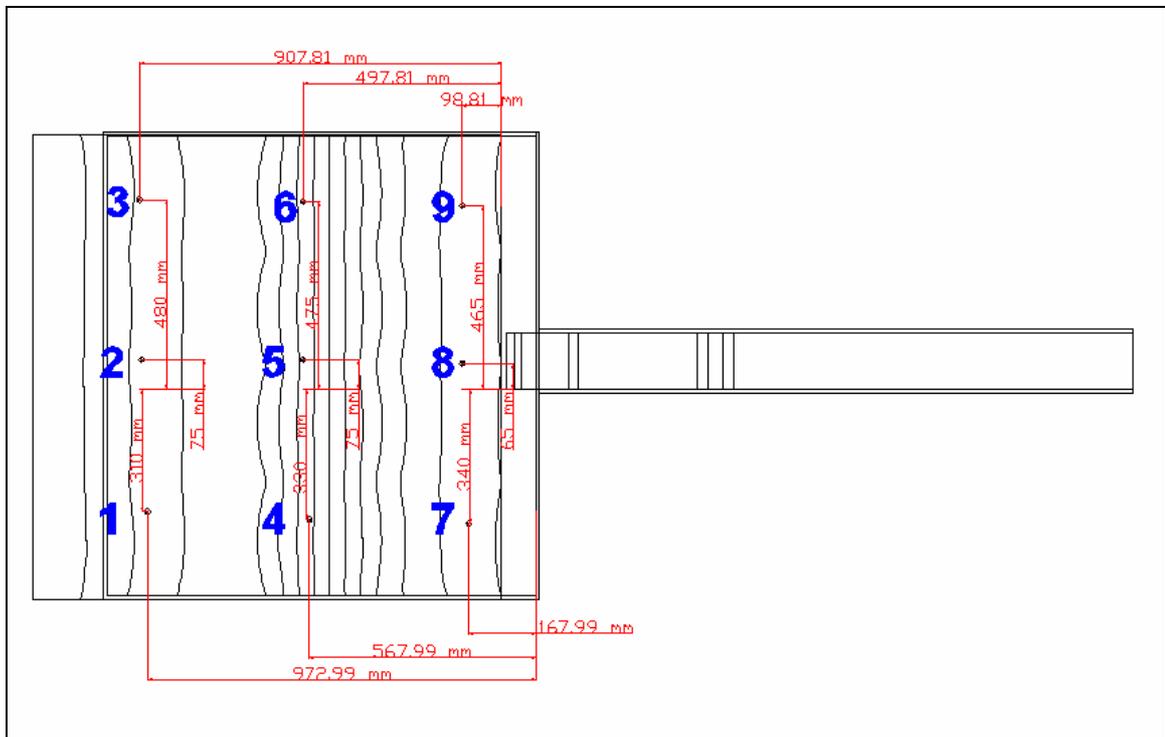


Fig. 5.32. Modello fisico. Localizzazione delle prese piezometriche nella vasca.

Le tabelle seguenti riportano, in sintesi, in corrispondenza delle prese piezometriche (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), i valori delle altezze idriche misurate, il corrispondente valore medio,  $h_{mis}$ , la pressione media misurata,  $p_{mis}$ , nonché i valori medi calcolati,  $h_{sim}$  e  $p_{sim}$ , ed infine gli errori percentuali  $\Delta H_{med}$  e  $\Delta p_{med}$  commessi nella valutazione delle pressioni e delle altezze.

Nelle figure (5.31 – 5.36) sono rappresentate le distribuzioni delle pressioni nelle sezioni dove sono ubicate le terne di prese piezometriche, e le altezze idriche calcolate, con indicazione dei valori misurati in corrispondenza di ciascuna presa.

Altezze idriche misurate (cm)			$h_{sim}$ (cm)	$h_{mis}$ (cm)	$p_{sim}$ (Pa)	$p_{mis}$ (Pa)	$\Delta h_{med}$	$\Delta p_{med}$
Presa 1	Presa 2	Presa 3	media	media	media	media	(%)	(%)
11.3	9.3	8.0	8.45	8.77	828	860	-3.65	-3.68

Tab. 5.17. Prese piezometriche 1, 2 e 3. Pressioni e altezze calcolate e misurate

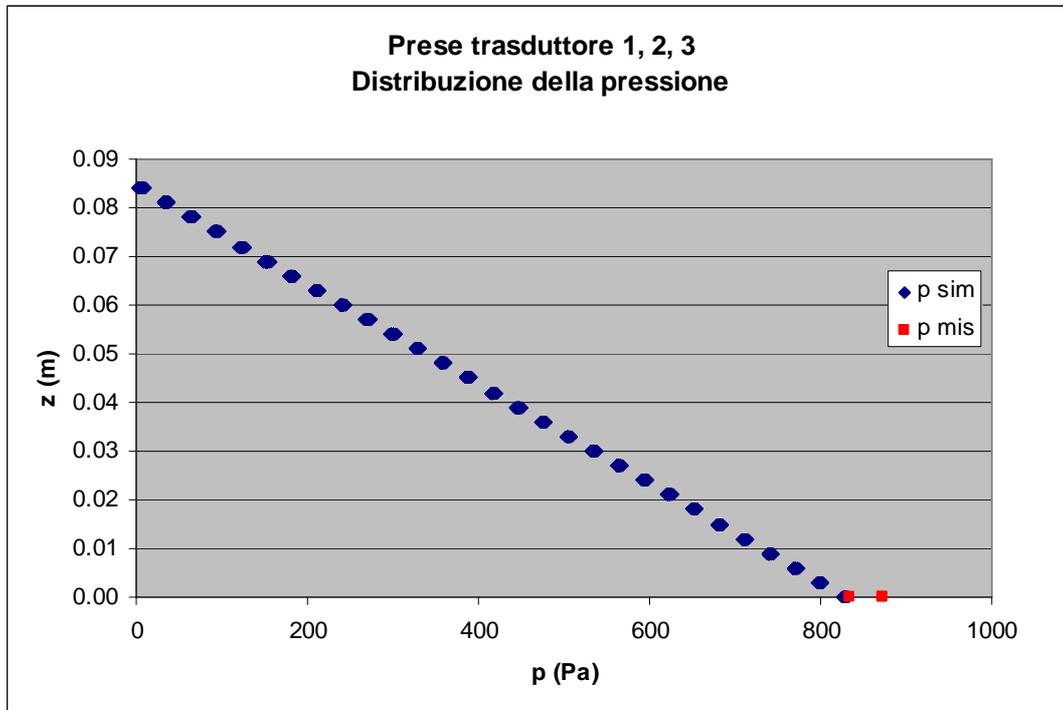


Fig. 5.31. Prese piezometriche 1, 2 e 3. Distribuzione della pressione

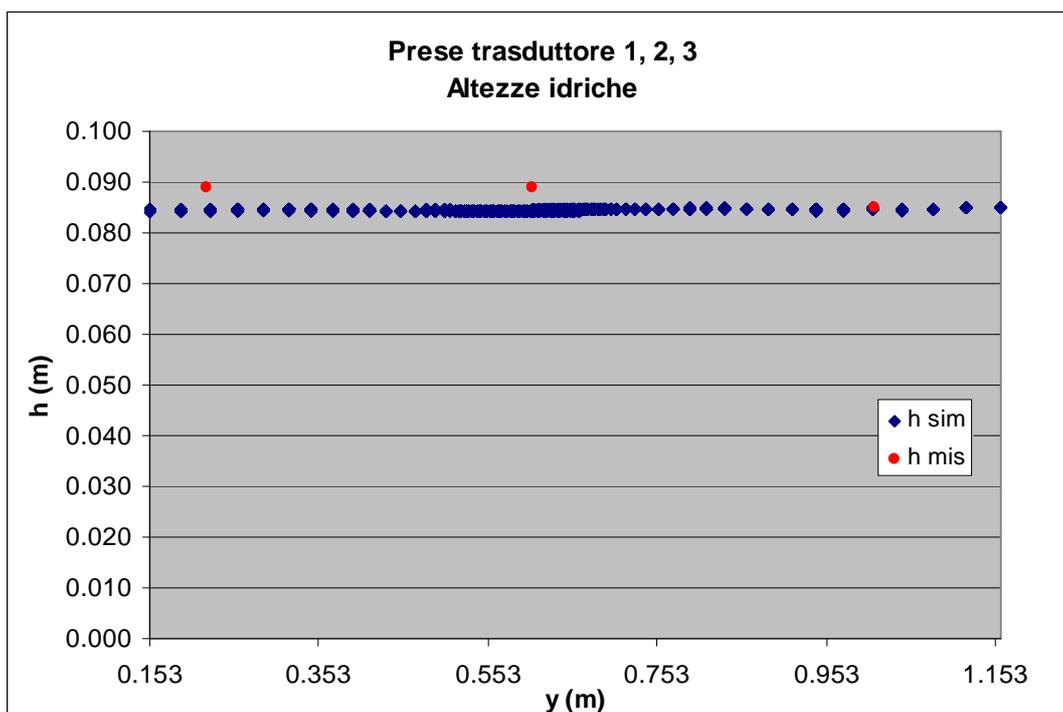


Fig. 5.32. Prese piezometriche 1, 2 e 3. Altezze idriche; confronto con le misure sperimentali

Altezze idriche misurate (cm)			$h_{sim}$ (cm)	$h_{mis}$ (cm)	$p_{sim}$ (Pa)	$p_{mis}$ (Pa)	$\Delta h_{med}$	$\Delta p_{med}$
Presa 1	Presa 2	Presa 3	media	media	media	media	(%)	(%)
9.90	10.00	9.20	9.38	9.70	920	951	-3.33	-3.25

Tab. 5.18. Prese piezometriche 4, 5 e 6. Pressioni e altezze calcolate e misurate

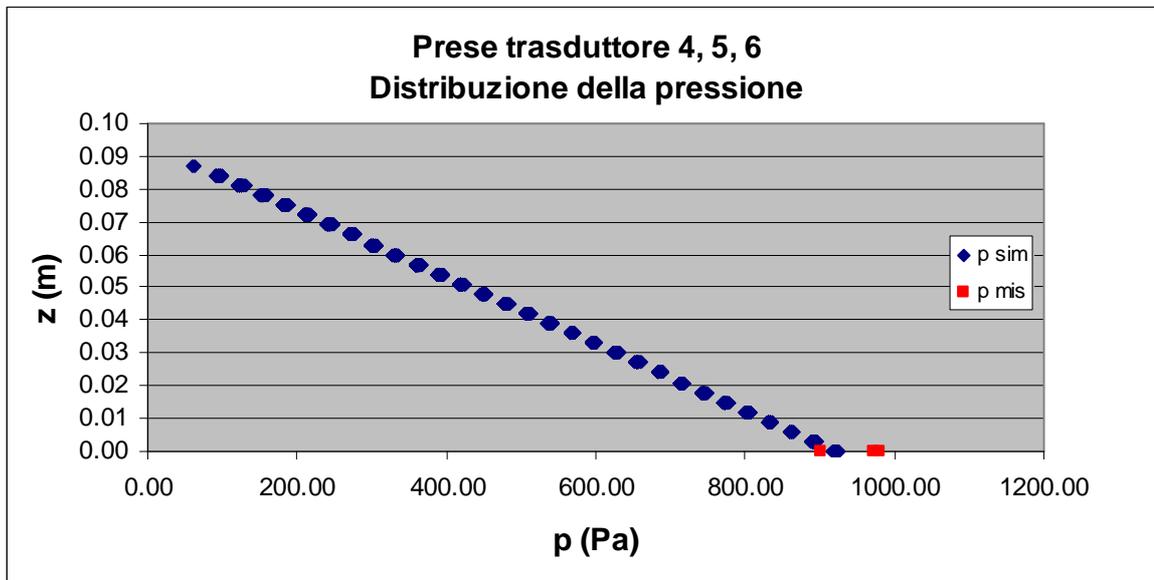


Fig. 5.33. Prese piezometriche 4, 5 e 6. Distribuzione della pressione

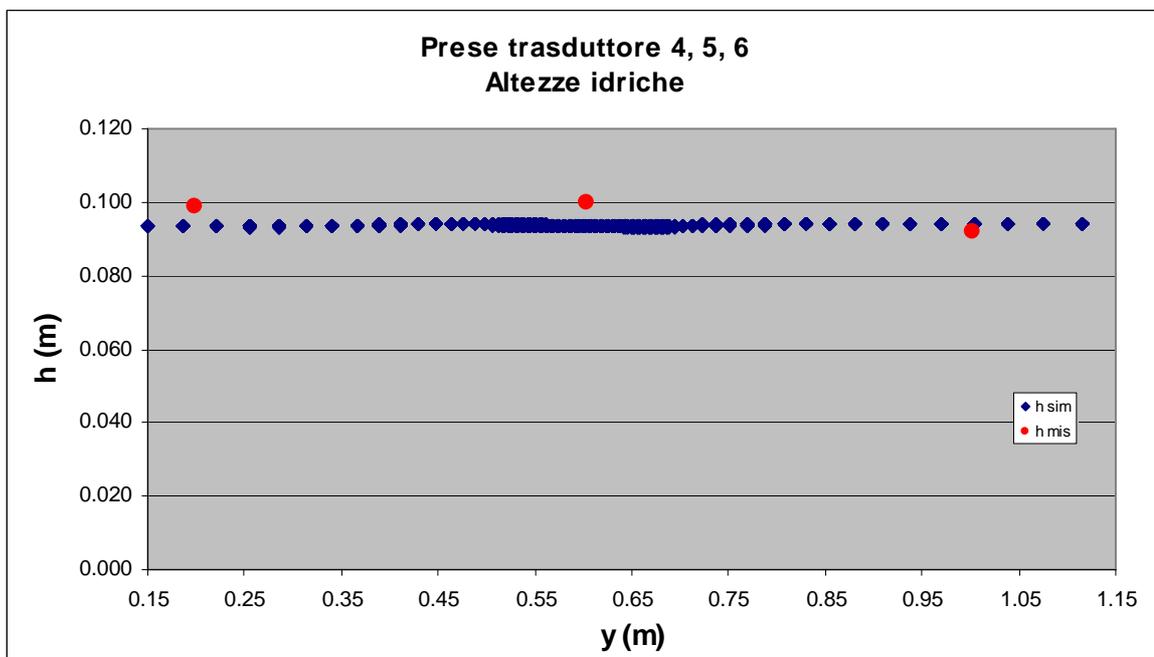


Fig. 5.34. Prese piezometriche 4, 5 e 6. Altezze idriche; confronto con le misure sperimentali

Altezze idriche misurate (cm)			$h_{sim}$ (cm)	$h_{mis}$ (cm)	$p_{sim}$ (Pa)	$p_{mis}$ (Pa)	$\Delta h_{med}$	$\Delta p_{med}$
Presa 1	Presa 2	Presa 3	media	media	media	media	(%)	(%)
11.9	11.3	10.8	11.39	11.33	1116	1111	0.49	0.41

Tab. 5.19. Prese piezometriche 7, 8 e 9. Pressioni e altezze calcolate e misurate

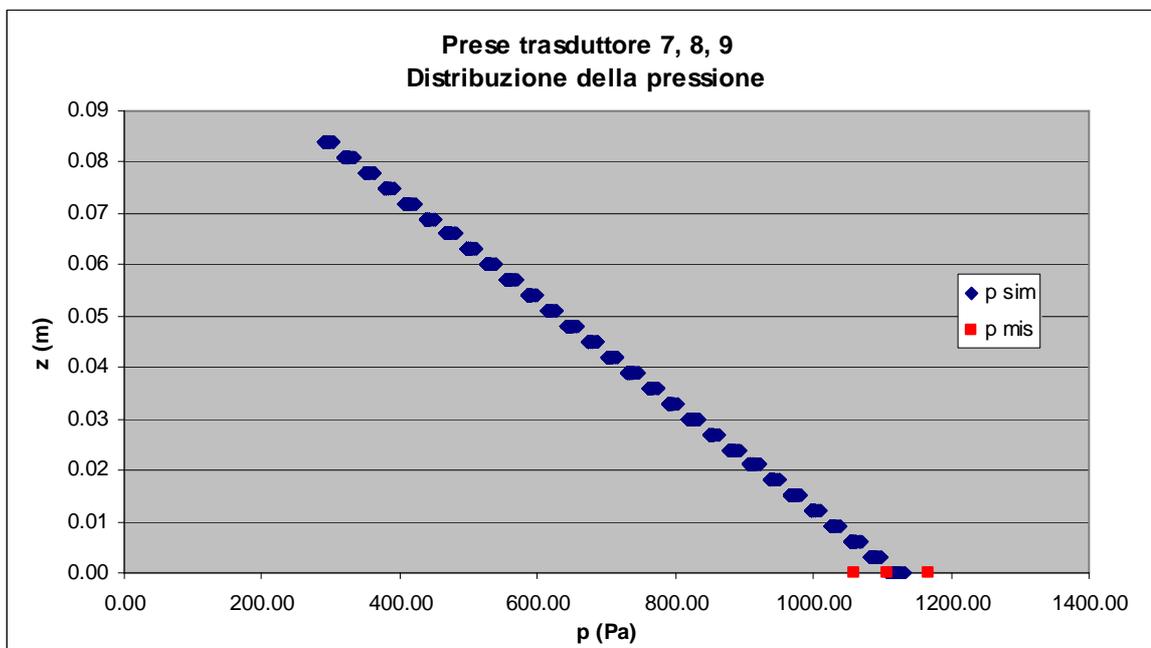


Fig. 5.35. Prese piezometriche 7, 8 e 9. Distribuzione della pressione

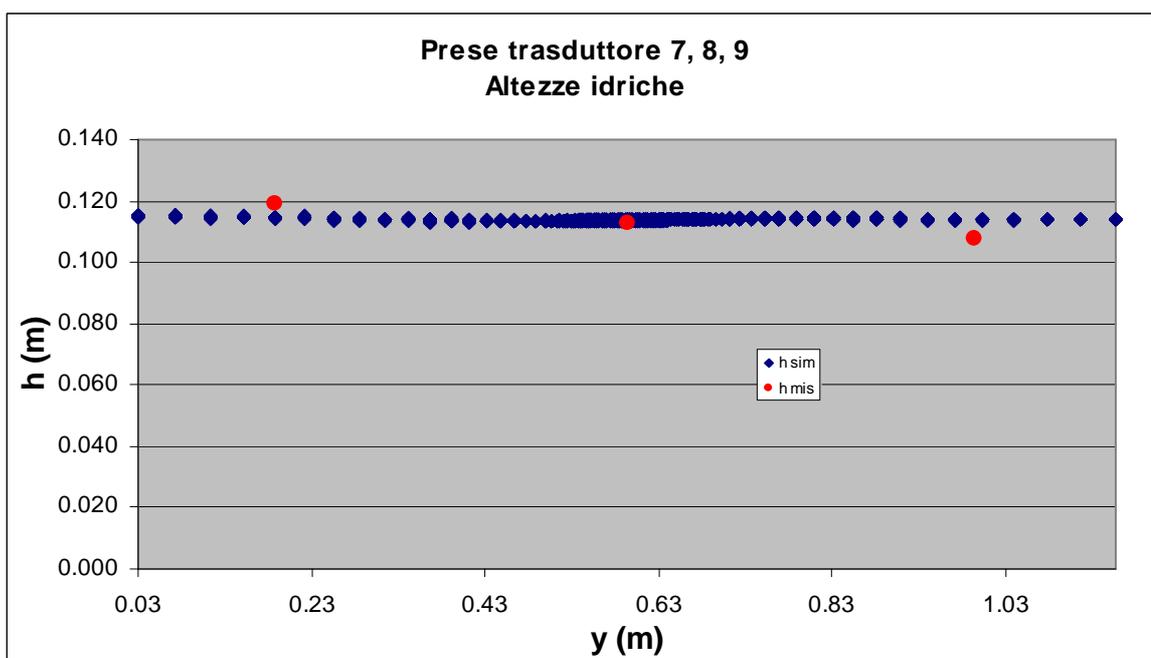


Fig. 5.36. Prese piezometriche 7, 8 e 9. Altezze idriche; confronto con le misure sperimentali

### 5.2.5 Verifica delle velocità nella vasca

Come anticipato precedentemente, sono stati elaborati i dati relativi alle velocità all'interno del dominio di calcolo e confrontati, per una singola prova, con i valori misurati sperimentalmente sul modello fisico.

La prova utilizzata per effettuare il confronto numerico – sperimentale è quella relativa ad un'altezza sulla soglia in condizioni di regime pari ad  $h = 105.0$  mm, a cui corrisponde una portata sperimentale di 4.4 l/s.

Le elaborazioni riportate in questa sede sono riferite alle velocità compute all'interno della vasca, lungo tre sezioni verticali poste in corrispondenza, rispettivamente, della mezzeria della luce di fondo, e delle sezioni di estremità della luce, distanziate rispettivamente di  $X = 1, 2$  e  $3$  cm dall'imbocco della luce stessa (Fig. 5.37).

I valori risultanti sono riportati nelle *Tablelle* 5.20 – 5.22, e i diagrammi corrispondenti nelle *Figure* 5.38 – 5.40.

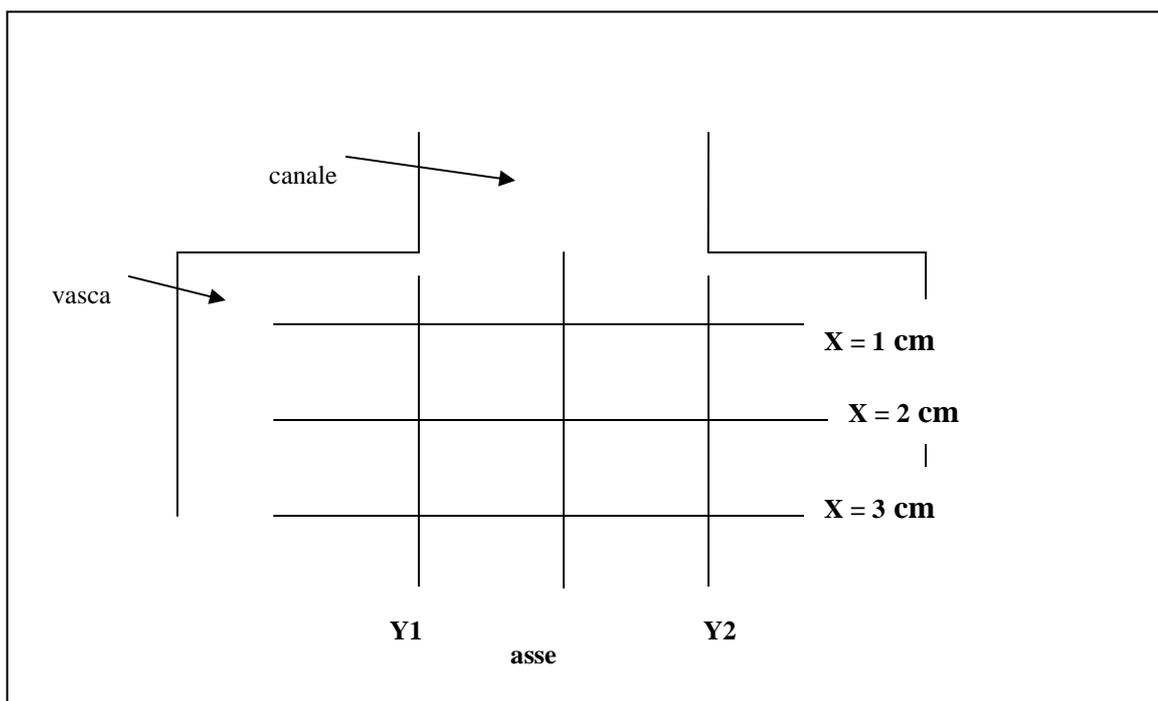


Fig. 5.37. Verifica delle velocità. Localizzazione delle sezioni

Y1		asse		Y2	
u (cm/s)	z (cm)	u (cm/s)	z (cm)	u (cm/s)	z (cm)
4.2	0.0	0.0	0.0	4.4	0.0
6.6	0.3	12.0	0.3	7.4	0.3
7.5	0.6	13.9	0.6	8.3	0.6
8.4	0.9	15.5	0.9	9.1	0.9
9.2	1.2	17.0	1.2	10.1	1.2
10.2	1.5	18.6	1.5	11.0	1.5
11.1	1.8	20.2	1.8	12.0	1.8
11.9	2.1	21.6	2.1	12.8	2.1
12.6	2.4	22.9	2.4	13.5	2.4
13.1	2.7	23.8	2.7	14.1	2.7
13.4	3.0	24.5	3.0	14.5	3.0
13.6	3.3	24.9	3.3	14.7	3.3
13.6	3.6	25.0	3.6	14.8	3.6
13.5	3.9	24.9	3.9	14.7	3.9
13.3	4.2	24.6	4.2	14.5	4.2
13.0	4.5	24.1	4.5	14.3	4.5
12.6	4.8	23.5	4.8	13.9	4.8
12.1	5.1	22.7	5.1	13.5	5.1
11.6	5.4	21.8	5.4	13.0	5.4
11.0	5.7	20.8	5.7	12.5	5.7
10.4	6.0	19.8	6.0	12.0	6.0
9.8	6.3	18.8	6.3	11.4	6.3
9.3	6.6	17.8	6.6	10.9	6.6
8.7	6.9	16.8	6.9	10.4	6.9
8.1	7.2	15.8	7.2	9.9	7.2
7.6	7.5	14.9	7.5	9.4	7.5
7.1	7.8	14.1	7.8	9.0	7.8
6.7	8.1	13.4	8.1	8.6	8.1
6.3	8.4	12.7	8.4	8.2	8.4
5.9	8.7	12.1	8.7	7.9	8.7
5.6	9.0	11.6	9.0	7.6	9.0
5.3	9.3	11.2	9.3	7.4	9.3
5.1	9.6	10.8	9.6	7.2	9.6
4.9	9.9	10.6	9.9	7.1	9.9
4.8	10.2	10.4	10.2	7.0	10.2
4.8	10.5	10.3	10.5	6.9	10.5
4.8	10.8	10.3	10.8	6.9	10.8
4.8	11.1	10.4	11.1	6.8	11.1

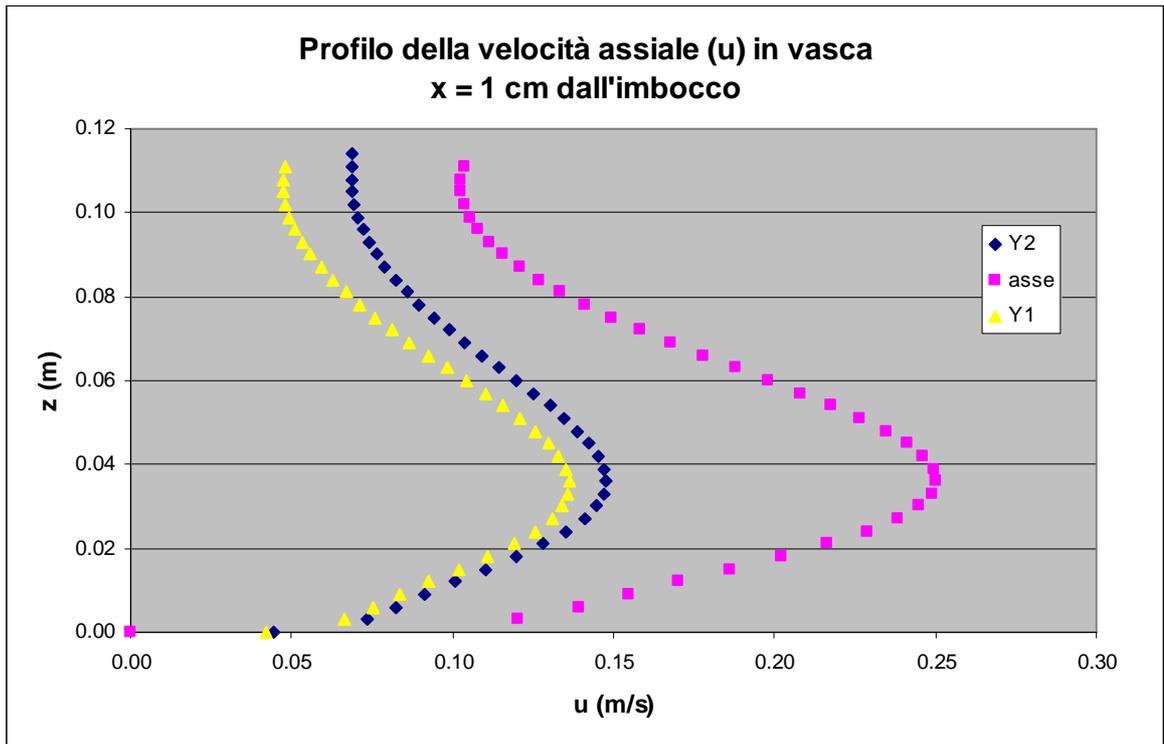
*Tab. 5.20. Prova con  $h = 105.0$  mm sulla soglia. Velocità assiali in vasca.  $x = 1$  cm dalla luce*

Y1		asse		Y2	
u (cm/s)	z (cm)	u (cm/s)	z (cm)	u (cm/s)	z (cm)
4.5	0.0	5.2	0.0	4.5	0.0
8.0	0.3	13.9	0.3	8.9	0.3
8.4	0.6	15.0	0.6	9.3	0.6
8.8	0.9	15.8	0.9	9.7	0.9
9.2	1.2	16.5	1.2	10.1	1.2
9.6	1.5	17.2	1.5	10.6	1.5
10.0	1.8	17.9	1.8	11.0	1.8
10.3	2.1	18.5	2.1	11.4	2.1
10.6	2.4	19.1	2.4	11.7	2.4
10.9	2.7	19.6	2.7	12.0	2.7
11.1	3.0	19.9	3.0	12.2	3.0
11.2	3.3	20.1	3.3	12.4	3.3
11.2	3.6	20.2	3.6	12.5	3.6
11.2	3.9	20.2	3.9	12.5	3.9
11.1	4.2	20.1	4.2	12.4	4.2
10.9	4.5	19.8	4.5	12.3	4.5
10.7	4.8	19.4	4.8	12.1	4.8
10.4	5.1	19.0	5.1	11.9	5.1
10.1	5.4	18.5	5.4	11.6	5.4
9.7	5.7	17.9	5.7	11.3	5.7
9.4	6.0	17.3	6.0	11.0	6.0
9.0	6.3	16.6	6.3	10.7	6.3
8.6	6.6	16.0	6.6	10.3	6.6
8.2	6.9	15.3	6.9	10.0	6.9
7.9	7.2	14.7	7.2	9.7	7.2
7.5	7.5	14.1	7.5	9.4	7.5
7.1	7.8	13.5	7.8	9.0	7.8
6.8	8.1	13.0	8.1	8.8	8.1
6.5	8.4	12.5	8.4	8.5	8.4
6.2	8.7	12.0	8.7	8.3	8.7
6.0	9.0	11.6	9.0	8.0	9.0
5.7	9.3	11.3	9.3	7.9	9.3
5.5	9.6	11.0	9.6	7.7	9.6
5.4	9.9	10.8	9.9	7.6	9.9
5.3	10.2	10.7	10.2	7.5	10.2
5.2	10.5	10.6	10.5	7.4	10.5
5.2	10.8	10.5	10.8	7.4	10.8
5.2	11.1	10.6	11.1	7.4	11.1
5.3	11.4	10.6	11.4	7.4	11.4

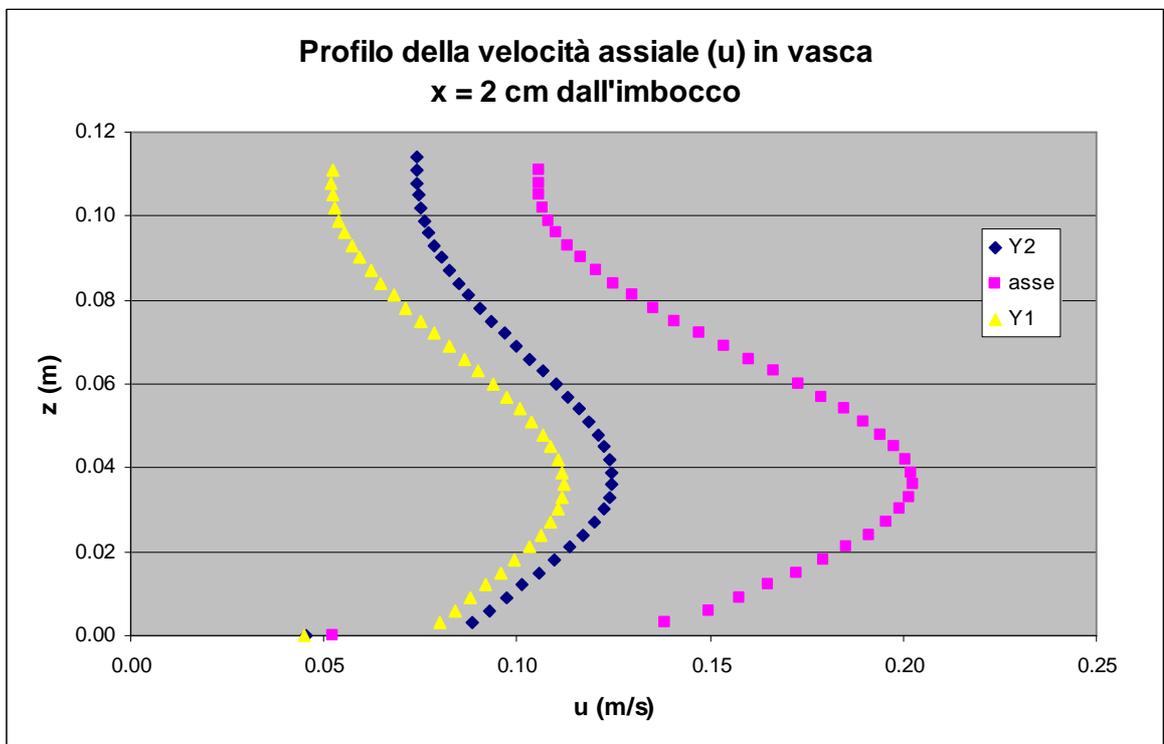
*Tab. 5.21. Prova con  $h = 105.0$  mm sulla soglia. Velocità assiali in vasca.  $x = 2$  cm dalla luce*

Y1		asse		Y2	
u (cm/s)	z (cm)	u (cm/s)	z (cm)	u (cm/s)	z (cm)
4.4	0.0	5.7	0.0	4.5	0.0
8.0	0.3	13.5	0.3	9.0	0.3
8.3	0.6	14.4	0.6	9.3	0.6
8.6	0.9	14.9	0.9	9.6	0.9
8.8	1.2	15.3	1.2	9.9	1.2
9.0	1.5	15.7	1.5	10.1	1.5
9.1	1.8	16.0	1.8	10.3	1.8
9.3	2.1	16.3	2.1	10.5	2.1
9.4	2.4	16.6	2.4	10.7	2.4
9.6	2.7	16.8	2.7	10.8	2.7
9.6	3.0	16.9	3.0	10.9	3.0
9.7	3.3	17.0	3.3	11.0	3.3
9.7	3.6	17.0	3.6	11.0	3.6
9.7	3.9	17.0	3.9	11.0	3.9
9.6	4.2	16.9	4.2	11.0	4.2
9.5	4.5	16.7	4.5	10.9	4.5
9.3	4.8	16.5	4.8	10.8	4.8
9.2	5.1	16.2	5.1	10.7	5.1
9.0	5.4	15.9	5.4	10.6	5.4
8.8	5.7	15.6	5.7	10.4	5.7
8.5	6.0	15.2	6.0	10.2	6.0
8.3	6.3	14.8	6.3	10.0	6.3
8.0	6.6	14.4	6.6	9.8	6.6
7.8	6.9	13.9	6.9	9.6	6.9
7.5	7.2	13.5	7.2	9.3	7.2
7.2	7.5	13.1	7.5	9.1	7.5
7.0	7.8	12.7	7.8	8.9	7.8
6.7	8.1	12.3	8.1	8.7	8.1
6.5	8.4	12.0	8.4	8.5	8.4
6.3	8.7	11.6	8.7	8.3	8.7
6.1	9.0	11.3	9.0	8.2	9.0
5.9	9.3	11.1	9.3	8.0	9.3
5.7	9.6	10.8	9.6	7.9	9.6
5.6	9.9	10.7	9.9	7.8	9.9
5.5	10.2	10.6	10.2	7.8	10.2
5.5	10.5	10.5	10.5	7.7	10.5
5.4	10.8	10.4	10.8	7.7	10.8
5.5	11.1	10.5	11.1	7.7	11.1
0.0	0.0	10.5	11.4	7.7	11.4

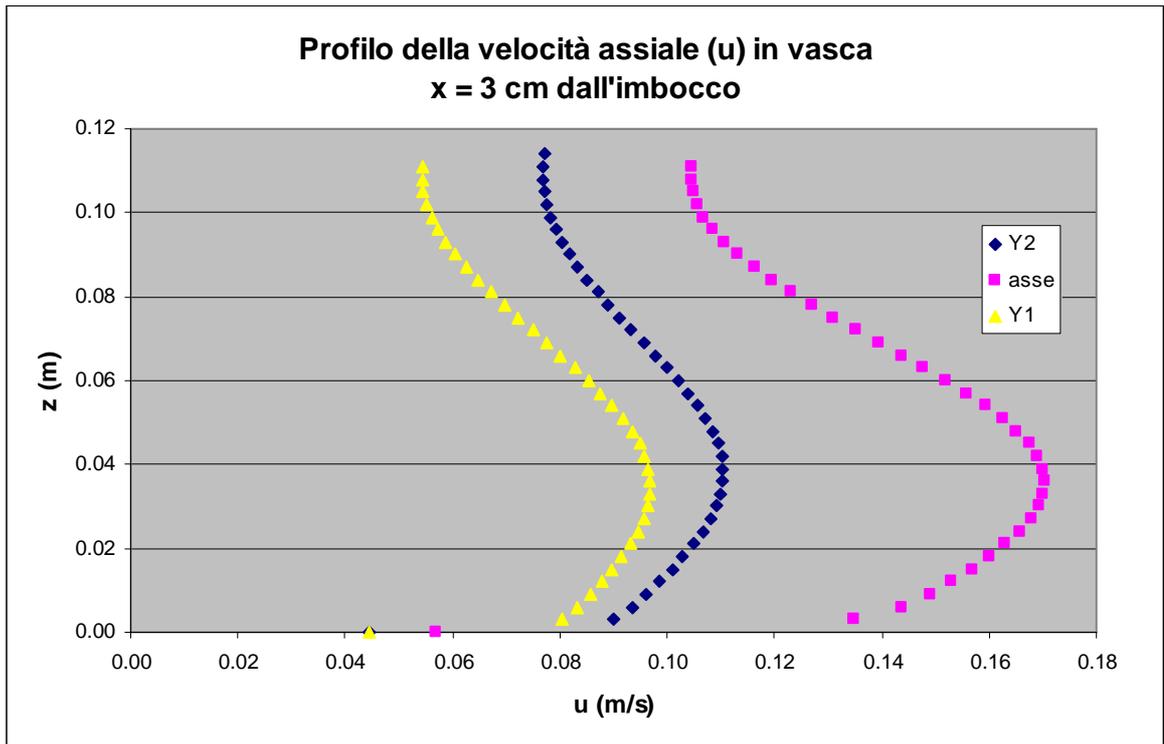
*Tab. 5.22. Prova con  $h = 105.0$  mm sulla soglia. Velocità assiali in vasca.  $x = 3$  cm dalla luce*



*Fig. 5.38. Prova con  $h = 105.0$  mm sulla soglia. Velocità assiali in vasca.  $x = 1$  cm dalla luce*

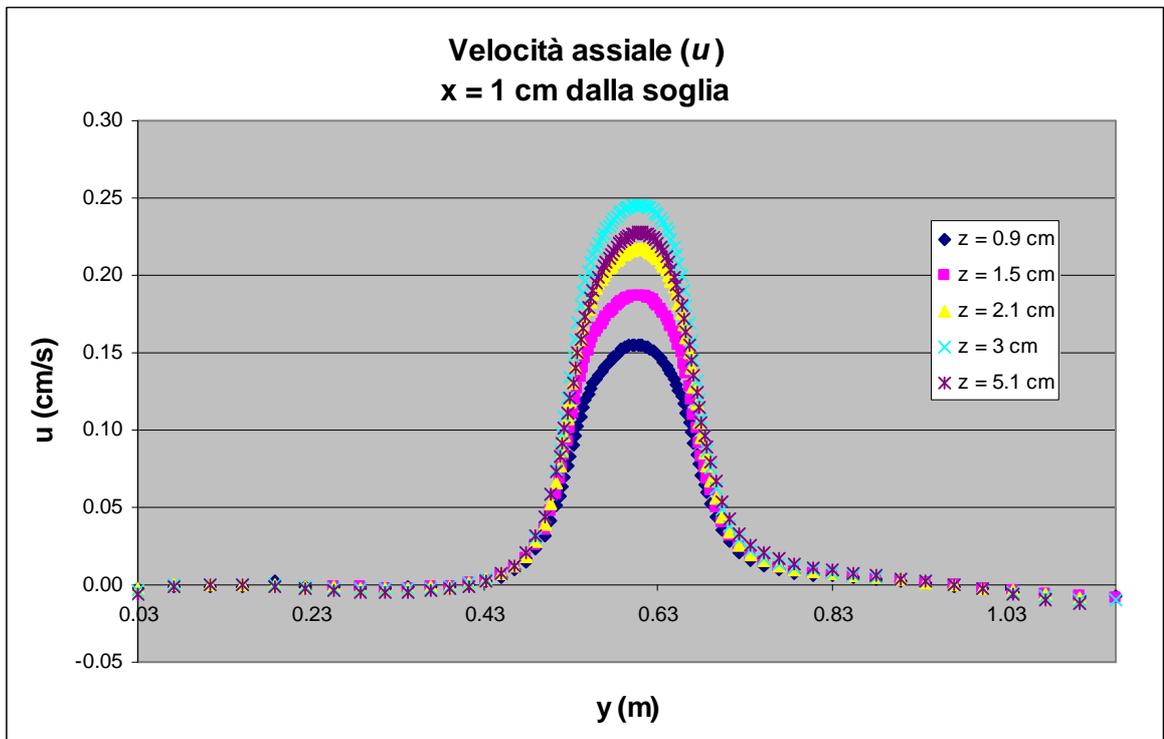


*Fig. 5.39. Prova con  $h = 105.0$  mm sulla soglia. Velocità assiali in vasca.  $x = 2$  cm dalla luce*

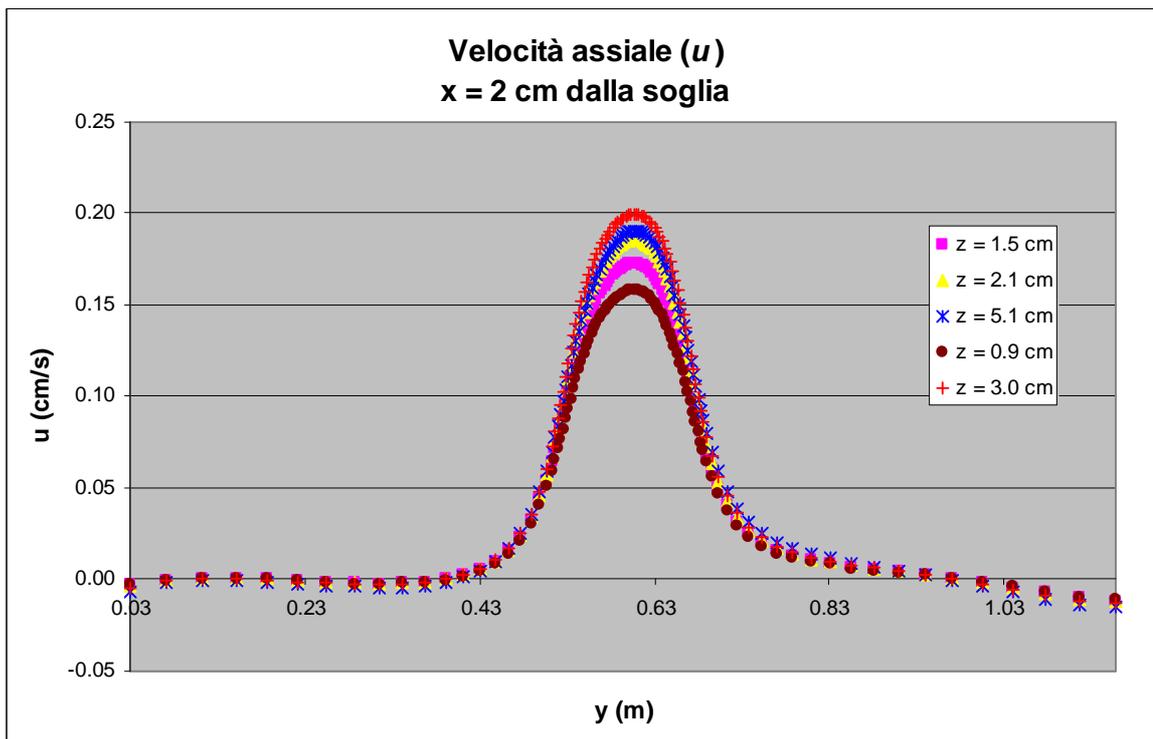


*Fig. 5.40 Prova con  $h = 105.0$  mm sulla soglia. Velocità assiali in vasca.  $x = 3$  cm dalla luce*

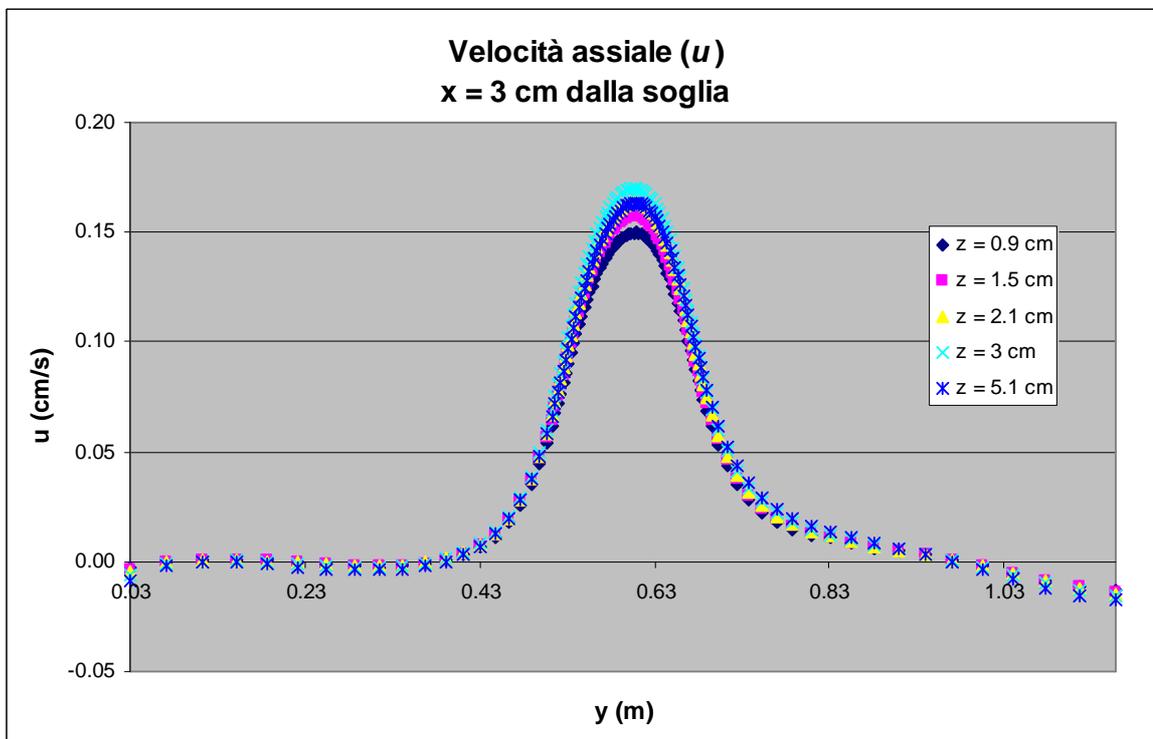
Le figure 5.41 – 5.43 riportano i profili delle velocità assiali valutati sull'intera sezione, a diverse altezze  $z$  dal fondo (0.9, 1.5, 2.1, 3.0 e 5.1 cm), ad  $x = 1, 2$  e 3 cm dalla soglia.



*Fig. 5.41. Prova con  $h = 105.0$  mm. Profili delle velocità assiali in vasca.  $x = 1$  cm dalla luce.*



*Fig. 5.42. Prova con  $h = 105.0$  mm. Profili delle velocità assiali in vasca.  $x = 2$  cm dalla luce.*



*Fig. 5.43. Prova con  $h = 105.0$  mm. Profili delle velocità assiali in vasca.  $x = 3$  cm dalla luce.*

I grafici mostrano un andamento simile dei profili, con valore massimo in corrispondenza della mezzeria della luce di fondo. Lo scostamento alle diverse altezze risulta inoltre più pronunciato in prossimità della luce, dove è più sensibile il richiamo della corrente verso l'imbocco.

#### ***5.2.5.1 Confronto con i dati sperimentali***

Al fine di verificare la correttezza dei risultati illustrati al paragrafo precedente, sono state eseguite misure sperimentali delle velocità all'interno della vasca, utilizzando sia il micromulinello che la sonda Nortek ADV Vector, dei quali si è accennato nel capitolo 4.

A fronte dei limiti di funzionamento di entrambi gli strumenti, è stato possibile effettuare le misure soltanto in prossimità dell'imbocco, dove il livello della corrente e le velocità erano tali da rientrare nel campo di validità dei misuratori.

In particolare, le elaborazioni sono riferite ad una verticale posta in corrispondenza della mezzeria della luce di fondo, ad una distanza di 1 cm dalla soglia.

I valori misurati e simulati dal codice sono riportati in *tab. 5.23*, e i corrispondenti profili di velocità sono rappresentati graficamente in *figura 5.44*.

Micromulinello		ADV		FLOW 3D	
x=1 cm		x=1 cm		x=1 cm	
u (cm/s)	z (mm)	u (cm/s)	z (mm)	u (cm/s)	z (mm)
0.22	6.0	0.16	0	0.00	0.0
0.27	16.0	0.19	10	0.12	3.0
0.26	26.0	0.25	20	0.14	6.0
0.23	36.0	0.26	30	0.15	9.0
0.18	46.0			0.17	12.0
0.13	56.0			0.19	15.0
0.10	66.0			0.20	18.0
0.08	76.0			0.22	21.0
0.07	86.0			0.23	24.0
				0.24	27.0
				0.24	30.0
				0.25	33.0
				0.25	36.0
				0.25	39.0
				0.25	42.0
				0.24	45.0
				0.23	48.0
				0.23	51.0
				0.22	54.0
				0.21	57.0
				0.20	60.0
				0.19	63.0
				0.18	66.0
				0.17	69.0
				0.16	72.0
				0.15	75.0
				0.14	78.0
				0.13	81.0
				0.13	84.0
				0.12	87.0
				0.12	90.0
				0.11	93.0
				0.11	96.0
				0.11	99.0
				0.10	102.0
				0.10	105.0
				0.10	108.0
				0.10	111.0

**Tab. 5.23.** Prova con  $h = 105.0$  mm.  $X = 1$  cm dalla soglia – Tfin. Velocità assiali misurate e simulate

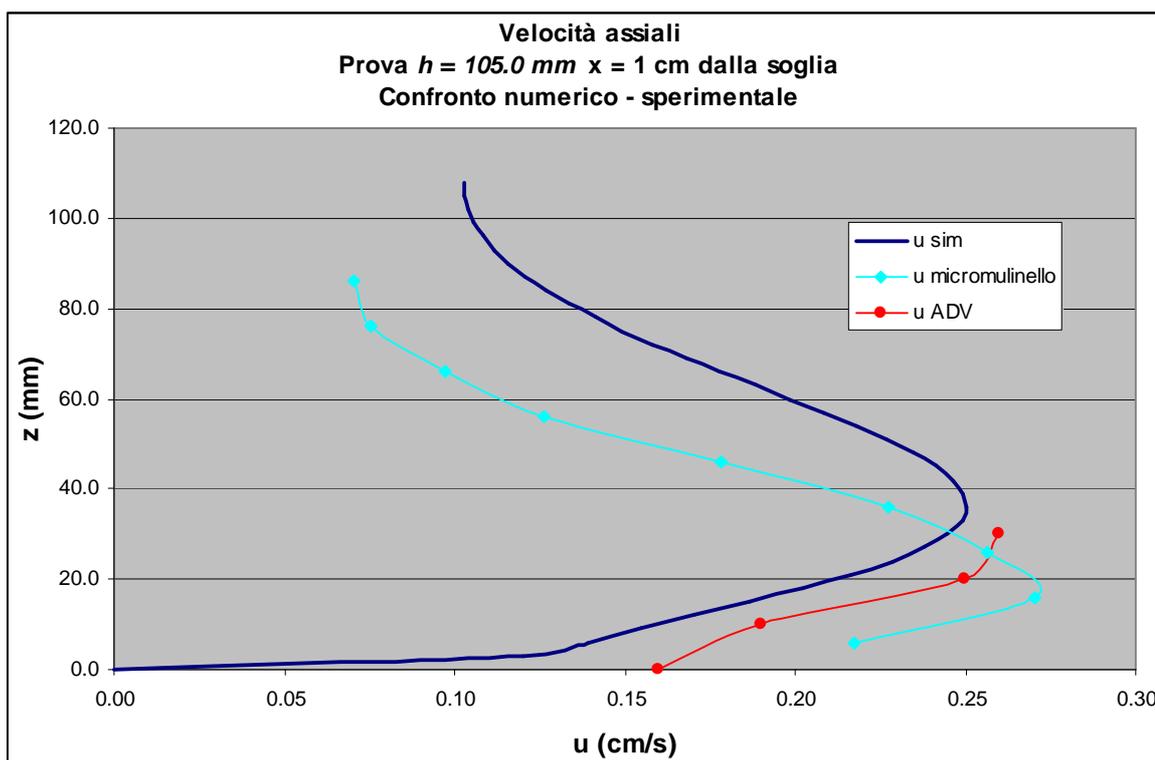


Fig. 5.44. Prova con  $h = 105.0$  mm. Profili delle velocità assiali in vasca.  $x = 1$  cm dalla luce (in mezzeria).

Il confronto evidenzia in primo luogo che il profilo della velocità assiale ottenuto dalle simulazioni numeriche presenta un andamento prossimo a quello osservato sperimentalmente. Inoltre, si nota che il valore massimo del diagramma di velocità simulato è simile a quello osservato con i due strumenti.

Con il micromulinello è stato possibile misurare le velocità lungo la verticale in un numero di punti maggiore rispetto alla sonda ADV.

Le differenze riscontrate tra i profili sperimentali e quello numerico sono imputabili ad una serie di fattori. In primo luogo le oscillazioni del livello della corrente all'interno della vasca, che determinano variazioni delle velocità nei diversi istanti. In secondo luogo, il micromulinello è uno strumento adatto alla misura della velocità all'interno di correnti sostanzialmente lineari; la conformazione del modello fisico è tale che, come è stato possibile riscontrare, le componenti di velocità nelle altre direzioni siano dello stesso ordine di grandezza di quella assiale, specie in prossimità dell'imbocco. Le semplificazioni indotte nel modello implementato nel codice di calcolo non tengono pertanto conto di questo fenomeno.

### 5.2.6 Verifiche nel canale

Sono state eseguite verifiche anche all'interno del canale, valutando in particolare le altezze idriche e le velocità. Nel seguito si riportano i risultati, in forma tabellare e grafica, di alcune elaborazioni condotte.

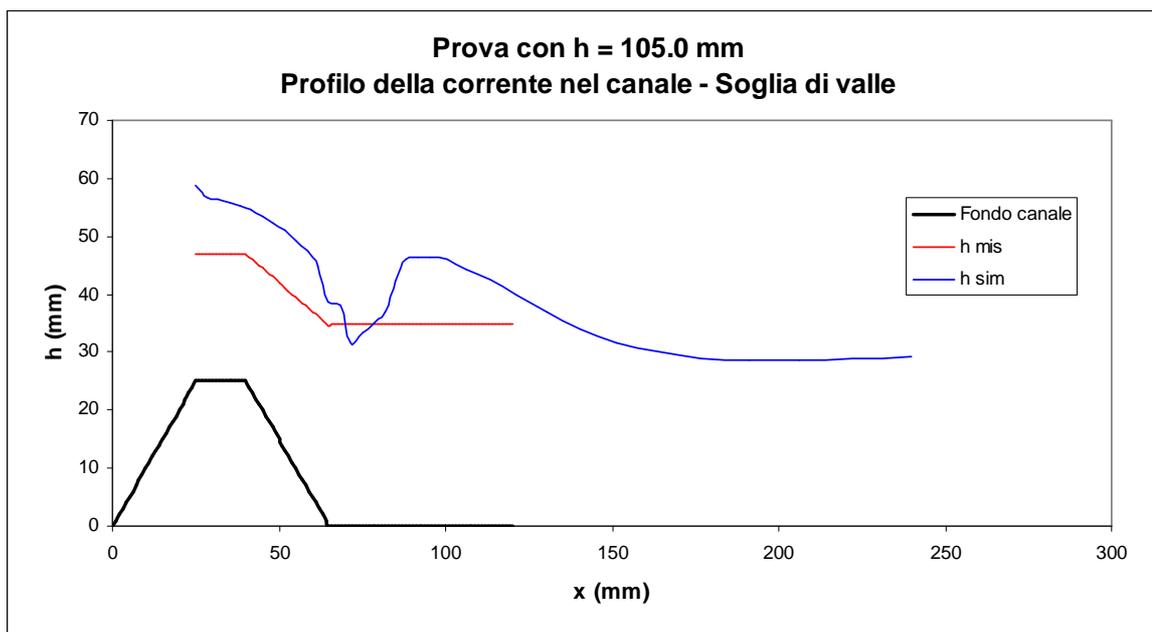
#### 5.2.6.1 Profilo della corrente sulla soglia di valle

La seguente *tab. 5.23* riporta le altezze della corrente fornite dal codice di calcolo, relativamente alla prova con  $h = 105.0$  mm, all'istante finale della simulazione. Le distanze  $x$  sono riferite al piede della soglia. Accanto alle altezze simulate, sono riportati anche i valori osservati sperimentalmente in corrispondenza della medesima prova.

La *fig. 5.43* riporta l'andamento dei profili corrispondenti.

<b>x (mm)</b>	<b><math>h_{\text{mis}}</math> (mm)</b>	<b><math>h_{\text{sim}}</math> (mm)</b>
25	47	58.84
32	47	56.44
35	47	55.95
38	47	55.33
42	46	54.59
45	44.5	53.32
48	43	52.33
52	41	51.17
55	39.5	49.33
58	38	47.65
62	36	45.04
65	34.5	38.68
68	35	38.16
75	35	33.49
82	35	36.91
85	35	42.37
88	35	46.05
96	35	46.51
100	35	45.93
106	35	44.38
113	35	42.50
121		39.92
130		36.81
140		34.02
151		31.69
164		30.03
177		29.08
191		28.58
206		28.68
223		29.00
240		29.35

**Tab. 5.23.** Prova con  $h = 105.0$  mm – T fin. Altezze della corrente sulla soglia di valle

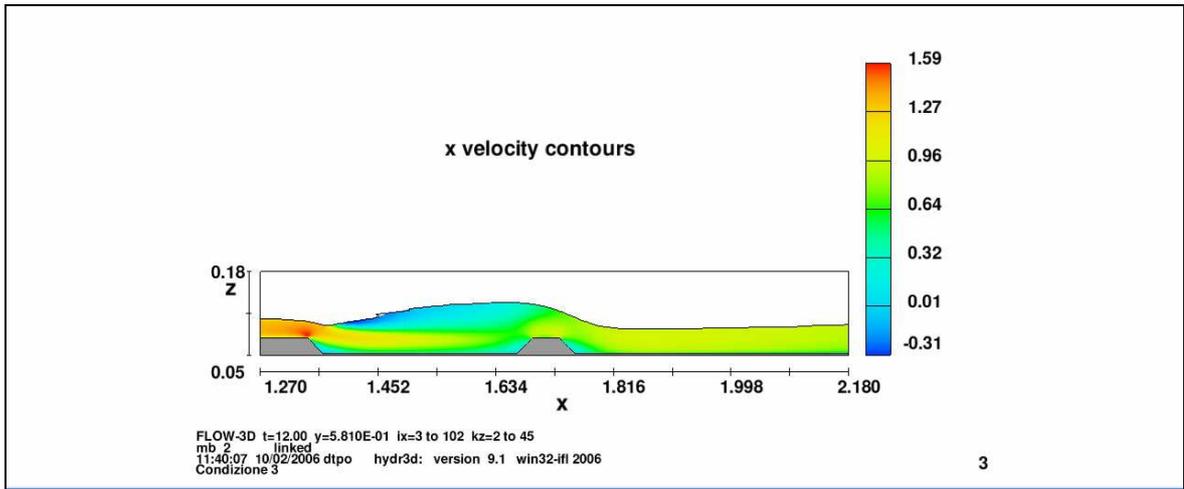


*Fig. 5.43. Prova con  $h = 105.0$  mm. Profili di corrente sulla soglia di valle*

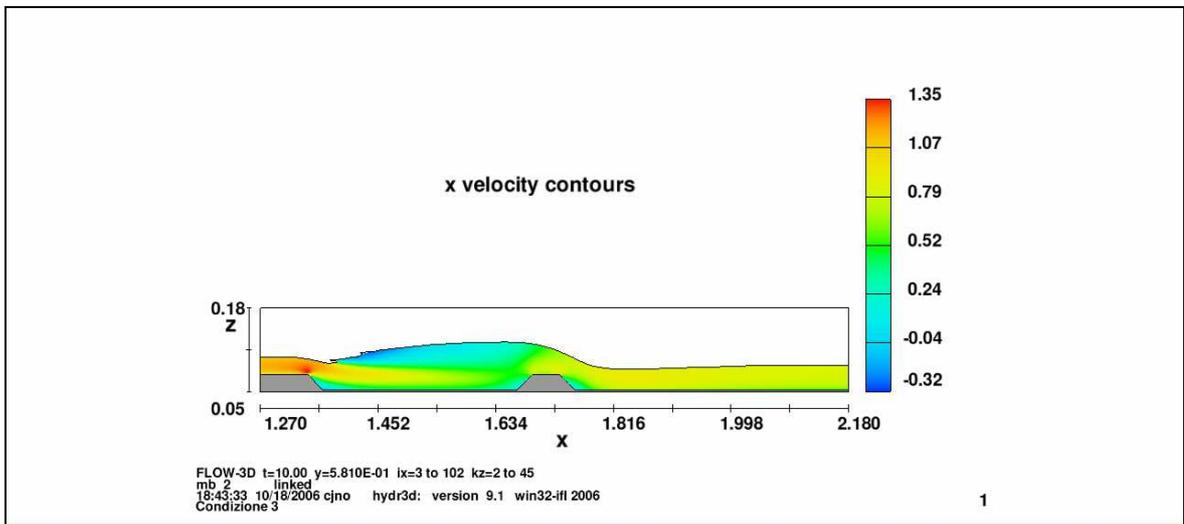
### 5.2.6.2 *Risalto idraulico*

Le prove sperimentali condotte in laboratorio hanno evidenziato, in corrispondenza delle portate maggiori ( $h = 110.0, 105.0, 96.40, 89.50, 71.90$  mm), la formazione di un risalto idraulico all'interno del canale, nel tratto compreso tra le due soglie.

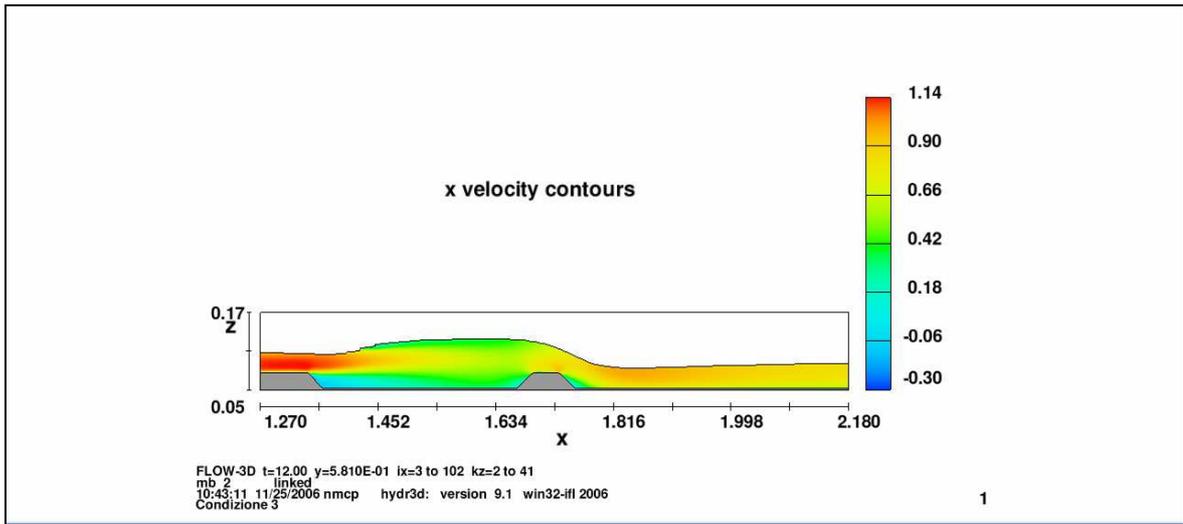
Le simulazioni numeriche hanno confermato questa evidenza sperimentale, come rappresentato dalle seguenti *Figg. 5.44 – 5.48*.



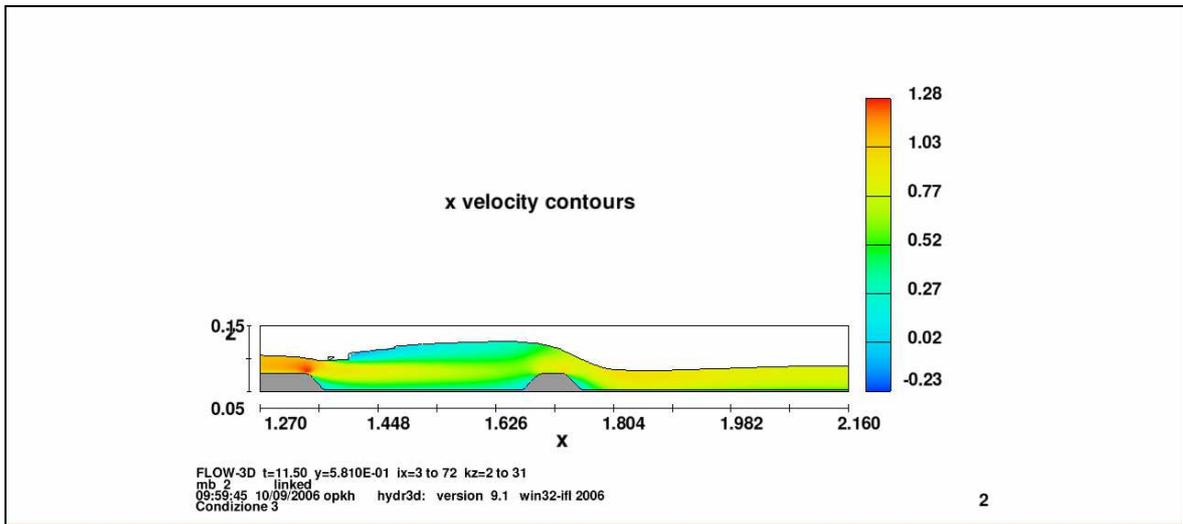
*Fig. 5.44. Prova con  $h = 110.0$  mm – Tfin. Risalto idraulico tra le due soglie*



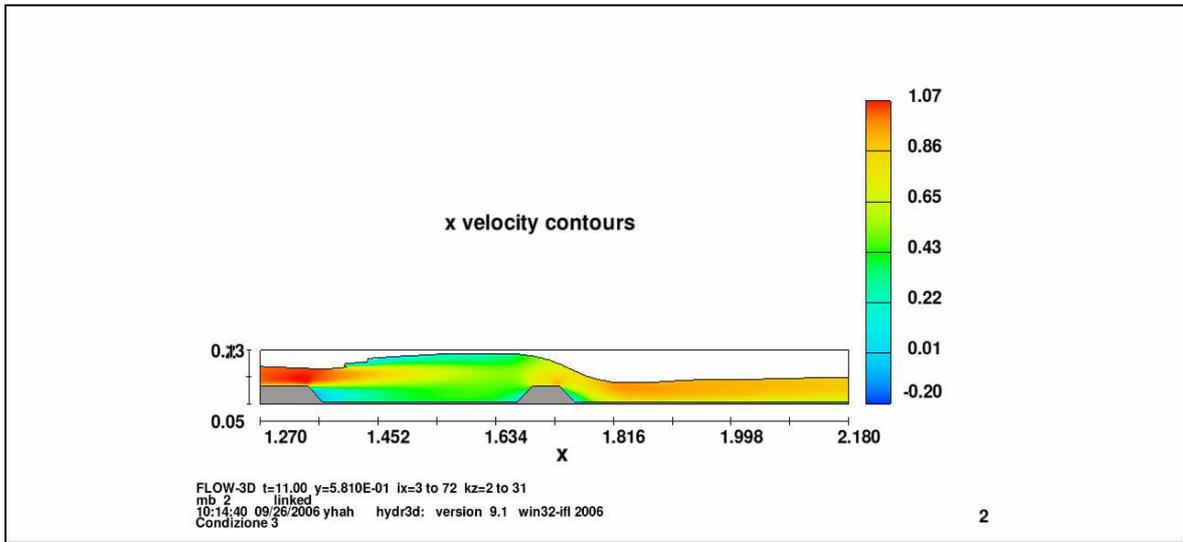
*Fig. 5.45. Prova con  $h = 105.0$  mm – Tfin. Risalto idraulico tra le due soglie*



*Fig. 5.46. Prova con  $h = 96.40$  mm – Tfin. Risalto idraulico tra le soglie*



*Fig. 5.47. Prova con  $h = 89.50$  mm – Tfin. Risalto idraulico tra le soglie*



*Fig. 5.48. Prova con  $h = 71.90 \text{ mm}$  – Tfin. Risalto idraulico tra le due soglie*

## CAPITOLO 6

### CONCLUSIONI

Nella presente tesi è stato affrontato il problema della modellazione del fenomeno di efflusso da una vasca di laminazione delle piene, effettuando uno studio sia numerico che sperimentale su un'installazione di laboratorio che riproduce il fenomeno.

Le osservazioni sperimentali hanno riguardato in particolare la misura delle seguenti grandezze: portata, livelli idrici, pressioni e velocità.

Per eseguire le misure di portata nella vasca di laminazione sono stati utilizzati due strumenti: uno stramazzo triangolare in parete sottile (Thomson) e un misuratore ad induzione elettromagnetica collegato ad una condotta del circuito di alimentazione del modello.

Le misure dei livelli sono state eseguite utilizzando un'asta idrometrica a lettura digitale per la lettura dei livelli in vasca e nel canale a valle ed un trasduttore di pressione collegato a nove prese piezometriche presenti all'interno della vasca.

Il trasduttore è stato utilizzato altresì per effettuare la misura delle pressioni sul fondo della vasca stessa.

Per eseguire le misure di velocità sono stati utilizzati due strumenti: un micromulinello ed il misuratore tridimensionale Nortek ADV – Vector.

Il primo ha consentito di effettuare misure della componente longitudinale della velocità, limitatamente al range 5 – 150 cm/s. Il secondo strumento ha invece consentito di misurare le tre componenti di velocità all'interno di un definito volume di controllo, ma soltanto in corrispondenza di adeguati livelli idrici, per i limiti di funzionamento dello strumento medesimo.

La modellazione numerica tridimensionale di una corrente è stata condotta risolvendo le equazioni di Navier – Stokes accoppiate ad un opportuno modello di chiusura.

Il modello numerico si vale di una discretizzazione del campo attraverso volumi finiti, in pratica celle prismatiche di dimensioni definibili dall'utente. Quelle impiegate sono di dimensioni variabili tra i 2 ed i 3 millimetri nella sezione trasversale ( $\Delta y$  e  $\Delta z$ ), mentre nella direzione longitudinale la dimensione  $\Delta x$  è variabile tra 3 mm e qualche cm, con passo più fitto nei tratti maggiormente significativi.

Le condizioni al contorno sono state imposte con riferimento ad una situazione di regime, con portata stabilizzata e livello costante in vasca.

Il modello fisico è stato rappresentato ricorrendo ad una descrizione semplificata, rappresentando con una discreta cura il profilo di fondo, rilevato ed elaborato opportunamente, mentre la pianta è stata riprodotta rettangolare.

Dopo alcune prove effettuate si è scelto di assegnare al modello una scabrezza assoluta di 0.5 mm.

Come condizione iniziale è stata considerata per alcune prove una condizione idrostatica (condizione 1), con vasca piena ed apertura istantanea della luce di fondo; a causa delle forti oscillazioni riscontrate si è pertanto pensato di effettuare altre prove impostando una condizione che consentisse in pratica un riempimento graduale della vasca (condizione 2), fino al raggiungimento del livello a regime, coincidente con la condizione al contorno imposta per ciascuna prova.

Per la valutazione della turbolenza si è impiegato il modello *RNG* (*Renormalization Group*), che utilizza le stesse equazioni del noto modello *k -  $\epsilon$*  standard, nel quale i parametri sono trovati empiricamente, mentre nel modello *RNG* sono derivati in modo esplicito.

Generalmente tale modello può essere applicato in una varietà più ampia di casi rispetto al modello *k -  $\epsilon$*  standard.

Sono stati simulati in tutto 13 casi, con le due differenti condizioni iniziali: 6 prove con la condizione 1 e 7 prove con la condizione 2.

Per l'esecuzione delle simulazioni è stato usato un computer parallelo biprocessore doppio Xeon HP workstation xw 8000.

I tempi di calcolo necessari per lo svolgimento delle simulazioni sono risultati molto variabili in dipendenza sia della mesh di calcolo che, seppure in maniera meno evidente, della durata stabilita per ciascuna prova. Al crescere della griglia di calcolo e della durata della prova corrisponde conseguentemente una maggiore dimensione del file di output.

La durata delle prove è stata imposta pari a 12 secondi per 12 prove, a 10 secondi per una prova, ritenendo in tal modo di raggiungere la situazione di regime.

Il dominio di calcolo per la prova caratterizzata dalla portata più elevata e dal livello maggiore in vasca è risultato composto da 700.000 celle, di cui 480.000 nella vasca e 220.000 nel canale a valle. Per le altre prove, caratterizzate da livelli inferiori, si è cercato di diminuire il numero di celle, pur se l'ordine di grandezza è rimasto sostanzialmente invariato.

I tempi necessari all'esecuzione delle simulazioni numeriche sono risultati variare dalle 48 ore circa a 7 giorni.

L'analisi delle soluzioni ha riguardato innanzitutto il calcolo della portata, che è stata valutata nella sezione più a valle del dominio di calcolo nel canale, ad 1 m circa dall'imbocco della luce di fondo della traversa. In tale sezione si può infatti ritenere che la corrente sia sostanzialmente indisturbata.

Sono state quindi acquisite le velocità, le pressioni ed i livelli idrici all'interno sia della vasca che del canale.

I riscontri con il modello hanno riguardato, come già detto, l'osservazione delle medesime grandezze, al fine di verificare la rispondenza dei risultati numerici delle elaborazioni.

In conclusione: il modello ha dimostrato di poter rappresentare il fenomeno nelle sue linee essenziali, facendo uso di un minimo numero di parametri (scabrezza).

La curva portate-livelli viene riprodotta correttamente, salvo fenomeni di oscillazione dovuti ai ridotti tempi di calcolo.

Non è stato possibile, per limiti dell'installazione sperimentale e per la lunghezza dei tempi di calcolo, ottenere più approfonditi riscontri, in particolar modo, sulle componenti di velocità, a causa dei limiti di funzionamento di cui si è precedentemente accennato.

I risultati sin qui ottenuti hanno quindi fornito indicazioni positive, indirizzando le ricerche future al raggiungimento di un'accuratezza maggiore nella descrizione del modello, al fine di riuscire ad investigare, in particolare, le caratteristiche della turbolenza. Adeguati accorgimenti sul modello fisico consentiranno, inoltre, di effettuare rilievi accurati del campo di moto all'interno del sistema investigato.

Sarà infine necessario disporre di risorse hardware più potenti, al fine di poter da un lato ridurre i tempi di calcolo, e dall'altro, di conseguenza, estendere la durata della simulazione ed approfondire il livello di dettaglio nella discretizzazione del dominio di calcolo, costruendo una mesh quanto più possibile fitta, riducendo le dimensioni delle celle.

## CAPITOLO 7

### BIBLIOGRAFIA

1. Ackers, A., White, W.R., Perkins, J.A. and Harrison, A.J.M (1978), *Weirs and flumes for flow measurements*, Chapter 3, pp.44-85, John Wiley & Sons, New York.
2. Adzhemyan L. Ts., Antonov N.V. and Vasiliev A.N. (1999), *The field theoretic Renormalization Group in Fully Developed Turbulence* – Gordon and Breach Science Publishers. ISBN 90-5699-145-0. 1999.
3. Ashby S.F., Manteuffel T.A. and Saylor P.E. (1990), *A Taxonomy for Conjugate Gradient Methods*, SIAM J. Num. Anal., 1990, pp.1542-1568.
4. Barrett R. (1994), *Templates for the Solution of Linear Systems Building Blocks for Iterative Methods* , ([www.netlib.org/templates/Templates.html](http://www.netlib.org/templates/Templates.html)).
5. Bos, M.G.(ed.) (1989), *Discharge measurement structures*, 3<sup>rd</sup> ed., Int.Institute for Land Reclamation and Improvement, Wageningen, The Netherlands.
6. Calomino F. , Fallico C. , Piro P. (1988), *Sul coefficiente d'efflusso di uno stramazzo Thomson a contrazione incompleta*, Università della Calabria, Dipartimento di Difesa del Suolo, 1988.
7. Ciofalo M. (2005). *Modelli di turbolenza* (UIT Summer School 2005), [http://din.din.unipa.it/Struttura/Personale/Profili/ciofalo\\_allegati](http://din.din.unipa.it/Struttura/Personale/Profili/ciofalo_allegati))
8. Flow Science Inc. (2005), *Flow 3D User Manual*.
9. Gentilini B. (1941), *Efflusso dalle luci soggiacenti alle paratoie piane inclinate e a settore*. L'Energia Elettrica 18, pp. 361-380
10. Gibson A.H. (1920), *Experiments on the coefficients of discharge under rectangular sluice-gates*. Institution of Civil Engineers, Selected Paper 207, pp. 427-434.
11. Harlow F.H. and Nakayama P.I. (1967), *Turbulence Transport Equations*, Phys. of

- Fluids, 10, 2323, 1967.
12. Herschy, R.W. (1978), *Hydrometry*, pp. 91-94, John Wiley & Sons, New York.
  13. Hinze O. (1959). *Turbulence*, Mc Graw Hill, New York.
  14. Hirt C.W. (1978), *Simplified Solution Algorithms for Fluid Flow Problems*, Proc. Numerical Methods for Partial Differential Equations Seminar, University of Wisconsin, Academic Press, 1978.
  15. Hirt C.W. (2000), *Automatic Limited Compressibility*, Flow-3D Technical Note #55, December 2000, (FSI-00-TN55).
  16. Hirt C.W. and Nichols B.D. (1981), *Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries*, J. Comp. Phys., 39, 201, 1981.
  17. Hirt C.W. and Richardson J.E. (1999), *The Modeling of Shallow Flows*, Flow-3D Technical Note #48, March 1999, (FSI-99-00-TN48R).
  18. Hirt C.W. and Sicilian J.M. (1985), *A Porosity Technique for the Definition of Obstacles in Rectangular Cell Meshes*, Proc. Fourth International Conf. Ship Hydro., National Academy of Science, Washington, DC, September 1985.
  19. Ho D.K.H., Boyes K.M. and Donhoo S.M. (2001). *Investigation of spillway behaviour under increased maximum flood by computational fluid dynamics technique*, 14<sup>th</sup> Australian Fluid Mechanics Conference, Adelaide University - Adelaide, Australia, 10-14 dec. 2001
  20. Hurst H.E.; Watt D.A.F. (1925), *The similarity of motion of water through sluices of the Assuan dam*. Proc. Inst Civil Eng 218, pp. 72-180
  21. Kindsvater, C.E. and Carter, R.W. (1957), *Discharge characteristics of rectangular thin-plate weirs*, J. Hydraulics Div., Vol. 83, No. HY6, paper No.1453, pp 1-36.
  22. Knauss J.A. (1978), *Introduction to Physical Oceanography*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1978.
  23. La Rocca M., *Appunti di turbolenza*. Dispensa didattica sul sito [www.uniroma3.it](http://www.uniroma3.it)
  24. Launder, B.E. and Spalding, D.B. (1972). *Mathematical Models of Turbulence*, Academic Press, London.
  25. Lee, D.H. (2006). *Research on flow characteristics of side weirs using Flow-3D*, 7<sup>th</sup> International Conference on Hydroinformatics, HIC 2006, Nice, France.

26. Lesieur, M. (1990), *Turbulence in Fluids*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
27. Lewin J, (1995) *Hydraulic gates and valves*. Thomas Telford, London, UK
28. Montes JS (1997). *Irrrotational flow and real fluid effects under planar sluice gates*. J Hydraulic Eng 123, pp. 219-232.
29. Munson, B.R., Young, D.F. and Okiishi, T.H. (1994), *Fundamentals of fluid mechanics*, 2<sup>nd</sup> ed., JohnWiley and Sons, Inc., New York.
30. Nago H (1978). *Influence of gate-shapes on discharge coefficients*. Trans. Japanese Soc Civil Engr 10, pp. 116-119
31. Negm A.–A. M., Al–Brahim A.M., Alhamid A.A. *Combined-free flow over weirs and below gates*, Journal of Hydraulic Research, Vol.. 40, 2002, N°. 3
32. Noutsopoulos e Fanariotis (1978). *Discussion to Free flow immediately below sluice gates*, by N. Rajaratnam. J Hydraulics Div ASCE 104, pp. 451-454
33. Pedlosky J. (1987). *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1987.
34. Rajaratnam, N. (1977). *Free flow immediately below sluice gates*, Proc. ASCE, J. Hydraulics Div., Vol. 103, No. HY4, pp. 345-351.
35. Rajaratnam N, Humphries JA (1982). *Free flow upstream of vertical sluice gates*. J Hydraulic Res 20, pp. 427-436.
36. Rajaratnam N, Subramanya K (1967). *Flow equation for the sluice gate*. J Irrigation Drainage Div ASCE 93.
37. Reynolds W.C. (1976). *Computation of Turbulent Flows*, Ann. Rev. Fluid Mech. 8, 183 – 208
38. Rodi W. (1980), *Turbulence Models and Their Application in Hydraulics - A State of the Art Review*, International Association of Hydraulic Research publication, June 1980.
39. Roth A., Hager W.H., “*Underflow of standard sluice gate*“, Experiments in Fluids 27 (1999), 339 – 350 – Springer-Verlag
40. Saad Y. (1996), *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, 1996 (out of print; available at [www-users.cs.umn.edu/~saad/books.html](http://www-users.cs.umn.edu/~saad/books.html)).
41. Savage B.M., Johnson M.C. (2001). *Flow over ogee spillway: physical and*

- numerical model case study*, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 127, No 8, pp. 640-649.
42. Smagorinsky J. (1963), *General Circulation Experiments with the Primitive Equations*, Monthly Weather Rev., 91, pp. 99-165, 1963.
  43. Spalding, D.B. (1978), *Discussion on "Turbulence Models for Heat Transfer"*, Proc. 8<sup>th</sup> International Heat Transfer Conference, Toronto, Canada, Vol. 8, p. 8.
  44. Swamee, P.K. (1988), *Generalized rectangular weir equations*, J. Hydraulic Engineering, Vol. 114, No. 8, pp. 945-949.
  45. Tennekes H., Lumley J.L. (1972). *A first course in turbulence*, Cambridge, Mass. MIT Press.
  46. Yakhot V. and Orszag S.A. (1986), *Renormalization Group Analysis of Turbulence. I. Basic Theory*, J. Scientific Computing, 1, pp. 1-51, 1986.
  47. Yakhot V. and Smith L.M. (1993), *The Renormalization Group, the Expansion and Derivation of Turbulence Models*, J. Scientific Computing, 7, pp. 35-61, 1993.
  48. Yao G.F. *Development of New Pressure-Velocity Solvers in FLOW-3D*, Flow Science Technical Note #68 (FSI-04-TN68).