
Capitolo 4

Determinazione numerica dei macrolegami costitutivi

In tale capitolo verranno presentati i risultati numerici ottenuti mediante l'utilizzo di un modello agli elementi finiti, in grado di valutare la risposta costitutiva macroscopica di materiali compositi, caratterizzati da microstrutture fortemente eterogenee. In particolare, oggetto delle analisi numeriche sono stati due tipi di microstrutture: i compositi con *matrice porosa* ed i compositi *rinforzati* mediante l'inserimento di fibre corte. In entrambi i casi si è studiata l'influenza sulle proprietà globali della presenza di micro-cracks all'interno della microstruttura, mostrando il differente comportamento macroscopico dei due materiali.

4.1 Introduzione

Negli ultimi anni i materiali compositi sono diventati di uso comune nei diversi ambiti dell'ingegneria, date le loro elevate capacità prestazionali che li lasciano preferire agli usuali materiali da costruzione. A tal riguardo, occorre osservare come i compositi fibro-rinforzati, ad esempio, rappresentano oggi uno dei materiali più utilizzati in ambito navale o aeronautico, nonché, in maniera sempre crescente, anche per le usuali costruzioni civili. Tali materiali, in particolare, sono costituiti da fibre di rinforzo di dimensioni variabili, immerse in una matrice di materiale con caratteristiche meccaniche più scadenti. Appartengono a tale categoria, ad esempio, i compositi rinforzati mediante lunghe fibre unidirezionali, distribuite in maniera uniforme all'interno della matrice, e tali da garantire elevate caratteristiche meccaniche nella direzione ad esse parallela. Occorre osservare come risulta molto difficile valutare le proprietà globali di tali compositi nella direzione ortogonale alle fibre (direzione

trasversale), nonché l'interazione tra il comportamento longitudinale e quello trasversale stesso. A tal riguardo sono presenti in letteratura numerosi lavori atti a valutare le proprietà meccaniche complessive dei materiali compositi fibro-rinforzati, tenendo conto della loro microstruttura ed assumendo, ad esempio, un comportamento elastico lineare per le fibre, e di tipo non-lineare per quanto concerne la matrice. In molti lavori, poi, viene assunto un comportamento *ideale* per il composito, all'interno del quale si ipotizza la perfetta adesione tra le fibre e la matrice, garantita mediante la continuità degli spostamenti a livello delle interfacce tra i materiali. Tuttavia, un tale comportamento è poco veritiero per un composito fibro-rinforzato, specie sotto carichi elevati o carichi ciclici. E' utile osservare come in molti casi, infatti, specie per quanto riguarda i compositi con matrice fragile, i fenomeni di danneggiamento possono verificarsi non solo all'interno della matrice e delle fibre, ma anche e soprattutto a livello delle interfacce tra loro. Le proprietà meccaniche di tali compositi fibro-rinforzati risultano, al riguardo, notevolmente influenzate dall'adesione tra le fibre e la matrice. Nei compositi a matrice polimerica il sistema composito consiste, ad esempio, nell'inserimento di fibre di tipo fragile come la *graphite* o il *boron* all'interno di un matrice di materiale relativamente soffice come l'*epoxy*, e sarebbe richiesto, quindi, un legame sufficientemente resistente tra i vari costituenti. In alcuni materiali a matrice fragile, d'altro canto, i costituenti risultano entrambi di tipo fragile, e pertanto le fibre risultano essere legate alla matrice in maniera estremamente debole [Yuan F.G. et al., 1997]. All'evoluzione di tali difetti interfacciali, che possono verificarsi sia per il caso di fibre lunghe unidirezionali sia per il caso di fibre corte disposte in maniera casuale o pseudo-casuale, risulta associata, in generale, una progressiva perdita di rigidità del materiale, la quale influenza notevolmente i legami costitutivi macroscopici. Tuttavia, il problema di tipo non-lineare della separazione delle fibre dalla matrice, nonché del contatto tra le superfici danneggiate viene trascurato in molte applicazioni presenti in letteratura. Spesso infatti, una fibra scollegata dalla matrice circostante viene rimpiazzata da un'inclusione di dimensioni equivalenti, perfettamente collegata alla matrice stessa, ma con lo stesso comportamento meccanico medio della fibra. Occorre osservare come un'interfaccia danneggiata non sia in grado di trasferire sforzi tangenziali, a causa della separazione tra fibra e matrice, garantendo, tuttavia, il trasferimento di tensioni di compressione,

data la presenza del contatto tra le due superfici del crack. Da tale aspetto emerge chiaramente il comportamento bi-modulare, dal punto di vista delle proprietà di rigidità, di un materiale composito afflitto dal debonding fibra-matrice.

Le analisi micromeccaniche, atte a valutare le proprietà macroscopiche di un materiale composito, tengono in conto la natura dei vari costituenti nonché la loro distribuzione all'interno della microstruttura del materiale eterogeneo stesso. Al fine di garantire una valutazione accurata delle leggi costitutive macroscopiche, occorre, tuttavia, costruire dei modelli microscopici che tengano in conto i possibili fenomeni di danneggiamento o debonding a livello delle interfacce tra i vari microcostituenti. Emerge chiaramente come risulta sufficientemente semplice effettuare delle analisi all'interno delle quali le fibre siano completamente separate dalla matrice, e distribuite mediante un arrangiamento regolare e di tipo periodico. In tale situazione, infatti, diventa possibile valutare la risposta meccanica macroscopica del composito, analizzando semplicemente il comportamento di una cella unitaria, contenente una singola fibra interamente separata dalla matrice circostante, sotto l'applicazione di condizioni periodiche sul contorno. In un materiale composito con microstruttura eterogenea, tuttavia, il danneggiamento interfacciale rappresenta un fenomeno in continua evoluzione, ed il caso in cui tutte le fibre siano contemporaneamente afflitte dal debonding all'interfaccia con la matrice rappresenta solo lo stadio finale di tale fenomeno [Teng H., 2007]. Diventa, quindi, di fondamentale importanza determinare l'evoluzione delle proprietà costitutive globali durante la fase di crescita dei vari micro-cracks. A tal fine, in molti lavori vengono introdotte delle leggi costitutive d'interfaccia di tipo lineare o non-lineare, che legano le trazioni ai salti negli spostamenti tra le facce dei vari micro-cracks presenti [Caporale A. et al., 2006]. Usuale, ad esempio, è l'utilizzo di molle elastiche di tipo fragile, disposte in direzione tangenziale e normale tra le due superfici danneggiate, al fine di simulare il danneggiamento interfacciale tra fibre e matrice. In particolare, l'avanzamento della microfrattura viene simulato mediante il soddisfacimento di un opportuno criterio di frattura, definito coinvolgendo la resistenza a trazione e quella tangenziale di tali molle. Mediante un tale approccio, l'analisi del composito danneggiato a causa dei micro-cracks a livello delle interfacce tra fibre e matrice, conduce ad un problema di equilibrio elastico fortemente non-lineare a causa della continua evoluzione della

frattura, nonché della presenza del contatto unilaterale interfacciale. La principale difficoltà, infatti, per la soluzione di tale problema, consiste nel fatto che la reale area di contatto tra le superfici danneggiate non risulta nota a-priori [Bisegna P., Luciano R., 1998]. Il problema del danneggiamento a livello microscopico riguarda un'altra categoria di materiali compositi ed in particolare i materiali caratterizzati da una matrice fragile di tipo poroso. Occorre osservare che quando tali materiali fragili, come ad esempio i materiali ceramici, sono soggetti a stati tensionali di compressione, all'interno della loro microstruttura si registra la nascita e l'evoluzione di tutta una serie di micro-cracks, che hanno origine, generalmente, da preesistenti vuoti, pori e altri tipi di microdiscontinuità [Wimmer S.A., Karr D.G., 1996]. La presenza di tali microdifetti all'interno della microstruttura influenza anche per i materiali porosi, così come accade nel caso dei materiali fibro-rinforzati a causa dei difetti d'interfaccia tra i costituenti, l'effettivo comportamento meccanico del materiale analizzato. In particolare la formazione e la crescita dei micro-cracks, a partire da pori o vuoti esistenti, conduce ad una progressiva perdita di rigidità a livello macroscopico, come già osservato nel caso del debonding fibra-matrice. La classica teoria del danneggiamento per il continuo rappresenta il più popolare approccio utilizzato al fine di stabilire le relazioni di tipo non-lineare tra macrotensioni e macrodeformazioni, che riflettono a livello macroscopico la continua evoluzione della microstruttura, dovuta alla formazione e alla crescita dei micro-cracks. In particolare, numerosi lavori presenti in letteratura mostrano come la presenza di tali difetti, a livello della microstruttura di tali materiali porosi, produce effetti del primo ordine a livello della macro-scala. In particolare, i cambiamenti che si verificano a livello della micro-scala si riflettono in una continua evoluzione delle proprietà di rigidità e deformabilità globali, che conduce, quindi, ad un comportamento di tipo non-lineare anche per quei compositi i cui costituenti sono di tipo elastico lineare. In questo capitolo vengono investigati proprio i casi del composito con fibre corte caratterizzato dal debonding tra fibra e matrice, e il caso del composito a matrice fragile porosa caratterizzato dalla presenza di micro-cracks a livello della microstruttura. In particolare, seguendo quanto introdotto nel precedente capitolo 3, si utilizzerà un modello micromeccanico, in grado di predire l'influenza sui macrolegami costitutivi dell'evoluzione della microstruttura, per entrambi i materiali analizzati. La propagazione dei micro-cracks

verrà modellata, in particolare, utilizzando la tecnica dell'integrale J , accoppiata ad un modello di interfaccia in grado di tenere in conto le forze di contatto tra le superfici danneggiate.

4.2 Valutazione numerica dei macrolegami costitutivi

Sono stati considerati due tipi di microstruttura bidimensionale come esempi descrittivi del modello micromeccanico proposto. La prima, rappresentativa dei materiali compositi porosi, consiste sostanzialmente in una matrice soffice contenente un vuoto circolare. La lunghezza del lato dell'RVE analizzato è stata indicata con h , mentre il diametro del vuoto circolare d risulta pari a $0.5h$. Il materiale costituente la matrice è caratterizzato dalle seguenti proprietà meccaniche:

$$\begin{cases} E_m = 30GPa \\ \nu_m = 0.17 \end{cases} \Rightarrow \text{Composito a matrice porosa} \quad (4.1)$$

I micro-cracks di lunghezza l evolvono in maniera simmetrica, a partire dal vuoto, nella direzione x_1 . Nel secondo esempio, invece, è stato considerato un composito rinforzato mediante l'inserimento di fibre corte all'interno della matrice, caratterizzato dalla presenza di una fibra concentrica di diametro d_f e lunghezza l_f pari, rispettivamente, a $0.05h$ e $0.5h$ dove h rappresenta ancora la dimensione del lato dell'RVE. In questo caso, le proprietà meccaniche dei costituenti sono le seguenti:

$$\begin{cases} E_m = 2GPa \\ \nu_m = 0.2 \\ E_f = 30E_m \\ \nu_f = 0.33 \end{cases} \Rightarrow \text{Composito fibro - rinforzato} \quad (4.2)$$

La fibra risulta essere perfettamente legata alla matrice circostante eccetto per una regione di lunghezza l a livello dell'interfaccia superiore. Nella creazione del modello agli elementi finiti è stata assunta la condizione di stato piano di deformazione (*Plane*

strain). Il tensore di elasticità macroscopico $\bar{\mathbf{C}}(l)$, nonché i macrocampi di tensione e deformazione, risultano essere indipendenti dalle dimensioni dell'RVE, essendo stata scalata la lunghezza del crack l rispetto alla lunghezza caratteristica del lato dell'RVE stesso. Al contrario, quando viene soddisfatto il criterio di frattura, le tensioni e le deformazioni macroscopiche, valutate rispettivamente mediante la prime delle (3.5) e tramite la relazione relativa al fattore di carico critico (3.35) in funzione della lunghezza del crack l , divengono dipendenti dalle proprietà geometriche e del materiale, relative all'RVE. A tal riguardo, occorre osservare come, per un dato coefficiente di Poisson e per un assegnato rapporto tra i moduli della fibra E_f e della matrice E_m , nonché per una certa frazione di volume occupata dalla fibra nel caso del composito fibro-rinforzato, o dal vuoto per il composito poroso, $G(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, l)$ risulta essere direttamente proporzionale oltre che ad E_m anche ad una lunghezza caratteristica dell'RVE l_c , scelta tra la lunghezza del lato h , la lunghezza della fibra l_f o il diametro del vuoto d . Inoltre, l'energia di rilascio dipende anche dalla lunghezza relativa del crack l/h .

Di conseguenza emerge come, imponendo il soddisfacimento del criterio di frattura, le seguenti macrodeformazioni e macrotensioni adimensionalizzate:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta \sqrt{E_m l_c / G_c} \\ \bar{\sigma}_{ij} \sqrt{l_c / (G_c E_m)} \end{array} \right. \quad (4.3)$$

risultino indipendenti dalle dimensioni dell'RVE, nonché dalle proprietà meccaniche dei costituenti, in entrambi i casi analizzati. Inoltre, al fine di evitare la dipendenza dalle dimensioni dell'RVE e dal modulo di elasticità longitudinale E_m , può essere utilizzata anche la seguente espressione adimensionalizzata per l'energia di rilascio totale:

$$\frac{G}{(E_m l_c)} \quad (4.4)$$

Come mostrato nella seguente Fig.4.1, entrambe le microstrutture sono state discretizzate utilizzando elementi finiti triangolari di tipo quadratico, con un opportuno infittimento della mesh lungo il percorso utilizzato per la valutazione dell'integrale J .

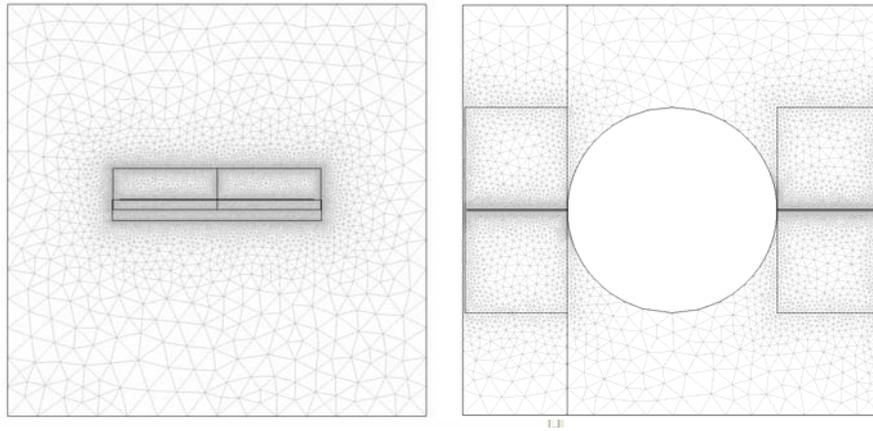


Figura 4.1. Meshes per entrambi i casi di composito poroso (a sinistra) e fibro-rinforzato (a destra).

Come mostrato nella seguente Fig.4.1, entrambe le microstrutture sono state discretizzate utilizzando elementi finiti triangolari di tipo quadratico, con un opportuno infittimento della mesh lungo il percorso utilizzato per la valutazione dell'integrale J .

La Fig.4.1 mostra anche i contorni adottati per il calcolo dell'energia di rilascio in prossimità di ciascun apice della frattura. Per quanto riguarda il composito fibro-rinforzato è stata utilizzata, in particolare, una mesh consistente in 26294 elementi triangolari, ai quali risultano associati 106376 gradi di libertà, mentre per il composito a matrice porosa sono stati impiegati 35680 elementi, ai quali corrispondono 147808 gradi di libertà.

Le successive Fig.4.2 e 4.3, invece, mostrano le configurazioni deformate associate ai due modi uniassiali, sia di compressione che di trazione, nonché al modo da taglio, per entrambi i tipi di microstruttura analizzata e per le tre differenti condizioni al contorno impiegate nella procedura di omogeneizzazione: a) *trazioni uniformi*; b) *fluttuazioni periodiche e trazioni anti-periodiche*; c) *spostamenti lineari*. In particolare, le figure mostrano la configurazione deformata per una lunghezza relativa del crack $l/h=0.125$ per il composito a matrice porosa, e pari a 0.024 per il composito rinforzato mediante fibre corte.

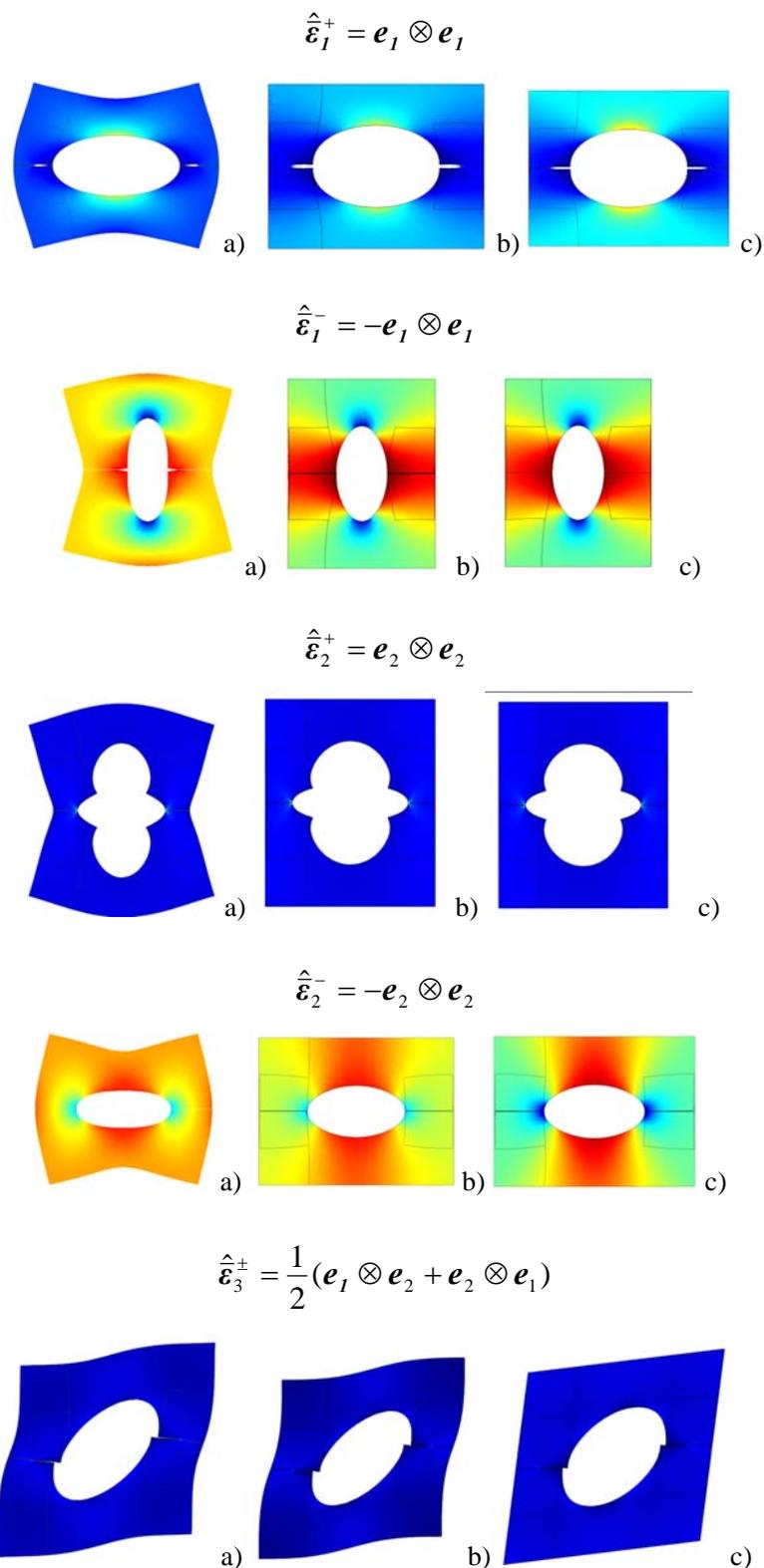


Figura 4.2. Configurazioni deformate per il composito a matrice porosa per i due modi assiali e per il modo da taglio, per le differenti condizioni al contorno adottate, e per una lunghezza del crack relativa $l/h=0.125$.

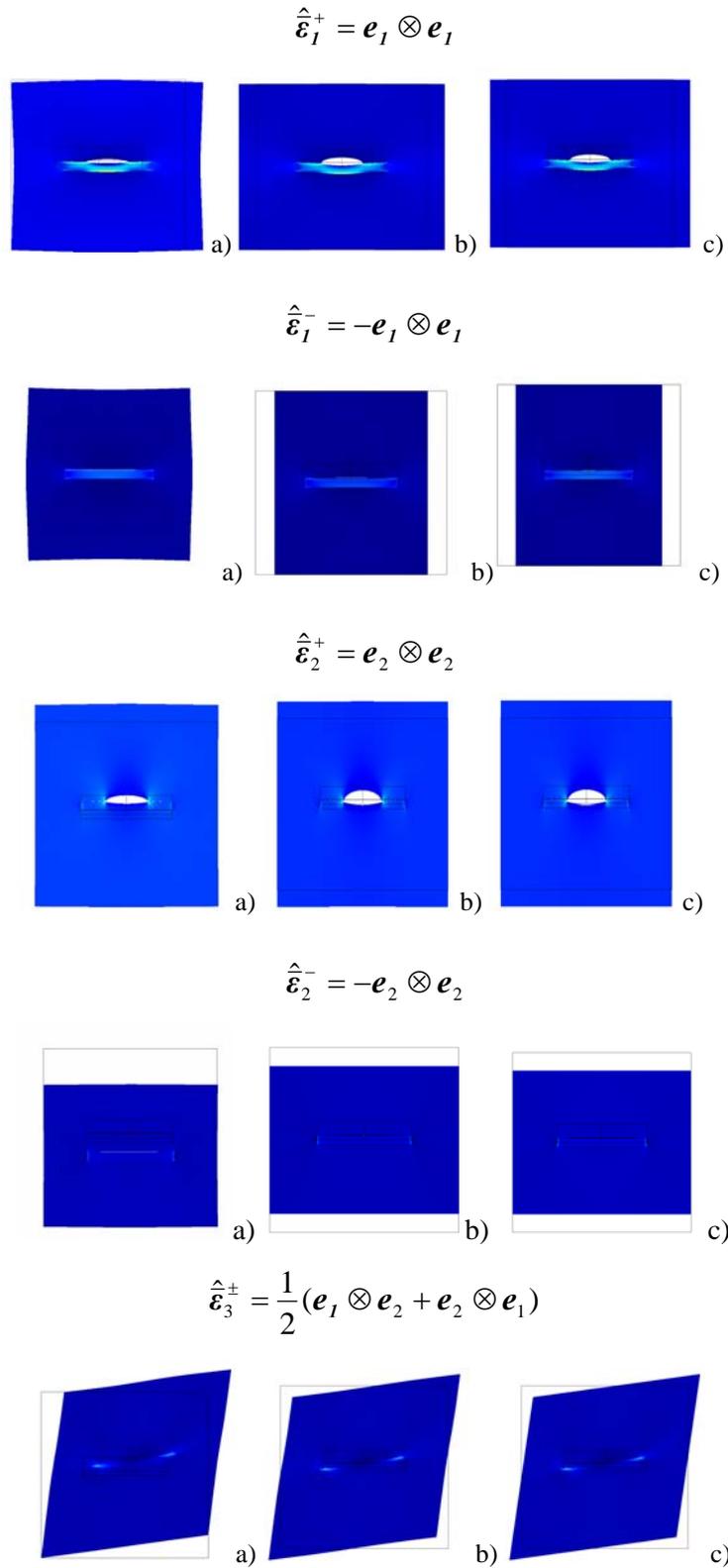


Figura 4.3. Configurazioni deformate per il composito rinforzato mediante fibre corte per i due modi assiali e per il modo da taglio, per le differenti condizioni al contorno adottate, e per una lunghezza del crack relativa $l/h=0.24$.

4.3 Materiale a matrice porosa

Il legame costitutivo macroscopico, per un assegnato percorso di macrodeformazione lungo la direzione x_1 , viene mostrato nella Fig.4.4, per le tre differenti condizioni al contorno considerate: a) *trazioni uniformi*; b) *fluttuazioni periodiche e trazioni anti-periodiche*; c) *spostamenti lineari*. Nelle figure successive, in particolare, si è assunto per E^* il valore seguente:

$$E^* = \frac{E_m}{(1 - \nu_m^2)} \quad (4.5)$$

Nel grafico viene mostrato, per brevità, solo l'andamento della macro tensione $\bar{\sigma}_{11}$ adimensionalizzata in funzione della macrodeformazione imposta.

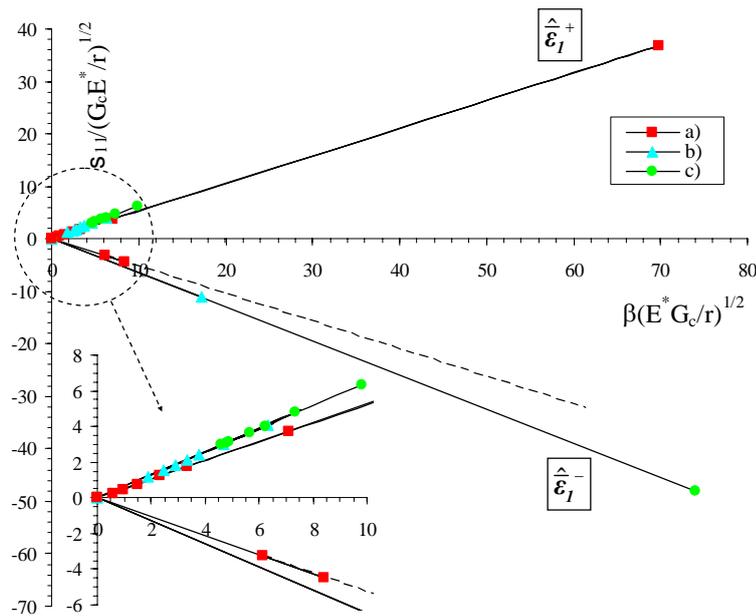


Figura 4.4. Tensione macroscopica $\bar{\sigma}_{11}$ in funzione della macrodeformazione per il percorso di macrodeformazione $\hat{\epsilon}_1^\pm$ e per le differenti condizioni al contorno.

Il comportamento iniziale di tipo lineare del macrolegame costitutivo è caratterizzato dai moduli $\bar{C}(l_0)$, valutati con riferimento alla lunghezza iniziale del crack l_0 . Le simulazioni numeriche hanno mostrato che, per il percorso di macrodeformazione

estensionale $\hat{\varepsilon}_1^+ = \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_l$, le superfici del crack entrano in contatto solo quando, sul contorno dell'RVE, viene imposta la condizione di trazioni uniformi. In tale situazione la regione di contatto, posta vicino al vuoto, risulta essere di dimensioni contenute e per un valore della lunghezza relativa del crack $0 \leq l/h \leq 0.2$. Per il percorso di macrodeformazione di compressione $\hat{\varepsilon}_1^- = -\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_l$, invece, il contatto viene ad essere sempre attivato ed il crack risulta essere completamente chiuso, per entrambe le condizioni al contorno di spostamenti lineari e di fluttuazioni periodiche, mentre per la condizione di trazioni uniformi le forze di contatto sono presenti solo in una piccola zona nei pressi dell'apice del crack di lunghezza relativa l/h pari circa a 0.055. Nelle successive Fig.4.5 a) e b) viene mostrato, poi, l'andamento dell'energia di rilascio. Come mostrato nella Fig.4.5 a) l'energia di rilascio totale $G(\hat{\varepsilon}_1^+, l)$, valutata per il percorso di macrodeformazione positivo $\hat{\varepsilon}_1^+$, risulta essere una funzione crescente della lunghezza del crack per le condizioni al contorno a) e b), mentre presenta un valore di picco per la condizione c) di spostamenti lineari. Occorre osservare come effettuando il calcolo dell'energia di rilascio per entrambi i percorsi scelti alla sinistra e alla destra del vuoto, in corrispondenza dei due differenti cracks, si sono ottenuti i medesimi valori.

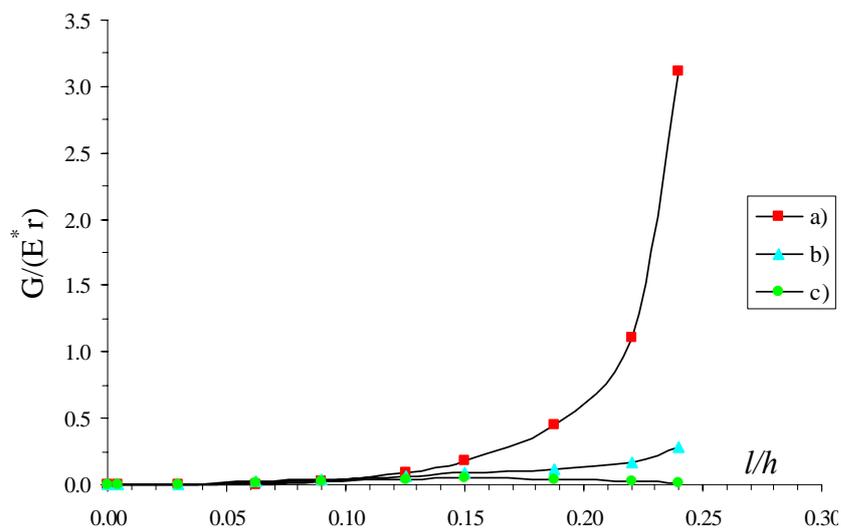


Figura 4.5 a) Variazione dell'energia di rilascio in funzione della lunghezza del crack per il percorso di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_1^+$ e per le differenti condizioni al contorno.

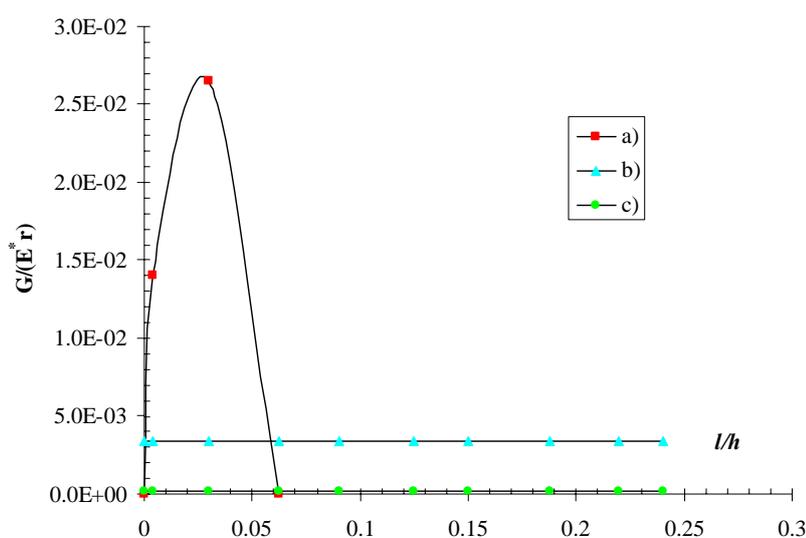


Figura 4.5 b) Variazione dell'energia di rilascio in funzione della lunghezza del crack per il percorso di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_1^-$ e per le differenti condizioni al contorno.

Nel caso del percorso di macrodeformazione di compressione $\hat{\varepsilon}_1^-$, l'energia di rilascio viene rappresentata nella Fig.4.5 b), all'interno della quale è possibile osservare come $G(\hat{\varepsilon}_1^-, l)$ risulta essere praticamente indipendente dalla lunghezza del crack per le condizioni al contorno periodiche e lineari, mentre per la condizione di trazioni uniformi mostra un picco per poi tendere bruscamente a zero per una lunghezza del crack pari circa $0.06h$. Come mostrato dal macrolegame costitutivo, per il modo estensionale e per le condizioni al contorno a) e b) la propagazione del crack avviene per valori decrescenti del fattore di carico critico β , ed in maniera del tutto instabile per valori fissati della macrodeformazione. Ciò causa la presenza di un apprezzabile *snap back* all'interno del macrolegame costitutivo. Ad eccezione di piccoli valori per la lunghezza del crack, l'energia di rilascio per condizioni al contorno di tipo periodico risulta essere limitata, inferiormente da quella corrispondente al caso della condizione di spostamenti lineari, e superiormente da quella associata alla condizione di trazioni uniformi sul contorno. Per il percorso di macrodeformazione di compressione, invece, la crescita del crack risulta essere neutrale e le curve di macrolegame non presentano *snap back*, eccetto che per la condizione a), per la quale sorge un piccolo *snap back* durante la fase di scarico associata all'incremento della lunghezza del crack, ed in seguito alla fase di carico senza evoluzione del crack, come

mostrato dalla linea tratteggiata. I moduli risultano essere scarsamente influenzati dalla lunghezza del crack, specie per piccoli valori dello stesso, come viene mostrato dalle seguenti Fig.4.6 a) e b), soprattutto nel caso del percorso di macrodeformazione di compressione. Come conseguenza di tale aspetto, è possibile osservare come il ramo discendente del macrolegame costitutivo risulta essere adiacente a quello ascendente. Per il modo di compressione, inoltre, i moduli restano praticamente costanti durante l'evoluzione del crack, rimanendo quest'ultimo totalmente chiuso durante il processo di carico per le condizioni al contorno b) e c), e solo parzialmente aperto per la condizione a). Per brevità sono stati rappresentati solo i moduli \bar{C}_{ij11} .

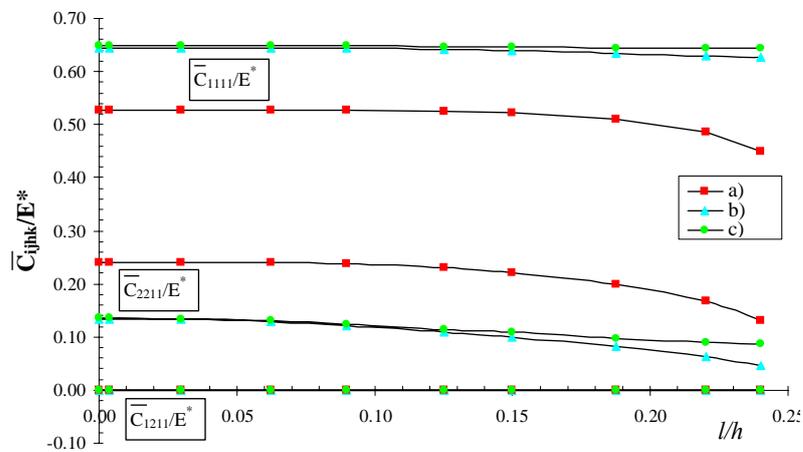


Figura 4.6 a) Moduli macroscopici in funzione della lunghezza del crack per la direzione di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_1^+$ e per le differenti condizioni al contorno.

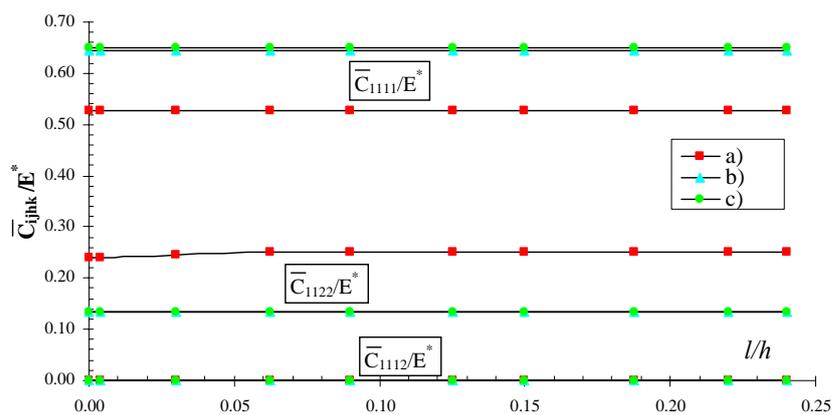


Figura 4.6 b) Moduli macroscopici in funzione della lunghezza del crack per la direzione di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_1^-$ e per le differenti condizioni al contorno.

In accordo con la disuguaglianza fondamentale rappresentata dalla relazione (3.26) del precedente capitolo 3, è possibile osservare come i moduli \bar{C}_{1111} associati alle condizioni periodiche risultano essere limitati da quelli relativi alle condizioni al contorno di trazioni uniformi e di spostamenti lineari, rispettivamente, per ogni valore della lunghezza del crack. Inoltre, dalle Fig.4.5 e 4.6 emerge chiaramente come sia i moduli che l'energia di rilascio siano fortemente dipendenti dalla condizione al contorno adottata. Immediata conseguenza di tale aspetto è, dunque, la constatazione che i legami costitutivi macroscopici risultano fortemente influenzati dal genere di condizione imposta sul contorno dell'RVE durante la fase di transizione dalla micro alla macro-scala. Restringendo le analisi allo stato piano di deformazione, emerge, chiaramente, come il materiale abbia un comportamento macroscopico praticamente ortotropo, essendo tra l'altro praticamente nulli i moduli \bar{C}_{12jj} . D'altro canto, per il percorso di macrodeformazione negativo $\hat{\epsilon}_1^-$ i moduli risultano essere praticamente indipendenti dalla lunghezza del crack, grazie all'influenza delle forze di contatto sulla resistenza.

La successiva Fig.4.7 illustra il legame costitutivo macroscopico per il percorso di macrodeformazione lungo la direzione x_2 , per le tre condizioni al contorno utilizzate nelle procedura di omogeneizzazione. Per brevità viene mostrato solo l'andamento della macrotensione $\bar{\sigma}_{22}$ adimensionalizzata, in funzione della macrodeformazione.

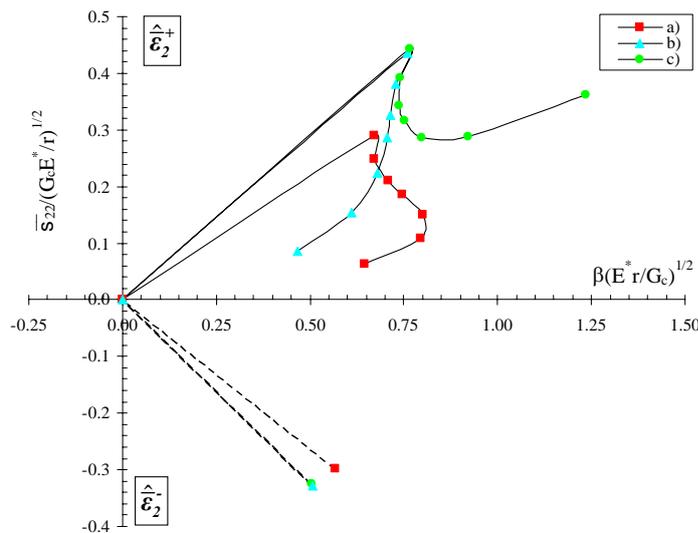


Figura 4.7. Tensione macroscopica $\bar{\sigma}_{22}$ in funzione della macrodeformazione per il percorso di macrodeformazione $\hat{\epsilon}_2^\pm$ e per le differenti condizioni al contorno.

Le simulazioni numeriche hanno mostrato come per il modo di compressione, $\hat{\varepsilon}_2^- = -\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$, il contatto viene attivato quando il crack risulta essere completamente chiuso, e l'energia di rilascio assume, quindi, valori praticamente trascurabili. D'altro canto per il percorso di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_2^+$, si è osservato come le superfici del crack non entrano mai in contatto. Da tali considerazioni segue come in compressione le dimensioni del microcrack non progrediscono, per cui il comportamento meccanico macroscopico del materiale è di tipo elastico lineare, caratterizzato dai moduli associati alla configurazione non danneggiata $\bar{C}(l=l_0)$, che nel grafico vengono rappresentati mediante le linee tratteggiate.

Come mostrato nella Fig.4.8, invece, l'energia di rilascio totale $G(\hat{\varepsilon}_2^+, l)$ associata al percorso di macrodeformazione positivo, che assume gli stessi valori per i due cracks posti alla destra e alla sinistra del vuoto, risulta essere una funzione monotona crescente della lunghezza del crack solo per il caso periodico. Per la condizione al contorno di spostamenti lineari, invece, l'energia di rilascio presenta un picco per poi iniziare la fase decrescente, mentre per la condizione di trazioni uniformi mostra un massimo in prossimità della lunghezza relativa del crack $l/h=0.07$ e poi un minimo per $l/h=0.21$. Di conseguenza la propagazione del crack avviene al decrescere del fattore di carico critico β , e per valori fissati della macrodeformazione tale evoluzione avviene in maniera instabile solo per la condizione di fluttuazioni periodiche.

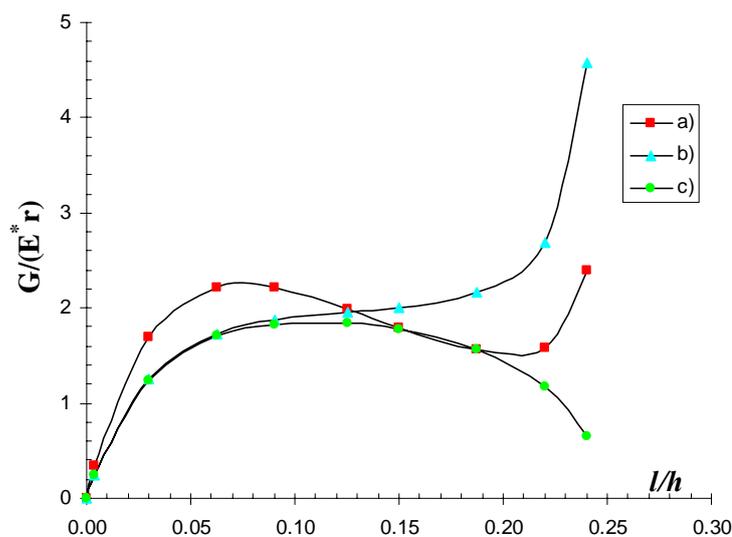


Figura 4.8. Variazione dell'energia di rilascio in funzione della lunghezza del crack per il percorso di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_2^+$ e per le differenti condizioni al contorno.

Quando sul contorno dell'RVE vengono imposte le condizioni al contorno a) o c) di trazioni uniformi o spostamenti lineari, rispettivamente, può succedere, invece, che l'evoluzione del crack venga arrestata durante la procedura di carico. Ciò causa la presenza di un certo *snap back* all'interno del legame costitutivo macroscopico, associato alle condizioni di tipo a) (trazioni uniformi) e b) (fluttuazioni periodiche), mentre per la condizione al contorno di spostamenti lineari o c) si osserva il fenomeno dello *snap through*. In particolare, si osserva come per quest'ultima condizione al contorno, il macrolegame costitutivo presenti un minimo, al di là del quale le macro tensioni cominciano, nuovamente, la loro fase di crescita. Per un lunghezza relativa del crack sufficientemente contenuta ($0 \leq l/h \leq 0.125$) e per un'assegnata macrodeformazione, l'energia di rilascio associata alle condizioni periodiche risulta essere limitata inferiormente da quella relativa alla condizione di spostamenti lineari, mentre superiormente da quella ottenuta per la condizione di trazioni uniformi.

In questo caso, i moduli risultano essere fortemente dipendenti dalla lunghezza del crack, specie per grandi valori della stessa, come mostrato dalle seguenti Fig.4.9 a) e b). Inoltre, è possibile osservare come essi dipendano dal genere di condizione al contorno utilizzata nello studio dell'RVE, sebbene per le condizioni b) e c) le differenze siano sufficientemente trascurabili. In particolare dai grafici emerge l'elevata perdita di rigidità subita dai moduli omogeneizzati \bar{C}_{2222} in seguito all'evoluzione della frattura. Per brevità sono stati rappresentati solo i moduli \bar{C}_{ij22} .

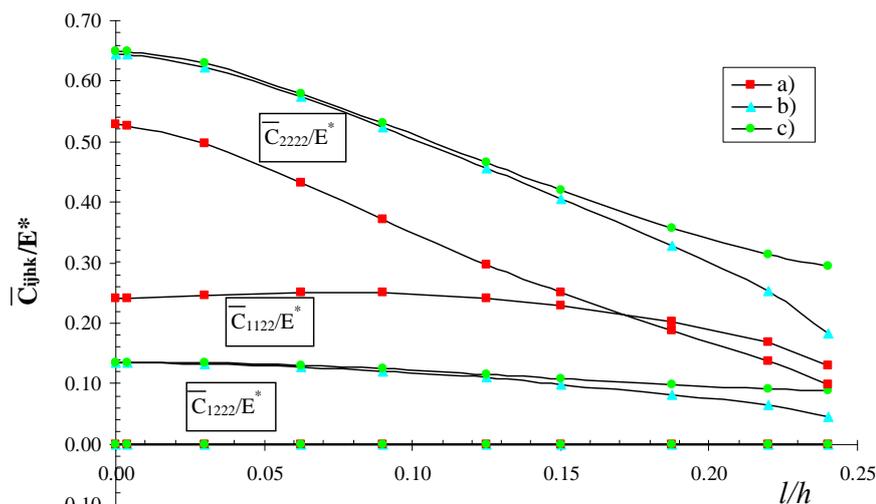


Figura 4.9 a). Moduli macroscopici in funzione della lunghezza del crack per la direzione di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_2^+$ e per le differenti condizioni al contorno.

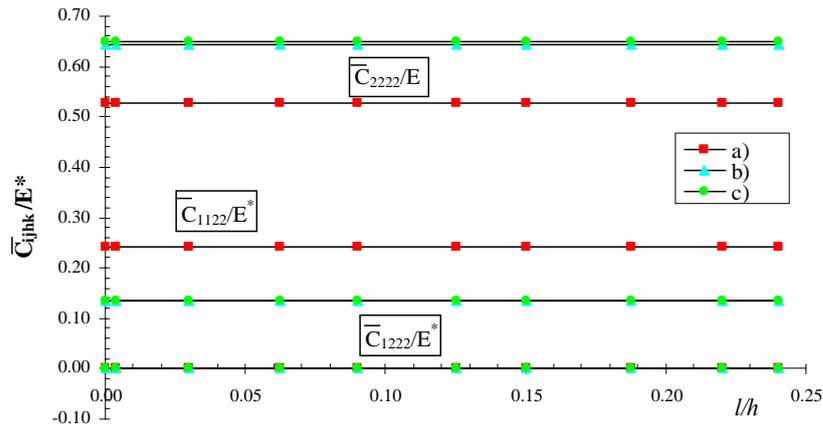


Figura 4.9 b). Moduli macroscopici in funzione della lunghezza del crack per la direzione di macrodeformazione $\hat{\epsilon}_2^-$ e per le differenti condizioni al contorno.

Come notato nel caso precedente, i moduli \bar{C}_{2222} associati alle condizioni periodiche risultano essere compresi tra quelli relativi alle altre due condizioni al contorno. Per il percorso di macrodeformazione $\hat{\epsilon}_2^+ = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$, inoltre, la Fig.4.9 a) mostra come sia i moduli che l'energia di rilascio siano fortemente dipendenti dalla condizione al contorno adottata, la qual cosa influenza notevolmente il macrolegame costitutivo associato. Anche in questo caso è possibile osservare come il comportamento del materiale, a livello macroscopico, sia di tipo ortotropo. D'altro canto, per il percorso di macrodeformazione negativo, $\hat{\epsilon}_2^- = -\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$, i moduli macroscopici risultano essere praticamente indipendenti dalla lunghezza del crack, rimanendo il crack stesso praticamente chiuso durante tutto il processo di carico.

La successiva Fig.4.10 illustra il legame costitutivo macroscopico per il percorso di macrodeformazione da taglio $\hat{\epsilon}_3$, per le tre differenti condizioni al contorno utilizzate nella procedura di omogeneizzazione. Per brevità viene mostrato solo l'andamento della macrotensione $\bar{\sigma}_{12}$ adimensionalizzata, in funzione della macrodeformazione. Quando sul contorno dell'RVE vengono imposte le condizioni al contorno c) o di spostamenti lineari può succedere, come visto nel caso precedente, che la crescita del crack subisca una fase di arresto, parziale o definitiva, durante la procedura di carico. Al contrario di quanto succede, invece, nel caso in cui vengano imposte sul contorno dell'RVE le condizioni di trazioni uniformi o di tipo periodico, per le quali si osserva

una crescita instabile del crack, come emerge chiaramente dall'andamento dell'energia di rilascio totale in funzione della lunghezza del crack, mostrato nella Fig.4.11.

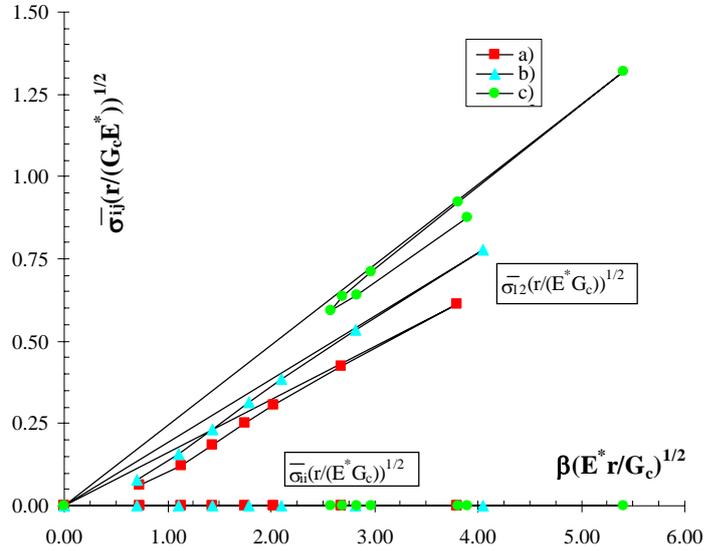


Figura 4.10. Tensione macroscopica $\bar{\sigma}_{12}$ in funzione della macrodeformazione per il percorso di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_3$ e per le differenti condizioni al contorno.

Dalla Fig.4.10 risulta chiaramente come, anche in questo caso, sia apprezzabile la presenza di un certo *snap back* all'interno del legame costitutivo macroscopico, associato alle condizioni di tipo a) (trazioni uniformi) e b) (fluttuazioni periodiche), e di un certo *snap through* per la condizione al contorno di spostamenti lineari o c). E' possibile notare, infatti, come per quest'ultima condizione al contorno il macrolegame costitutivo presenti un minimo, al di là del quale le macrotensioni cominciano, nuovamente a crescere. Come mostrato nella Fig.4.11, invece, l'energia di rilascio totale $G(\hat{\varepsilon}_3, l)$ associata al percorso di macrodeformazione da taglio, che assume gli stessi valori per i due cracks posti alla destra e alla sinistra del vuoto, risulta essere una funzione monotona crescente della lunghezza del crack sia nel caso in cui siano imposte condizioni periodiche sul contorno dell'RVE, sia nel caso in cui sia imposta la condizione di trazioni uniformi. Per la condizione al contorno di spostamenti lineari, invece, l'energia di rilascio presenta un picco per poi iniziare la fase decrescente. Di conseguenza la propagazione del crack avviene al decrescere del fattore di carico critico β , e per valori fissati della macrodeformazione tale

evoluzione avviene in maniera instabile per entrambe le condizioni di trazioni uniformi e fluttuazioni periodiche.

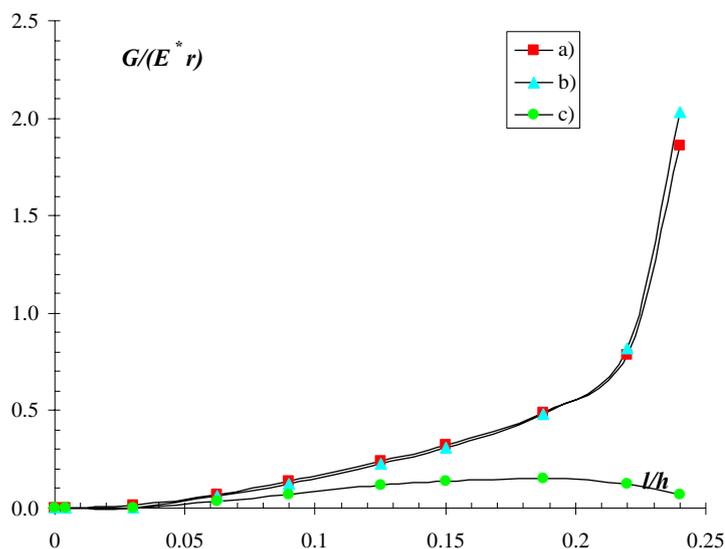


Figura 4.11. Variazione dell'energia di rilascio in funzione della lunghezza del crack per il percorso di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_3$ e per le differenti condizioni al contorno.

Fatta eccezione per valori elevati della lunghezza del crack, l'energia di rilascio associata alle condizioni periodiche risulta essere limitata inferiormente da quella relativa alla condizione di spostamenti lineari, mentre superiormente da quella ottenuta per la condizione di trazioni uniformi.

In questo caso, i moduli risultano essere sufficientemente dipendenti dalla lunghezza del crack, specie per grandi valori della stessa, e per le condizioni a) e b), come mostrato dalla seguente Fig.4.12. Inoltre, è possibile osservare come essi dipendano fortemente dal genere di condizione al contorno utilizzata nello studio dell'RVE, verificandosi apprezzabili differenze tra i valori ottenuti imponendo condizioni differenti. In particolare dai grafici emerge come i moduli \bar{C}_{ii12} siano praticamente trascurabili. Come notato nei casi precedenti, i moduli \bar{C}_{1212} associati alle condizioni periodiche risultano essere compresi tra quelli relativi alle condizioni di spostamenti lineari e trazioni uniformi, rispettivamente. Per brevità sono stati rappresentati solo i moduli \bar{C}_{ij12} . Anche in questo caso è possibile osservare come il comportamento del materiale, a livello macroscopico, sia di tipo ortotropo.

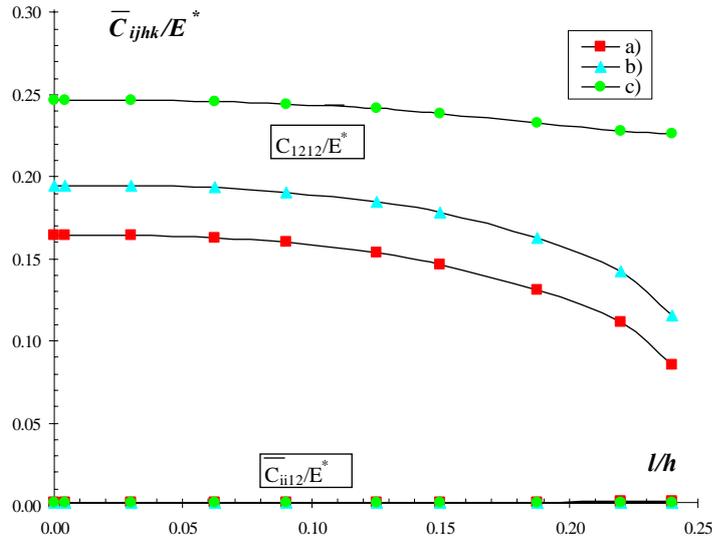


Figura 4.12. Moduli macroscopici in funzione della lunghezza del crack per la direzione di macrodeformazione $\hat{\epsilon}_3$ e per le differenti condizioni al contorno.

In conclusione sono stati considerati due tipi di percorso bi-assiale $\hat{\epsilon}_4$ ed $\hat{\epsilon}_5$, ottenuti dalla sovrapposizione degli effetti associati ai due casi monoassiali $\hat{\epsilon}_1$ ed $\hat{\epsilon}_2$:

$$\begin{cases} \hat{\epsilon}_4 = (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \alpha \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) / \sqrt{1 + \alpha^2} \\ \hat{\epsilon}_5 = (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \alpha \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) / \sqrt{1 + \alpha^2} \end{cases} \quad (4.6)$$

In particolare, nelle simulazioni numeriche è stato utilizzato un valore del parametro α pari a -0.2, per il quale il contatto resta inattivo tra le superfici del crack, quando viene imposta la macrodeformazione $\hat{\epsilon}_5$. Al contrario per la direzione di macrodeformazione $\hat{\epsilon}_4$, le superfici del crack vanno in contatto, seppur in una regione di dimensioni contenute, per effetto del contributo di compressione associato alla direzione di macrodeformazione $\alpha \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$. Ecco perché, per tale direzione di macrodeformazione imposta, ed in particolare per la condizione al contorno di fluttuazioni periodiche, il macrolegame costitutivo risulta essere caratterizzato dalla presenza di alcuni valori della macrotensione $\bar{\sigma}_{22}$ negativi, come illustrato nelle seguenti Fig.4.13 a) e b):

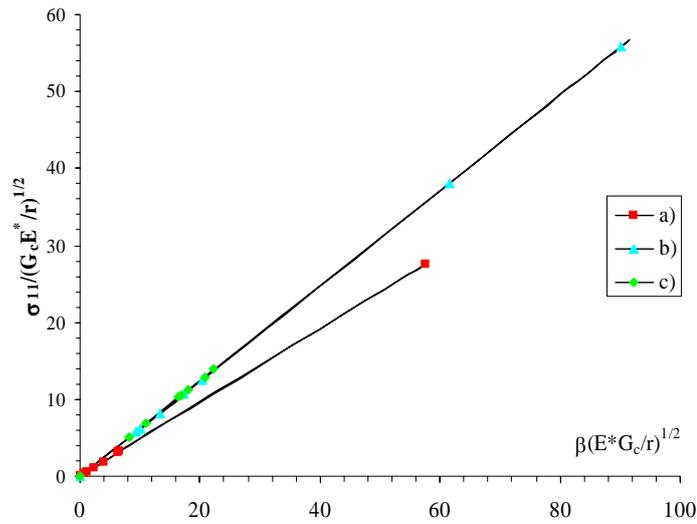


Figura 4.13 a). Macro tensione $\bar{\sigma}_{11}$ in funzione della macrodeformazione per il percorso di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_4$ e per le differenti condizioni al contorno.

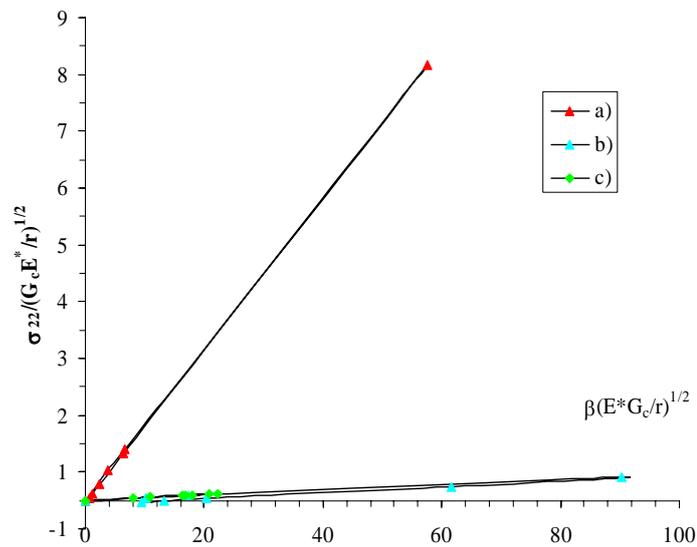


Figura 4.13 b). Macro tensione $\bar{\sigma}_{22}$ in funzione della macrodeformazione per il percorso di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_4$ e per le differenti condizioni al contorno.

Dalle due figure emerge chiaramente il notevole incremento delle macrotensioni, specie per la condizione di fluttuazioni periodiche sul contorno, dovuto all'effetto stabilizzante associato alla compressione trasversale nella direzione x_2 , legato al percorso di macrodeformazione $\alpha e_2 \otimes e_2$, il quale garantisce un innalzamento della capacità resistente per il materiale macroscopico. La propagazione del crack avviene per valori decrescenti del fattore di carico critico β , ed in maniera del tutto instabile

per valori fissati della macrodeformazione. Da ciò segue come, anche in questo caso, il legame costitutivo macroscopico sia caratterizzato da uno *snap back* evidente, per il quale il tratto decrescente risulta essere molto vicino al tratto ascendente. Nella successiva Fig.4.14 viene mostrato, poi, l'andamento dell'energia di rilascio totale. Emerge chiaramente come l'energia di rilascio totale $G(\hat{\epsilon}_4, l)$, valutata per il percorso di macrodeformazione $\hat{\epsilon}_4$, risulti essere una funzione crescente della lunghezza del crack per la condiziona al contorno a), assumendo, invece, valori praticamente nulli per le condizioni al contorno di tipo b) e c). Occorre osservare come effettuando il calcolo dell'energia di rilascio per entrambi i percorsi scelti alla sinistra e alla destra del vuoto, in corrispondenza dei due differenti cracks, si sono ottenuti i medesimi valori.

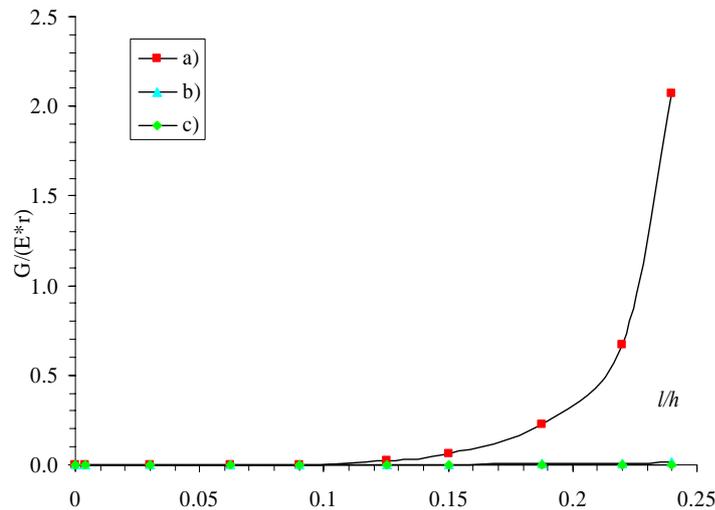


Figura 4.14. Variazione dell'energia di rilascio in funzione della lunghezza del crack per il percorso di macrodeformazione $\hat{\epsilon}_4$ e per le differenti condizioni al contorno.

Appare evidente come i valori dell'energia di rilascio stessa siano notevolmente inferiori a quelli valutati per il percorso di macrodeformazione assiale positivo $\hat{\epsilon}_1^+ = e_1 \otimes e_1$. Ciò si verifica, in accordo a quanto osservato per il macrolegame costitutivo, in conseguenza dell'effetto stabilizzante associato alla compressione trasversale nella direzione x_2 . Nel caso in cui, invece, la macrodeformazione assegnata venga imposta nella direzione $\hat{\epsilon}_5$, le superfici del crack non entrano mai in contatto prevalendo l'effetto della macrodeformazione nella direzione x_2 . Nella

successiva Fig.4.15 viene mostrato l'andamento della macro tensione $\bar{\sigma}_{22}$ adimensionalizzata in funzione della macrodeformazione imposta, e per le differenti condizioni al contorno analizzate.

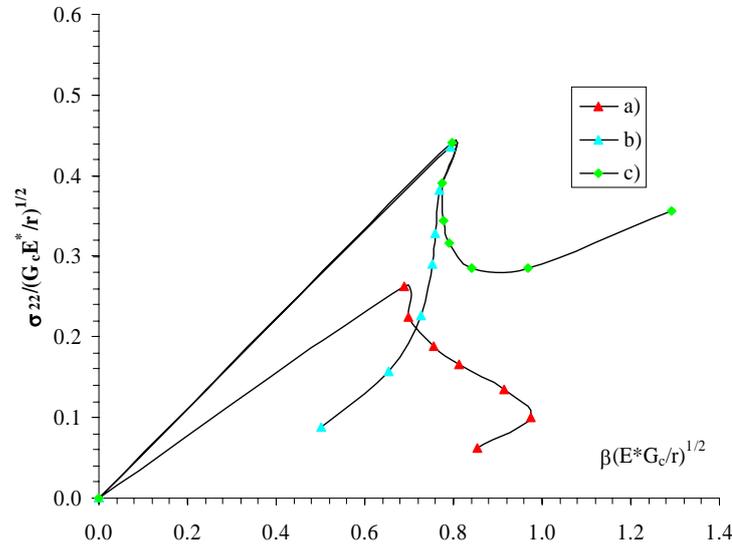


Figura 4.15. Macro tensione $\bar{\sigma}_{22}$ in funzione della macrodeformazione per il percorso di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_5$ e per le differenti condizioni al contorno.

Dalla figura emerge come il macrolegame costitutivo relativo a tale condizione di tipo bi-assiale sia scarsamente influenzato dall'imposizione della compressione nella direzione x_1 , legata alla direzione di macrodeformazione $\alpha e_1 \otimes e_1$. L'andamento della macro tensione $\bar{\sigma}_{22}$ in funzione della macrodeformazione risulta, infatti, praticamente coincidente con quello mostrato nella precedente Fig.4.7 relativo alla direzione di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_2^+$. Nella successiva Fig.4.16 viene, invece, mostrato l'andamento dell'energia di rilascio totale $G(\hat{\varepsilon}_5, l)$, la quale assume gli stessi valori per i due cracks posti alla destra e alla sinistra del vuoto. In particolare, si osserva come tale energia risulti essere una funzione monotona crescente della lunghezza del crack solo per il caso periodico. Per la condizione al contorno di spostamenti lineari, invece, l'energia di rilascio presenta un picco per poi iniziare la fase decrescente, mentre per la condizione di trazioni uniformi mostra dapprima un massimo e successivamente un minimo. Di conseguenza la propagazione del crack avviene al decrescere del fattore di carico critico β , e per valori fissati della macrodeformazione

tale evoluzione avviene in maniera instabile solo per la condizione di fluttuazioni periodiche.

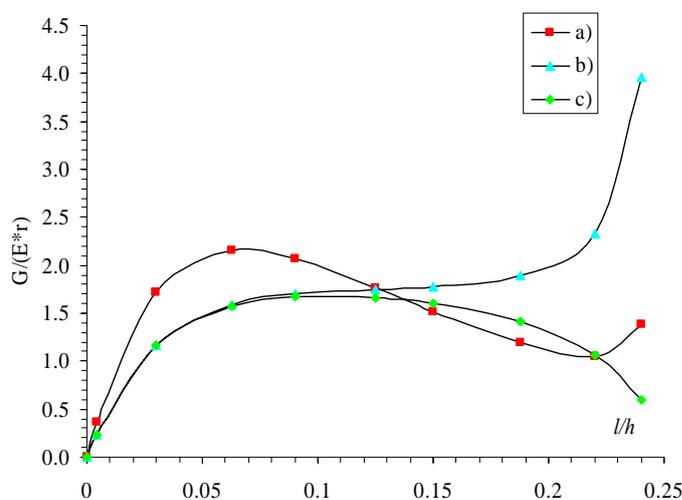


Figura 4.16. Variazione dell'energia di rilascio in funzione della lunghezza del crack per il percorso di macrodeformazione $\hat{\epsilon}_5^+$ e per le differenti condizioni al contorno.

Per le condizioni al contorno di trazioni uniformi o spostamenti lineari può succedere, invece, che l'evoluzione del crack venga arrestata durante la procedura di carico, come già visto nel caso della macrodeformazione assegnata lungo la direzione $\hat{\epsilon}_2^+$. Ciò comporta la presenza di un evidente *snap back* all'interno del legame costitutivo macroscopico, associato alle condizioni di tipo a) (trazioni uniformi) e b) (fluttuazioni periodiche), mentre per la condizione al contorno di spostamenti lineari o c) si osserva il fenomeno dello *snap through*. In particolare, si osserva come per quest'ultima condizione al contorno, il macrolegame costitutivo presenti un minimo, al di là del quale le macrotensioni cominciano, nuovamente, la loro fase di crescita. Per quanto riguarda l'energia di rilascio totale, dal confronto con la precedente Fig.4.8, relativa alla direzione di macrodeformazione imposta $\hat{\epsilon}_2^+$, emerge come essa presenti valori leggermente più contenuti rispetto al caso monoassiale, in virtù dell'effetto stabilizzante associato alla compressione trasversale nella direzione x_1 , legato al percorso di macrodeformazione $\alpha e_1 \otimes e_1$, il quale garantisce un lieve innalzamento della capacità resistente per il materiale macroscopico.

4.4 Composito rinforzato mediante fibre corte

I macrolegami costitutivi, associati ai percorsi di macrodeformazione estensionale e di compressione, rispettivamente, nella direzione x_1 vengono mostrati nelle seguenti Fig.4.17 a) e b), per le tre condizioni al contorno utilizzate nella procedura di omogeneizzazione: a) *trazioni uniformi*; b) *Fluttuazioni periodiche e trazioni anti-periodiche*; c) *spostamenti lineari*. Così come osservato per il caso del materiale a matrice porosa, anche in questo caso il comportamento iniziale del macrolegame costitutivo risulta essere di tipo lineare, caratterizzato dai moduli $\bar{C}(l_0)$, i quali sono stati valutati con riferimento alla lunghezza iniziale del crack l_0 . Dalle simulazioni numeriche emerge come, per il percorso di macrodeformazione di compressione $\hat{\varepsilon}_1^- = -\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$, le superfici del crack entrino interamente in contatto, mostrando, dunque, l'attesa dipendenza del legame costitutivo macroscopico dal percorso di macrodeformazione stesso. Al contrario, non sorgono forze di contatto, tra le due superfici del crack, per il modo estensionale associato al percorso positivo $\hat{\varepsilon}_1^+ = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$.

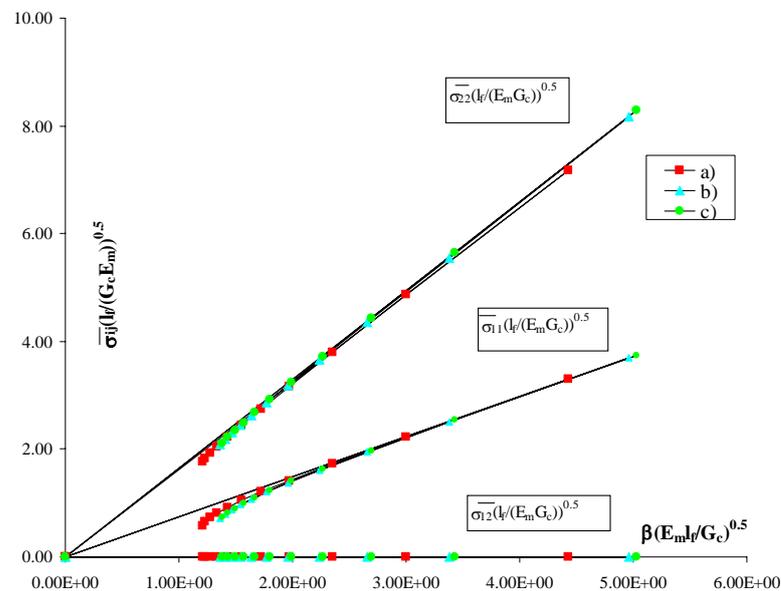


Figura 4.17 a). Tensioni macroscopiche in funzione della macrodeformazione per il percorso di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_1^+$ e per le differenti condizioni al contorno.

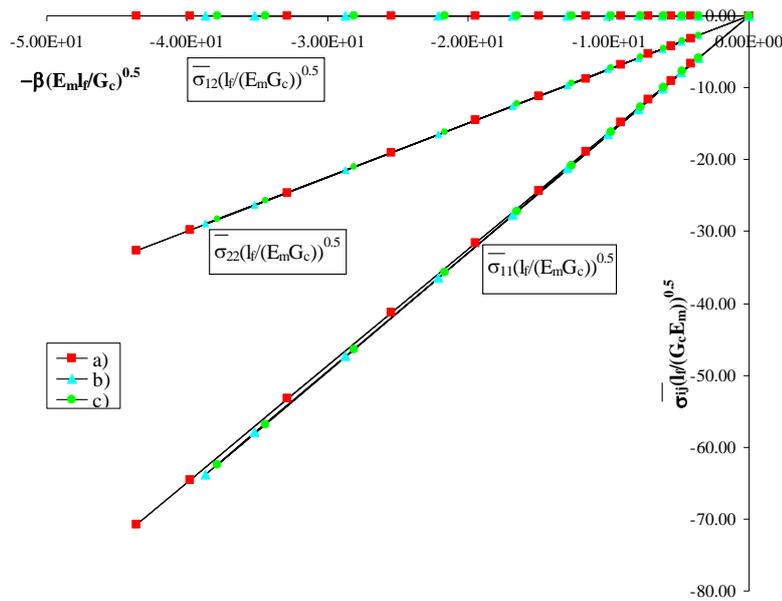


Figura 4.17 b). Tensioni macroscopiche in funzione della macrodeformazione per il percorso di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_1^-$ e per le differenti condizioni al contorno.

L'energia di rilascio totale, che assume gli stessi valori per entrambi i crack presenti all'interno dell'RVE all'interfaccia tra fibra e matrice, viene mostrata nelle seguenti Fig.4.18 a) e b) in funzione della lunghezza del crack.

Dai grafici emerge, chiaramente, come $G(\hat{\varepsilon}_1^\pm, l)$ sia una funzione crescente della lunghezza del crack per tutte le condizioni al contorno analizzate, sia per il percorso di macrodeformazione positivo o di trazione, che per quello negativo o di compressione. Di conseguenza il debonding all'interfaccia tra la micro-fibra e la matrice progredisce per valori decrescenti del fattore di carico critico β e, per un valore fissato di macrodeformazione, tale evoluzione risulta essere di tipo instabile. Da ciò deriva la presenza di un evidente *snap back* all'interno del macrolegame costitutivo, in cui il tratto discendente viene ad essere praticamente sovrapposto a quello ascendente. In riferimento al modo estensionale, è possibile osservare come, per un assegnato valore della macrodeformazione, l'energia di rilascio totale per la condizione al contorno di fluttuazioni periodiche risulta essere limitata inferiormente da quella relativa alla condizione di spostamenti lineari, mentre superiormente da quella di trazioni uniformi. I limiti superiore ed inferiore, invece, si invertono nel caso in cui venga preso in considerazione il percorso di macrodeformazione negativo o di compressione, per il

quale, quindi, l'energia di rilascio associata alle condizioni periodiche risulta essere compresa tra quella relativa alla condizione di trazioni uniformi (limite inferiore) e quella associata alla condizione di spostamenti lineari (limite superiore).

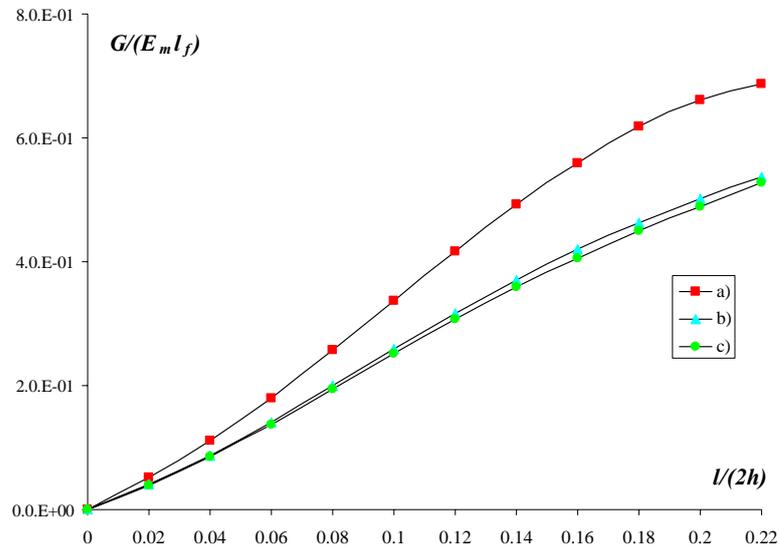


Figura 4.18 a). Variazione dell'energia di rilascio in funzione della lunghezza del crack per il percorso di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_1^+$ e per le differenti condizioni al contorno.

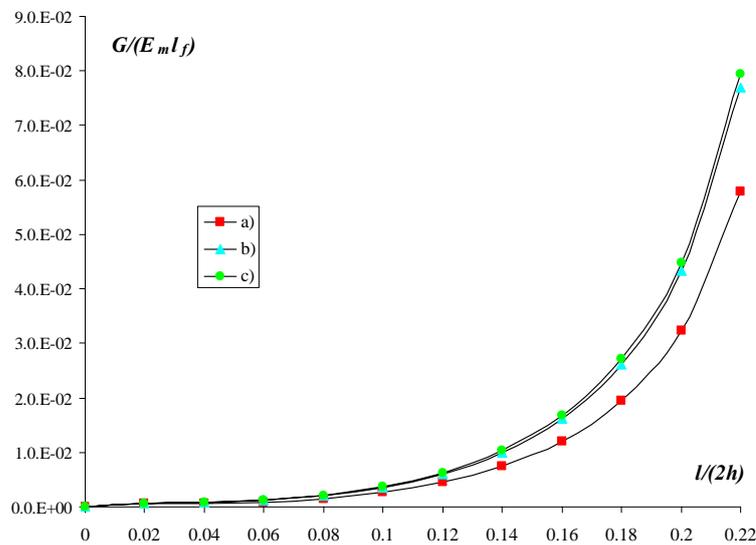


Figura 4.18 b). Variazione dell'energia di rilascio in funzione della lunghezza del crack per il percorso di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_1^-$ e per le differenti condizioni al contorno.

Nel caso del modo estensionale, i moduli risultano essere scarsamente influenzati dalla lunghezza del crack, specie per valori contenuti della stessa, mentre per il

percorso di macrodeformazione di compressione, essi sono praticamente indipendenti da l dati gli effetti del contatto, che viene ad essere attivato tra le due superfici del crack, come viene mostrato nelle seguenti Fig.4.19 a) e b). Nel secondo caso, infatti, i moduli risultano essere delle funzioni costanti della lunghezza del crack, che resta completamente chiuso durante il processo deformativo. Per brevità sono stati rappresentati solo i moduli \bar{C}_{ij11} . Come appare evidente dalle Fig.4.18 e 4.19 sia i moduli che l'energia di rilascio risultano essere scarsamente dipendenti dalla condizione al contorno imposta sull'RVE, specie per dimensioni contenute della lunghezza del crack. In particolare le curve relative alle condizioni b) e c) risultano essere praticamente sovrapposte. Di conseguenza anche il legame costitutivo macroscopico viene ad essere poco influenzato dalle condizioni imposte nel passaggio dalla micro alla macro-scala. Occorre osservare come le macrotensioni da taglio siano praticamente nulle per tutte e tre le possibili condizioni al contorno. Restringendo le analisi alle quantità tipiche di uno stato piano di deformazione, il legame costitutivo macroscopico mostra come il materiale abbia un comportamento globale di tipo ortotropo, essendo i moduli \bar{C}_{12jj} praticamente nulli.

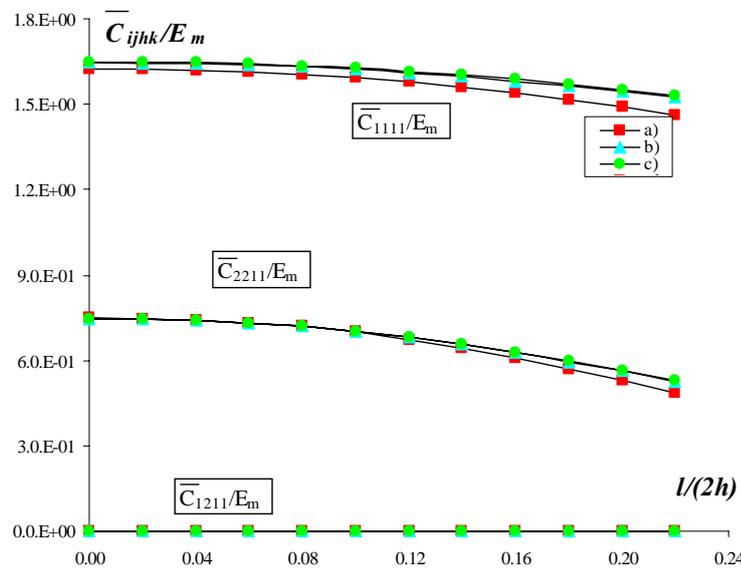


Figura 4.19 a). Moduli macroscopici in funzione della lunghezza del crack per la direzione di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_1^+$ e per le differenti condizioni al contorno.

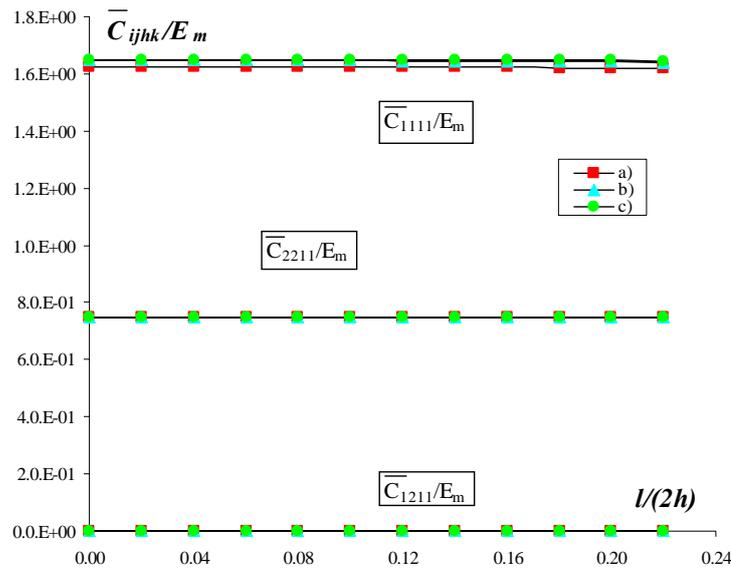


Figura 4.19 b). Moduli macroscopici in funzione della lunghezza del crack per la direzione di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_1^-$ e per le differenti condizioni al contorno.

Anche in questo caso si osserva come i moduli \bar{C}_{1111} , associati alle condizioni periodiche, risultano essere limitati superiormente da quelli associati alla condizione di spostamenti lineari ed inferiormente da quelli associati alla condizione di trazioni uniformi. Il macrolegame costitutivo per il modo di deformazione assiale lungo la direzione x_2 , per le tre condizioni al contorno utilizzate nella procedura di omogeneizzazione, viene illustrato nella seguente Fig.4.20. Le applicazioni numeriche hanno mostrato come, per il percorso di macrodeformazione negativo $\hat{\varepsilon}_2^- = -\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$, vengono ad essere immediatamente attivate le forze di contatto tra le superfici del crack, il quale resta completamente chiuso durante l'intero processo deformativo. Da ciò segue che, in tale situazione, l'energia di rilascio risulta essere praticamente trascurabile. D'altro canto, per il modo deformativo positivo $\hat{\varepsilon}_2^+ = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$, le facce del crack non entrano mai in contatto. Come conseguenza di quanto osservato, appare evidente come per il percorso di compressione, per il quale le dimensioni del crack non progrediscono, il macrolegame costitutivo sia di tipo elastico lineare. In particolare, tale legame, rappresentato mediante una linea tratteggiata nella seguente Fig.4.20, risulta essere caratterizzato dai moduli $\bar{C}(l=l_0)$, caratteristici della

configurazione non danneggiata ed i quali sono stati valutati con riferimento alla lunghezza iniziale del crack l_0 .

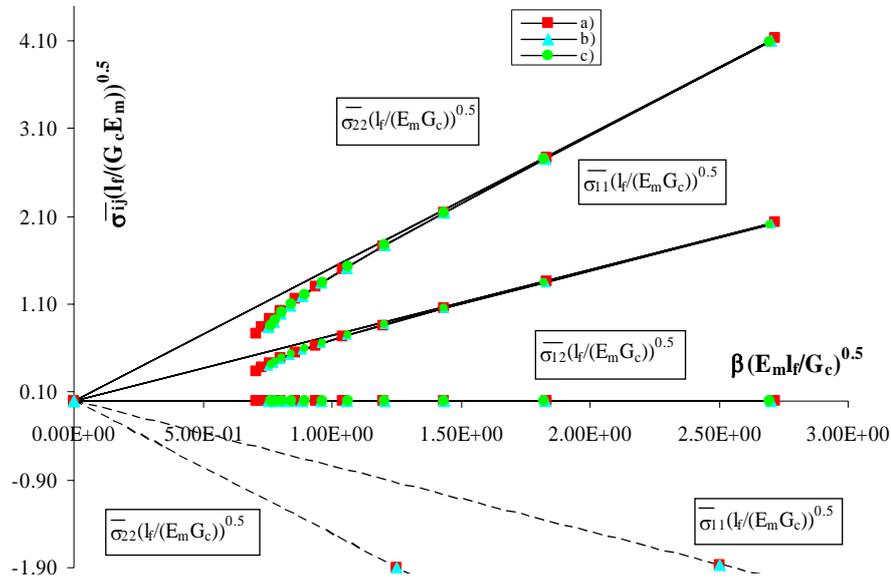


Figura 4.20. Tensioni macroscopiche in funzione della macrodeformazione per il percorso di macrodeformazione $\hat{\epsilon}_2^+$ e per le differenti condizioni al contorno.

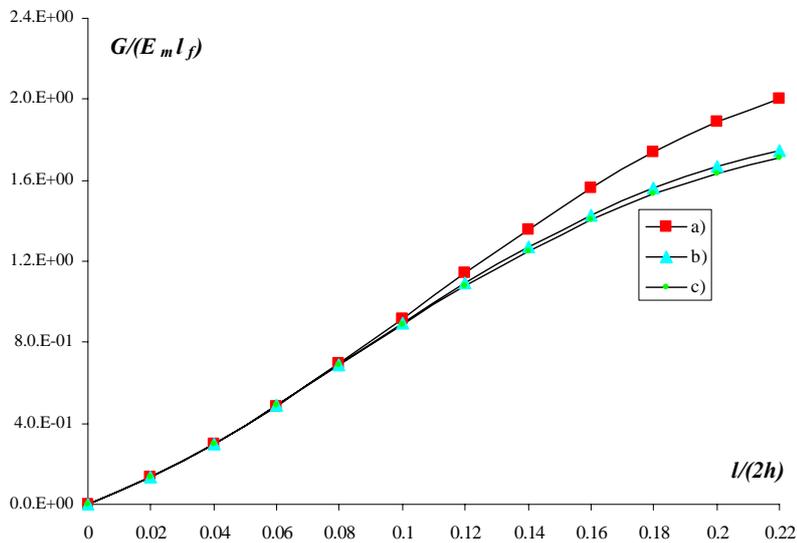


Figura 4.21. Variazione dell'energia di rilascio in funzione della lunghezza del crack per il percorso di macrodeformazione $\hat{\epsilon}_2^+$ e per le differenti condizioni al contorno.

Inoltre, come mostrato nella Fig.4.21 l'energia di rilascio $G(\hat{\epsilon}_2^+, l)$, associata al percorso di macrodeformazione positivo $\hat{\epsilon}_2^+$, consiste in una funzione crescente della

lunghezza del crack per tutte le condizioni al contorno considerate nella modellazione del problema. Di conseguenza le dimensioni del crack progrediscono, come nel caso precedente, per valori decrescenti del fattore di carico critico β , mostrando un comportamento di tipo fortemente instabile. Anche in questo caso, dunque, il legame costitutivo macroscopico sarà caratterizzato da uno *snap back* evidente, per il quale il tratto decrescente risulta essere molto vicino al tratto ascendente. Fatta eccezione per piccoli valori della lunghezza del crack, l'energia di rilascio associata alle condizioni periodiche, per un'assegnata macrodeformazione, risulta essere limitata inferiormente da quella associata alla condizione di spostamenti lineari, mentre superiormente da quella relativa alle condizioni di trazioni uniformi. Come mostrato nelle seguenti Fig.4.22 a) e b), i moduli omogeneizzati risultano essere scarsamente influenzati dalla lunghezza del crack, specie per il modo di compressione. Occorre osservare come per la direzione di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_2^+$, inoltre, sia i moduli che l'energia di rilascio sono poco dipendenti dalla condizione al contorno applicata nella modellazione del problema, la qual cosa si riflette chiaramente sul macrolegame costitutivo, il quale risulta praticamente indipendente dalla condizione imposta nella transizione dalla micro alla macro-scala. Per brevità nei grafici viene mostrato solo l'andamento dei moduli \bar{C}_{ij22} .

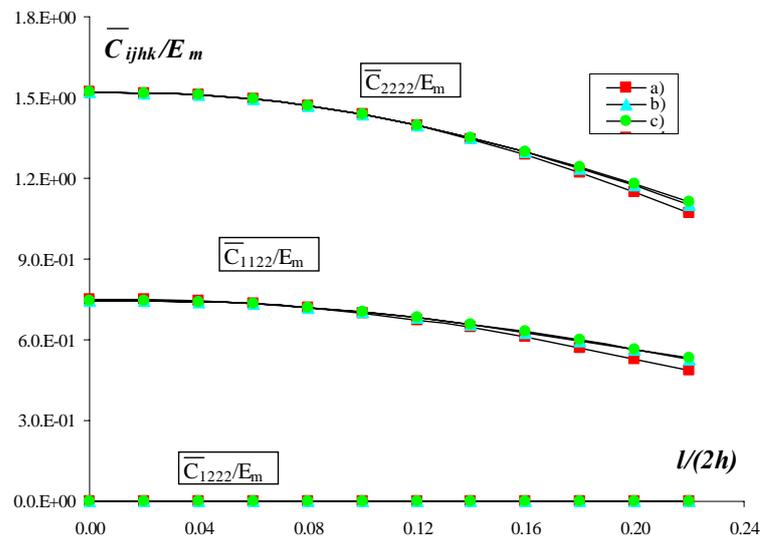


Figura 4.22 a). Moduli macroscopici in funzione della lunghezza del crack per la direzione di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_2^+$ e per le differenti condizioni al contorno.

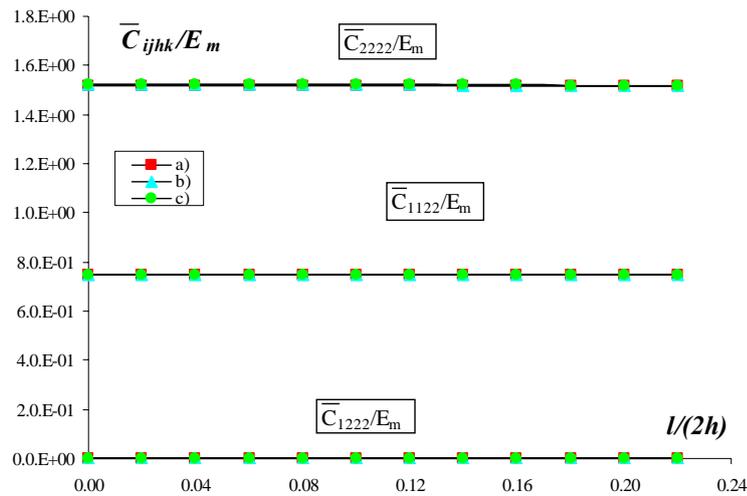


Figura 4.22 b). Moduli macroscopici in funzione della lunghezza del crack per la direzione di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_2^-$ e per le differenti condizioni al contorno.

Occorre osservare come, analogamente al caso precedente, le macro tensioni da taglio risultino praticamente nulle per tutte e tre le condizioni al contorno analizzate. Inoltre appare evidente come il materiale presenti un comportamento macroscopico di tipo ortotropo. In accordo con la disuguaglianza fondamentale (3.26), mostrata nel precedente capitolo 3, i moduli \bar{C}_{2222} associati alle condizioni periodiche risultano essere compresi tra quelli relativi alle condizioni a) e c), rispettivamente.

Analogamente al caso del materiale a matrice porosa, poi, è stato considerato il percorso di macrodeformazione da taglio $\hat{\varepsilon}_3^\pm$. Occorre notare come, per tale direzione di deformazione, le facce del crack vadano in contatto sia per il modo negativo che per quello positivo, anche se le zone di contatto è da ritenersi ristretta ad una piccola regione in prossimità dell'apice di sinistra per il primo percorso, e di destra per il secondo. Il fatto che il contatto venga attivato in maniera non simmetrica può condurre ad una differente valutazione dell'energia di rilascio totale tra i due differenti tip considerati. In particolare, per il primo percorso di macrodeformazione, si osserva come il crack di sinistra sia caratterizzato da valori maggiori dell'energia di rilascio, e di conseguenza l'evoluzione della microfrattura risulta essere favorita in tale zona. Nelle simulazioni numeriche è stato considerato solo il percorso di macrodeformazione positivo, analizzando entrambi i casi di crescita simmetrica e non-simmetrica del crack. Il legame costitutivo macroscopico per il modo di deformazione

da taglio, relativo al caso in cui la crescita del crack avviene in maniera simmetrica, viene mostrato nella seguente Fig.4.23 per le tre condizioni al contorno utilizzate nella procedura di omogeneizzazione. Mentre l'energia di rilascio totale per lo stesso caso viene mostrata, invece, nella successiva Fig.4.24, in funzione della lunghezza del crack. Emerge chiaramente come $G(\hat{\varepsilon}_3^\pm, l)$ sia una funzione crescente della lunghezza del crack per tutte le condizioni al contorno analizzate. E' possibile osservare, inoltre, come analogamente ai casi precedenti, il crack evolve per valori decrescenti del fattore di carico critico β , con una propagazione di tipo instabile per un'assegnata macrodeformazione. Ad eccezione di piccoli valori per la lunghezza del crack e per un'assegnata macrodeformazione, l'energia di rilascio totale associata alle condizioni periodiche risulta essere limitata, inferiormente da quella relativa alla condizione di spostamenti lineari, e superiormente da quella associata alla condizione di trazioni uniformi.

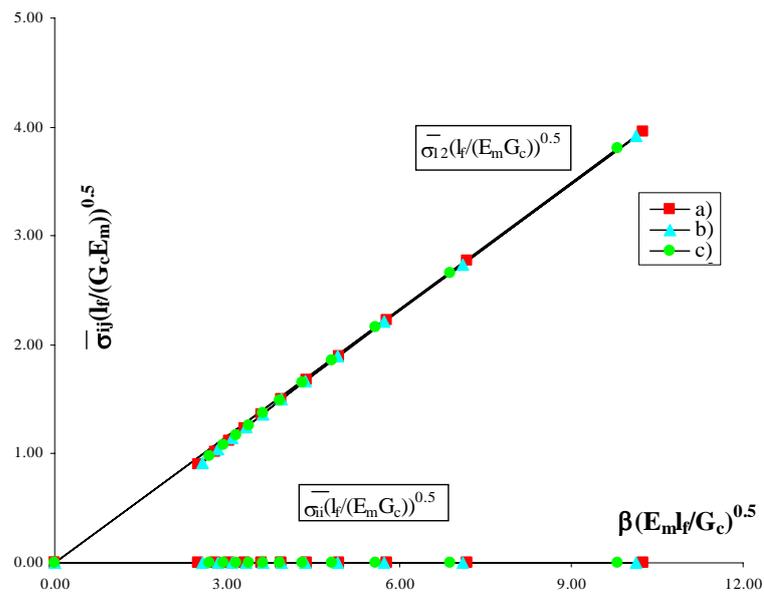


Figura 4.23. Tensioni macroscopiche in funzione della macrodeformazione per il percorso di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_3^+$ e per le differenti condizioni al contorno. Crescita simmetrica del crack.

I moduli macroscopici, i quali risultano essere indipendenti dal percorso di deformazione, vengono mostrati nella seguente Fig.4.25. E' possibile osservare come essi siano scarsamente dipendenti dalla lunghezza del crack, specie per piccoli valori della stessa. Analogamente a quanto succede per l'energia di rilascio, inoltre, essi risultano scarsamente influenzati dalla condizione al contorno imposta sull'RVE.

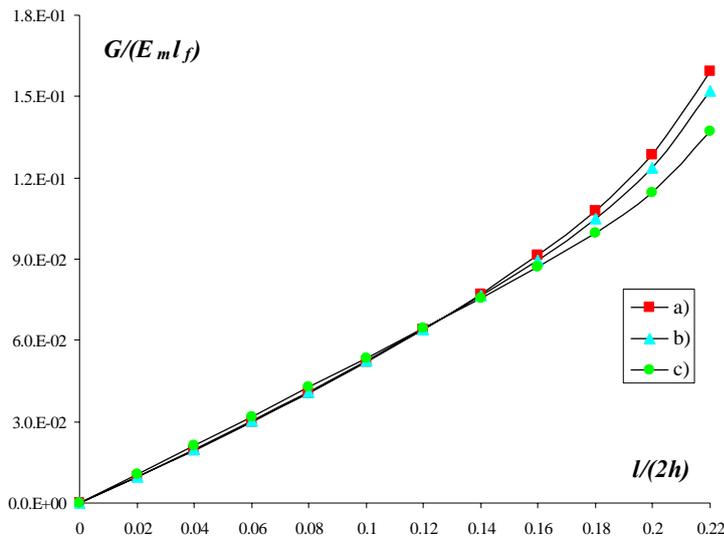


Figura 4.24. Variazione dell'energia di rilascio in funzione della lunghezza del crack per il percorso di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_3^+$ e per le differenti condizioni al contorno. Crescita simmetrica del crack.

Di conseguenza, il macrolegame costitutivo risulta anch'esso poco influenzato dalla condizione applicata per il passaggio dal micro al macro problema. Occorre osservare come le tensioni normali macroscopiche siano praticamente nulle in confronto a quella da taglio, per tutte le condizioni al contorno. Da ciò deriva come il comportamento macroscopico del materiale sia di tipo ortotropo, come mostra anche il fatto che i moduli \bar{C}_{ii12} tendono praticamente a zero.

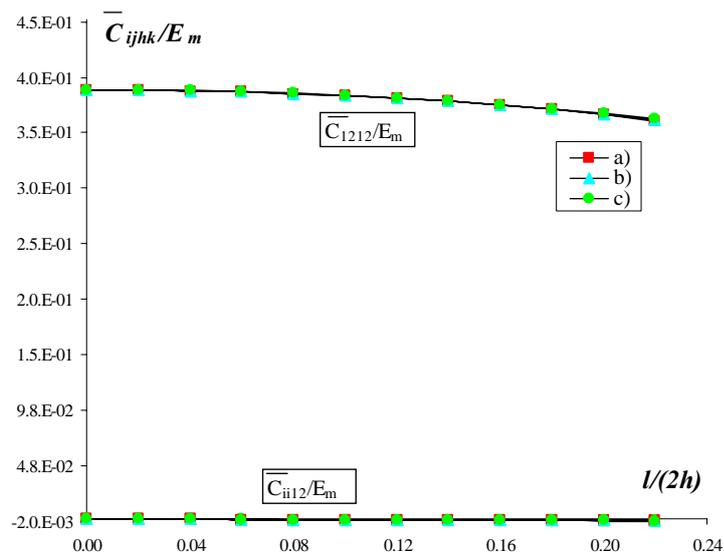


Figura 4.25. Moduli macroscopici in funzione della lunghezza del crack per la direzione di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_3^-$ e per le differenti condizioni al contorno. Crescita simmetrica del crack.

Il legame costitutivo macroscopico, relativo al caso in cui la crescita del crack avviene in maniera non-simmetrica, viene mostrato nella seguente Fig.4.26 per le tre condizioni al contorno utilizzate nella procedura di omogeneizzazione.

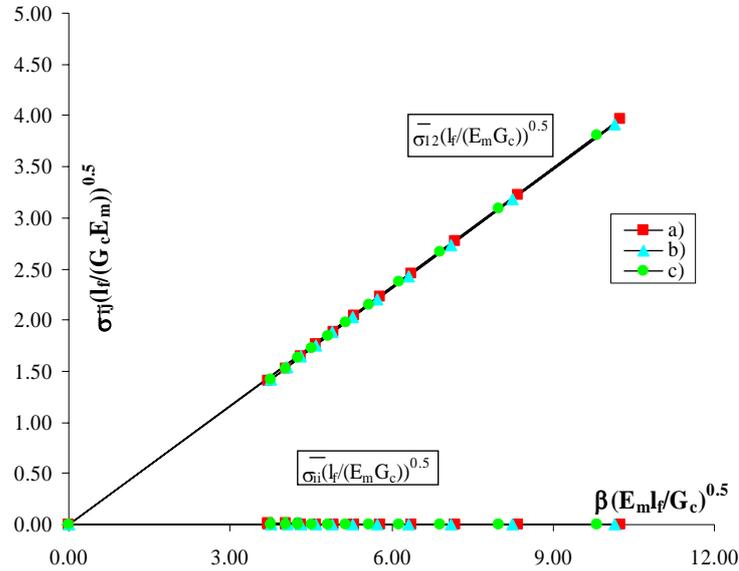


Figura 4.26. Tensioni macroscopiche in funzione della macrodeformazione per il percorso di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_3^+$ e per le differenti condizioni al contorno. Crescita non-simmetrica del crack.

Dal confronto tra le Fig.4.23 e 4.26 appare evidente come non ci siano sostanziali differenze, in termini di macrorisposta costitutiva, tra il caso di crescita simmetrica e quello di crescita non-simmetrica del crack.

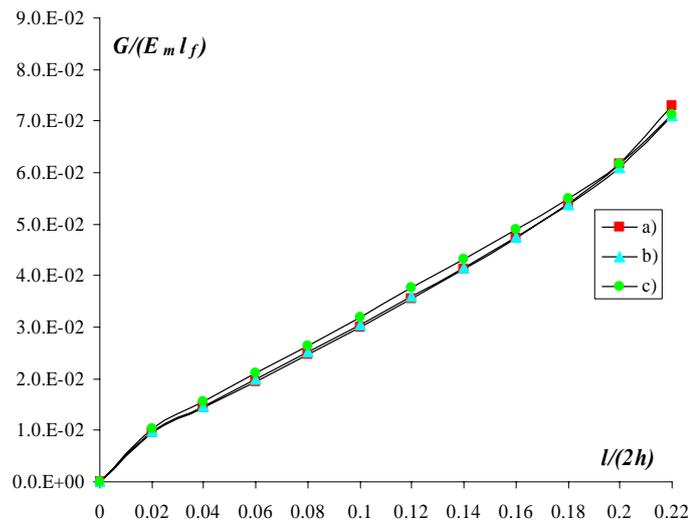


Figura 4.27. Variazione dell'energia di rilascio in funzione della lunghezza del crack per il percorso di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_3^+$ e per le differenti condizioni al contorno. Crescita non-simmetrica del crack.

Al contrario, è possibile apprezzare un differente comportamento tra i due casi, in termini di energia di rilascio come mostra la Fig.4.27. Dal confronto con la Fig.4.24, relativa al caso simmetrico, infatti, è possibile riscontrare come quando viene innescato il solo crack di sinistra, ad esempio, l'energia di rilascio si dimezza praticamente per ogni valore della lunghezza del crack. E' possibile poi notare come, in questo caso, l'energia di rilascio associata alla condizione di trazioni uniformi sia compresa tra quella associata alla condizione di spostamenti lineari e quella relativa alle condizioni periodiche, fatta eccezione per valori elevati della lunghezza del crack. Nella successiva Fig.4.28 vengono invece presentati i moduli omogeneizzati relativi al caso di crescita non-simmetrica del crack. In particolare, emerge come i moduli siano scarsamente influenzati dalla lunghezza del crack, in tale situazione, evidenziando, per alti valori della dimensione del crack stessa, un apprezzabile incremento di rigidità rispetto al caso di crescita simmetrica.

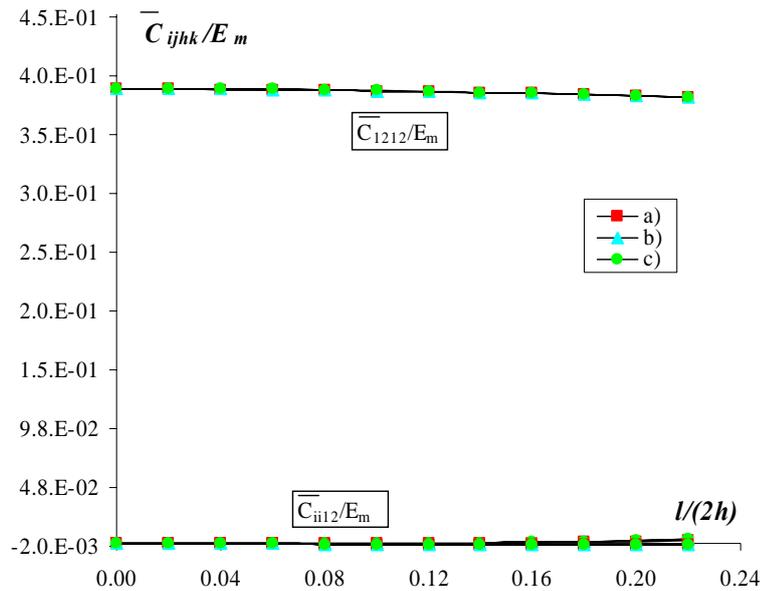


Figura 4.28. Moduli macroscopici in funzione della lunghezza del crack per la direzione di macrodeformazione $\hat{\epsilon}_3^-$ e per le differenti condizioni al contorno. Crescita non-simmetrica del crack.

In conclusione, analogamente al caso poroso, sono stati considerati due tipi di percorso bi-assiale $\hat{\epsilon}_4$ ed $\hat{\epsilon}_5$, ottenuti dalla sovrapposizione degli effetti associati ai due casi monoassiali $\hat{\epsilon}_1$ ed $\hat{\epsilon}_2$.

$$\begin{cases} \hat{\varepsilon}_4 = (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \alpha \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) / \sqrt{1 + \alpha^2} \\ \hat{\varepsilon}_5 = (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \alpha \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) / \sqrt{1 + \alpha^2} \end{cases} \quad (4.7)$$

In particolare, nelle simulazioni numeriche è stato utilizzato un valore del parametro α pari a -0.2, per il quale il contatto resta inattivo tra le superfici del crack per entrambe le direzioni di macrodeformazione. Il macrolegame costitutivo associato al percorso di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_4$ viene illustrato nella seguente Fig.4.29 per le tre diverse condizioni al contorno utilizzate nella procedura di omogeneizzazione.

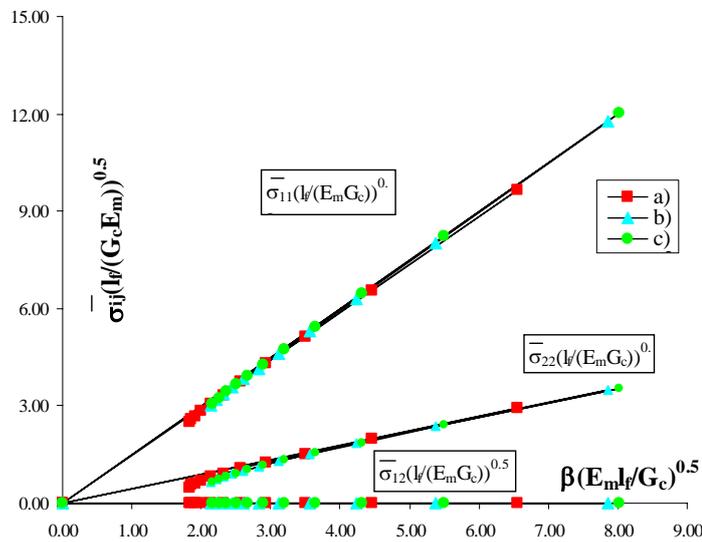


Figura 4.29. Tensioni macroscopiche in funzione della macrodeformazione per il percorso di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_4$ e per le differenti condizioni al contorno.

L'energia di rilascio, la quale assume gli stessi valori per i due crack di sinistra e destra, rispettivamente, è rappresentata nella Fig.4.30 in funzione della lunghezza relativa del crack. La figura mostra come l'energia di rilascio totale, associata a tale percorso di macrodeformazione bi-assiale, rappresenti una funzione crescente della lunghezza del crack per tutte le condizioni al contorno analizzate. In tale situazione, quindi, l'evoluzione del crack è di tipo instabile per un valore fissato della macrodeformazione. Occorre osservare, tuttavia, come i valori dell'energia di rilascio stessa siano leggermente inferiori a quelli valutati per il percorso di macrodeformazione assiale positivo $\hat{\varepsilon}_1^+ = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$. Ciò si verifica in conseguenza

dell'effetto stabilizzante associato alla compressione trasversale nella direzione x_2 , legato al percorso di macrodeformazione $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^+ = e_2 \otimes e_2$, il quale garantisce un incremento di resistenza per il materiale macroscopico. Per un'assegnata macrodeformazione l'energia di rilascio ottenuta per condizioni periodiche, anche in questo caso, risulta essere limitata inferiormente da quella associata alla condizione di spostamenti lineari sul contorno dell'RVE, e superiormente da quella legata alla condizione di trazioni uniformi. Inoltre, emerge chiaramente come essa sia scarsamente influenzata dalla condizione al contorno utilizzata, specie per quanto riguarda le condizioni periodiche e di spostamenti lineari, rispettivamente, le quali garantiscono praticamente i medesimi valori per l'energia di rilascio totale. Occorre osservare come le macrotensioni da taglio assumano valori praticamente nulli per tale percorso di macrodeformazione. Inoltre, così come nei casi analizzati in precedenza, il materiale assume, a livello macroscopico, un comportamento di tipo ortotropo.

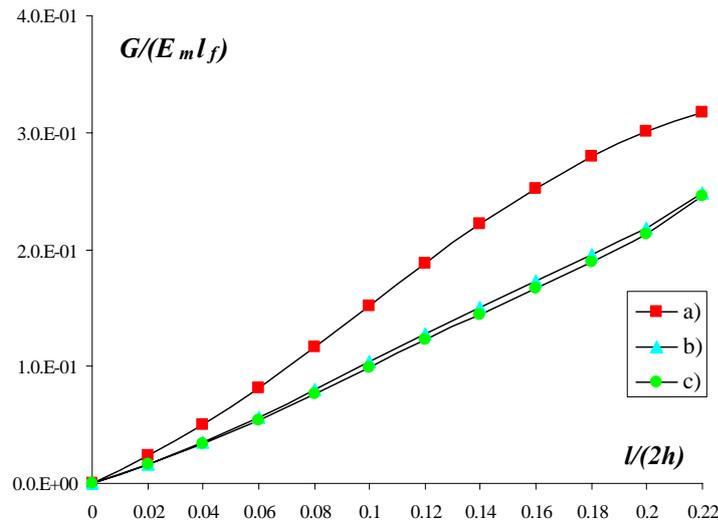


Figura 4.30. Variazione dell'energia di rilascio in funzione della lunghezza del crack per il percorso di macrodeformazione $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_4^+$ e per le differenti condizioni al contorno.

Il macrolegame costitutivo associato al percorso di macrodeformazione $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_5^+$ viene mostrato nella seguente Fig.4.31 per le tre diverse condizioni al contorno utilizzate nella procedura di omogeneizzazione. In particolare, occorre osservare come rispetto al percorso di macrodeformazione monoassiale $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^+$, siano stati ottenuti valori

leggermente più alti per le macrotensioni, in virtù dell'incremento di resistenza garantito dalla compressione nella direzione x_1

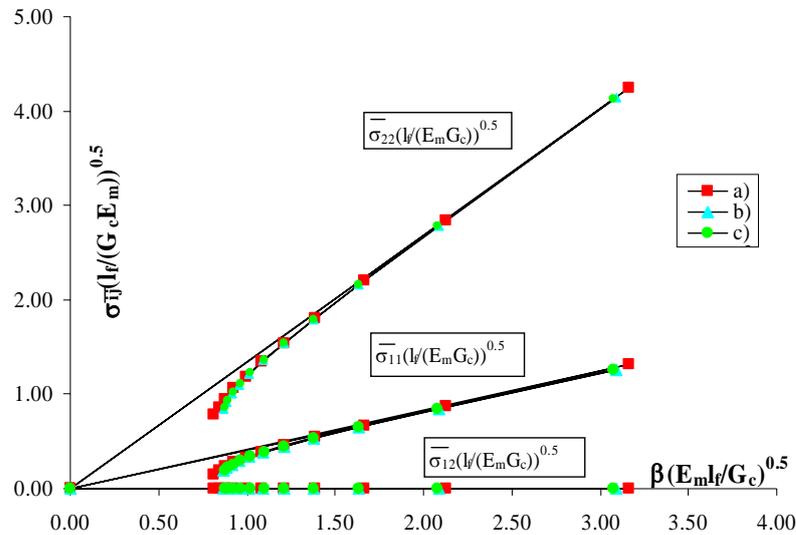


Figura 4.31. Tensioni macroscopiche in funzione della macrodeformazione per il percorso di macrodeformazione $\hat{\epsilon}_5$ e per le differenti condizioni al contorno.

L'energia di rilascio, la quale assume gli stessi valori per i due crack di sinistra e destra, rispettivamente, viene illustrata nella seguente Fig.4.32 in funzione della lunghezza relativa del crack. La figura mostra come l'energia di rilascio totale, associata a tale percorso di macrodeformazione bi-assiale, rappresenti anche in questo caso una funzione crescente della lunghezza del crack per tutte le condizioni al contorno analizzate. Appare evidente, quindi, come l'evoluzione del crack sia di tipo instabile, come già mostrato nel caso precedente. Occorre osservare, tuttavia, come i valori dell'energia di rilascio stessa siano sufficientemente inferiori a quelli valutati per il percorso di macrodeformazione assiale positivo $\hat{\epsilon}_2^+ = e_2 \otimes e_2$. Ciò si verifica in conseguenza dell'effetto stabilizzante associato alla compressione trasversale nella direzione x_1 , il quale garantisce un incremento di resistenza per il materiale macroscopico, come già osservato in termini di risposta costitutiva macroscopica. Per un'assegnata macrodeformazione l'energia di rilascio ottenuta per condizioni periodiche, anche in questo caso, risulta essere limitata inferiormente da quella associata alla condizione di spostamenti lineari sul contorno dell'RVE, e superiormente da quella legata alla condizione di trazioni uniformi. Inoltre, emerge

chiaramente come essa sia scarsamente influenzata dalla condizione al contorno utilizzata, specie per quanto riguarda le condizioni periodiche e di spostamenti lineari, rispettivamente, le quali garantiscono praticamente i medesimi valori per l'energia di rilascio totale. Inoltre, così come nei casi analizzati in precedenza, il materiale assume, a livello macroscopico, un comportamento di tipo ortotropo.

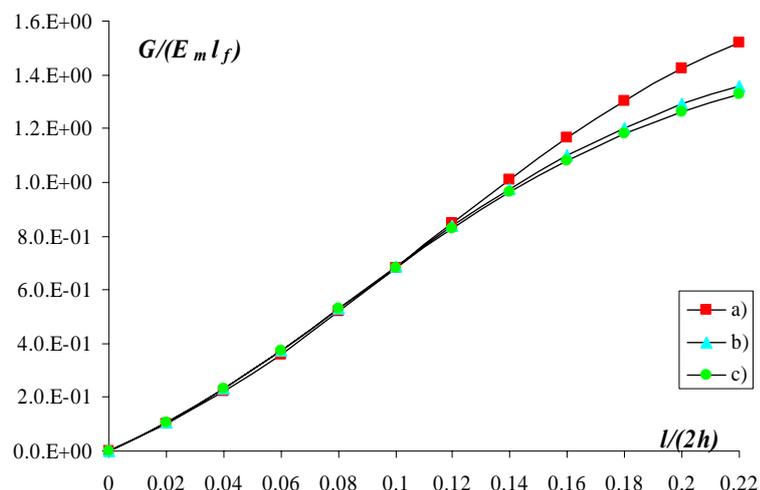


Figura 4.32. Variazione dell'energia di rilascio in funzione della lunghezza del crack per il percorso di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_5$ e per le differenti condizioni al contorno.

4.5 Transizione dalla micro alla macro-scala per il materiale a matrice porosa

Al fine di validare la procedura di omogeneizzazione proposta, i macrolegami costitutivi ottenuti sono stati impiegati nello studio di un macroelemento soggetto ad uno spostamento assegnato. In particolare, la procedura di transizione dalla micro alla macro-scala è stata articolata in quattro fasi successive: 1) *la valutazione dei moduli omogeneizzati*, per un'assegnata macrodeformazione unitaria, su di un RVE caratterizzato da una lunghezza fissata del crack, per le tre differenti condizioni al contorno analizzate; 2) *l'analisi diretta* di un macroelemento piano, ottenuto mediante una sequenza regolare di 5x5 microcelle, disposte in modo tale da formare un quadrato; 3) *l'analisi del macroelemento omogeneizzato*, utilizzando i moduli ottenuti nella fase 1) per ciascuna delle condizioni al contorno, al fine di valutare la macrodeformazione da applicare alla singola microcella; 4) *la valutazione*

dell'energia di rilascio in entrambi gli apici dei micro-cracks di ciascun RVE, sul contorno del quale viene imposta la macrodeformazione ottenuta nella fase 3).

I valori della singola energia di rilascio, valutati per mezzo della tecnica dell'integrale J , sono stati quindi confrontati con quelli ottenuti a livello di ciascuna microcella mediante l'analisi diretta, al fine di verificare la validità della procedura di omogeneizzazione. Tale analisi diretta è stata condotta su di una lastra piana incastrata alla base, ottenuta mediante un arrangiamento regolare di 5x5 microcelle, sul contorno della quale è stato imposto uno spostamento $\Delta = H/1000$, essendo H l'altezza totale della lastra stessa.

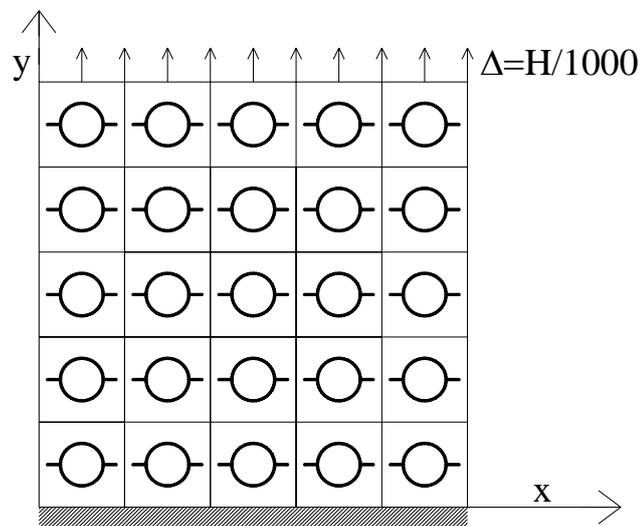


Figura 4.33. Lastra piana, ottenuta mediante una disposizione regolare di 5x5 microcelle.

La lunghezza relativa del singolo crack l/h è stata assunta pari a 0.125, sia per quanto riguarda l'analisi diretta, sia nello studio della singola microcella. Occorre osservare come, imponendo un spostamento positivo, le facce del singolo crack non entrino mai in contatto. Mediante tale analisi diretta è possibile valutare 50 valori dell'energia di rilascio, uno per ogni crack presente all'interno della singola microcella, i quali verranno confrontati con i valori dell'energia di rilascio stessa ottenuti mediante lo studio di un solo RVE, soggetto alla macrodeformazione ottenuta nell'analisi della lastra omogeneizzata. Nella seguente Fig.4.34 viene presentato l'andamento dell'energia di rilascio, ottenuta mediante l'analisi diretta, in funzione della posizione all'interno della lastra piana. In particolare, all'interno del grafico si distinguono cinque curve, ciascuna delle quali è rappresentativa dell'energia di rilascio in

corrispondenza delle ordinate $y=0.5h$; $1.5h$; $2.5h$; $3.5h$; $4.5h$, con $h=1$ altezza della singola microcella, al variare dell'ascissa x .

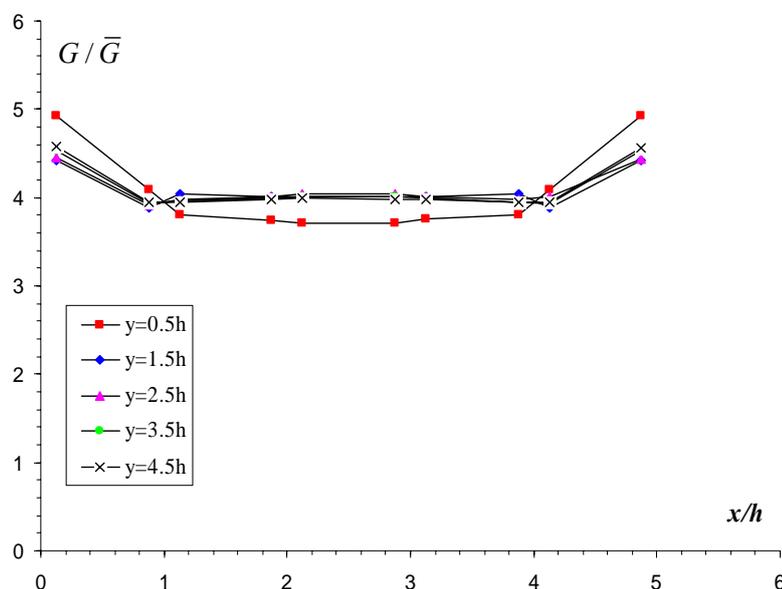


Figura 4.34. Energia di rilascio totale adimensionalizzata, per il singolo microcrack, ottenuta mediante l'analisi diretta.

All'interno del grafico l'energia di rilascio è stata adimensionalizzata utilizzando la seguente espressione:

$$\bar{G} = \frac{E_m \Delta^2 l (1 - \nu^2)}{H^2} \quad (4.8)$$

Le curve mostrano come l'energia di rilascio si mantenga praticamente costante all'interno della lastra, fatta eccezione per le microcelle poste in prossimità dell'incastro o dei lati esterni della lastra stessa, a causa dei ben noti effetti di bordo. La valutazione dei moduli omogeneizzati può essere effettuata mediante la procedura di omogeneizzazione proposta, analizzando un RVE in cui la lunghezza relativa del crack l/h viene assunta pari a 0.125. In particolare, i moduli sono stati valutati per le tre differenti condizioni al contorno considerate, per un'assegnata macrodeformazione unitaria. Nella terza fase è stato condotto, quindi, lo studio della lastra piana omogeneizzata, incastrata alla base e soggetta alla stesso spostamento $\Delta = H/1000$,

utilizzato per l'analisi diretta. In particolare sono state condotte tre analisi differenti, utilizzando in ciascuna i moduli omogeneizzati relativi alla singola condizione al contorno, imposta sull'RVE nell'analisi microscopica.

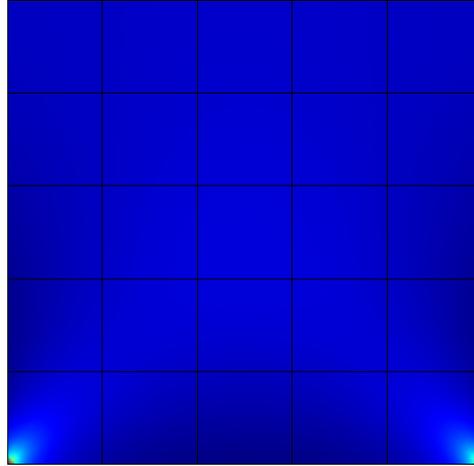


Figura 4.35. Mappa della tensione σ_y all'interno della lastra piana omogeneizzata, nel caso della condizione al contorno di fluttuazione periodiche.

All'interno della lastra è stato quindi valutato lo stato deformativo a livello della singola microcella, per ciascuna condizione al contorno. In particolare la macrodeformazione a livello del singolo RVE può essere valutata mediante la relazione seguente:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) dS \quad (4.9)$$

dove con \mathbf{n} è stata indicata la normale esterna alla singola cella. Tale macrodeformazione, in generale di tipo bi-assiale, viene impiegata nella successiva fase 4) in modo da valutare per ogni RVE il valore dell'energia di rilascio a livello del singolo crack, da confrontare con i risultati dell'analisi diretta. In particolare, vengono ottenuti per ogni microcella tre coppie di valori dell'energia di rilascio, ciascuna delle quali è associata alla singola condizione al contorno utilizzata nella procedura di omogeneizzazione. Le successive Fig.4.36, 4.37 e 4.38 illustrano l'andamento dell'energia di rilascio al variare della posizione nella lastra piana, valutata sulla cella

unitaria per le condizioni al contorno di trazioni uniformi, fluttuazioni periodiche e spostamenti lineari, rispettivamente.

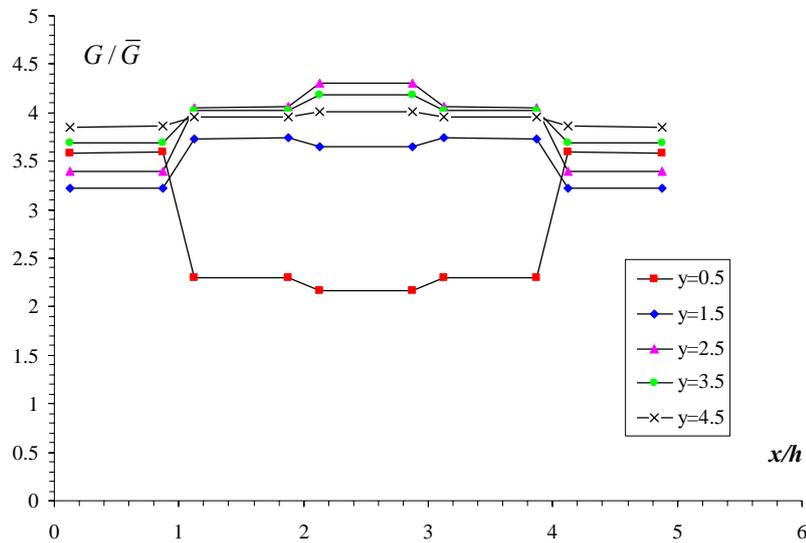


Figura 4.36. Energia di rilascio totale adimensionalizzata, per il singolo microcrack, ottenuta mediante l'imposizione della condizione di trazioni uniformi sul singolo RVE.

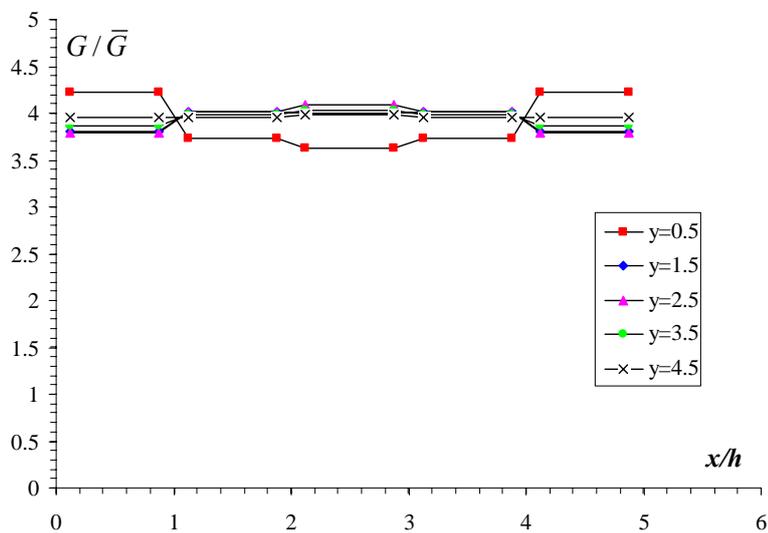


Figura 4.37. Energia di rilascio totale adimensionalizzata, per il singolo microcrack, ottenuta mediante l'imposizione della condizione di fluttuazioni periodiche sul singolo RVE.

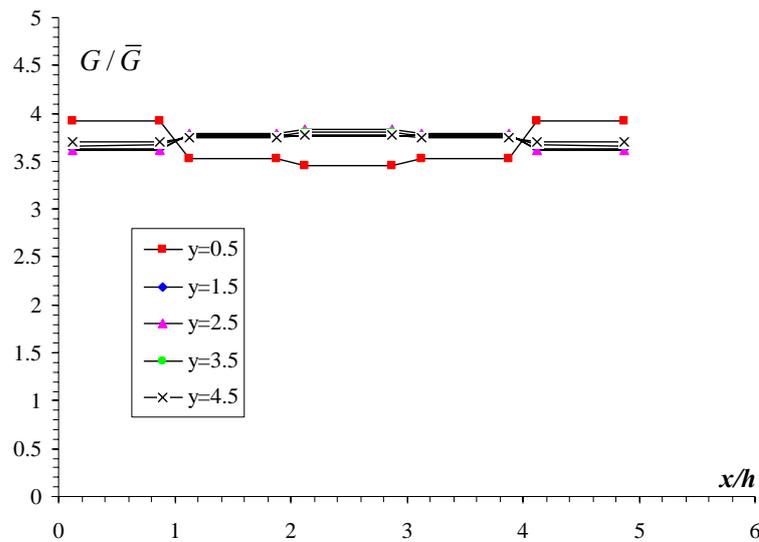


Figura 4.38. Energia di rilascio totale adimensionalizzata, per il singolo microcrack, ottenuta mediante l'imposizione della condizione di spostamenti lineari sul singolo RVE.

Dalle tre figure emerge come, mentre per le condizioni di fluttuazioni periodiche e di spostamenti lineari l'energia di rilascio si mantiene praticamente costante all'interno della lastra, fatta eccezione per le zone d'estremità a causa dei difetti di bordo, per la condizione di trazioni uniformi l'energia stessa vari in maniera apprezzabile con la posizione. D'altro canto, dal confronto con la Fig.4.34, emerge chiaramente come proprio la soluzione relativa alla condizione di trazioni uniformi sia quella che maggiormente si allontana, in termini di energia di rilascio, dalla soluzione relativa all'analisi diretta.

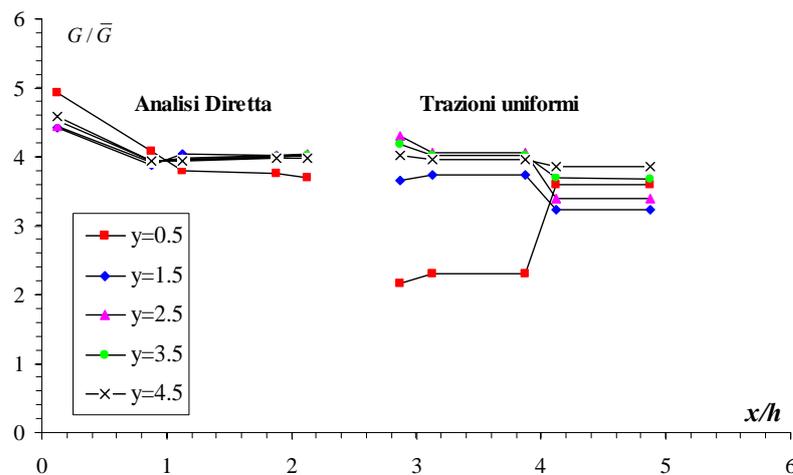


Figura 4.39. Confronto tra l'energia di rilascio totale adimensionalizzata, valutata mediante l'analisi diretta, e quella calcolata mediante l'imposizione della condizione di trazioni uniformi sul singolo RVE.

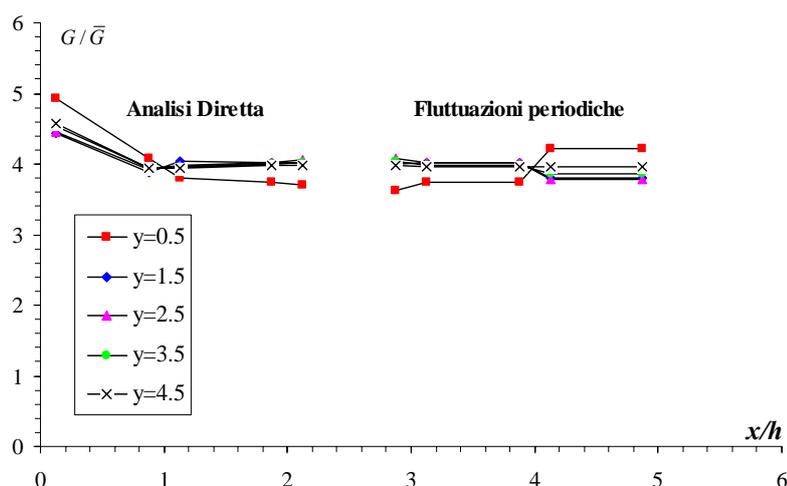


Figura 4.40. Confronto tra l'energia di rilascio totale adimensionalizzata, valutata mediante l'analisi diretta, e quella calcolata mediante l'imposizione della condizione di fluttuazioni periodiche sul singolo RVE.

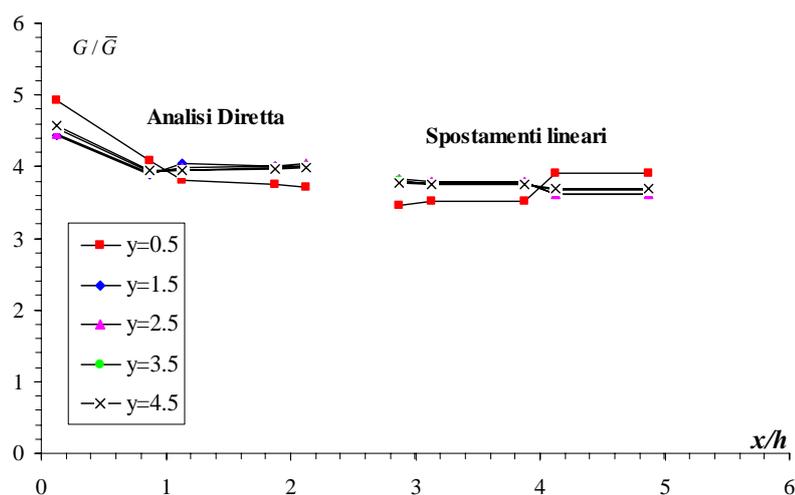


Figura 4.41. Confronto tra l'energia di rilascio totale adimensionalizzata, valutata mediante l'analisi diretta, e quella calcolata mediante l'imposizione della condizione di spostamenti lineari sul singolo RVE.

Nelle Fig.4.39, 4.40 e 4.41 vengono illustrati i confronti tra le analisi microscopiche e l'analisi diretta, dai quali emerge come la soluzione per condizioni periodiche sia quella che garantisce i risultati più accurati in termini di energia di rilascio. Nella Fig.4.40, infatti, è possibile osservare come i valori dell'energia di rilascio ottenuti mediante l'imposizione delle condizioni periodiche sul singolo RVE, siano praticamente coincidenti con quelli ottenuti mediante l'analisi diretta, specie per le

microcelle lontane dai contorni esterni della lastra piana. Nei grafici sono stato plottati i valori dell'energia di rilascio, per le celle alla sinistra dell'asse di simmetria per l'analisi diretta, e alla destra dell'asse di simmetria stesso per quanto riguarda le analisi microscopiche. In particolare, tale aspetto viene confermato anche dai seguenti grafici relativi agli errori percentuali tra i risultati ottenuti mediante l'analisi diretta e quelli relativi alle analisi di tipo microscopico.

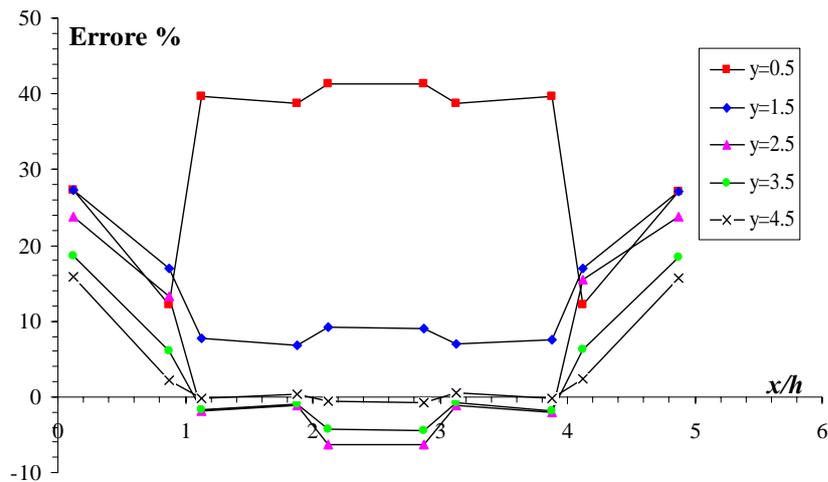


Figura 4.42. Errori percentuali tra i risultati ottenuti mediante l'analisi diretta e quelli relativi all'analisi dei singoli RVE soggetti alla condizione di trazioni uniformi.

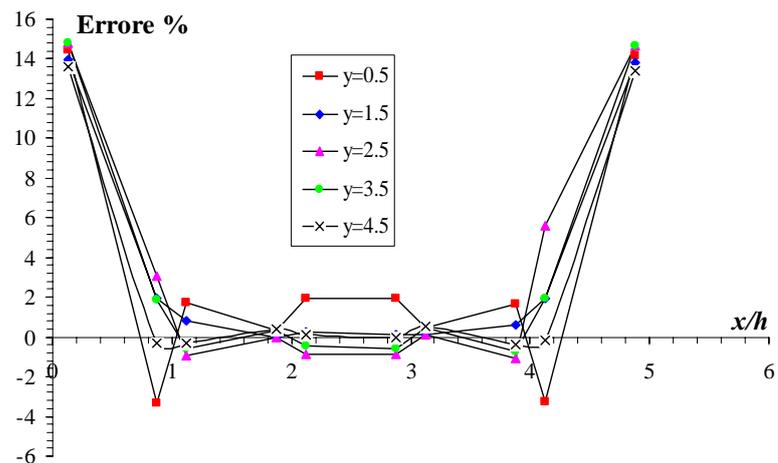


Figura 4.43. Errori percentuali tra i risultati ottenuti mediante l'analisi diretta e quelli relativi all'analisi dei singoli RVE soggetti alla condizione di fluttuazioni periodiche.

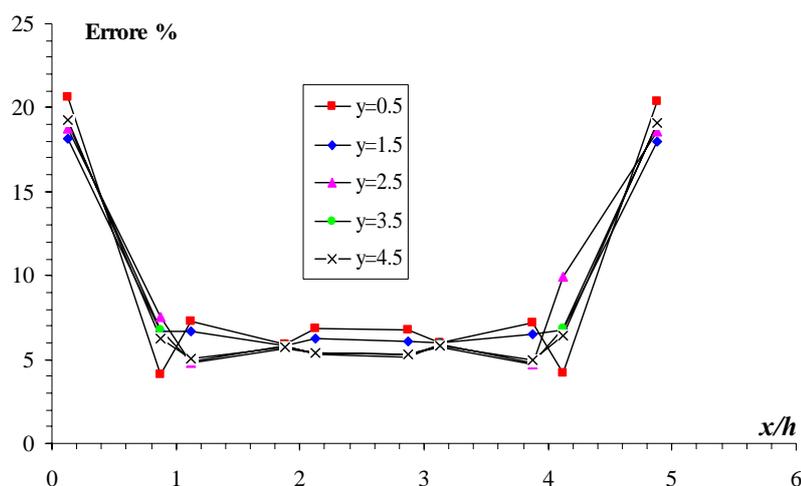


Figura 4.44. Errori percentuali tra i risultati ottenuti mediante l'analisi diretta e quelli relativi all'analisi dei singoli RVE soggetti alla condizione di spostamenti lineari.

Dalle curve emerge come i risultati, ottenuti mediante l'analisi microscopica dei singoli RVE soggetti alla condizione di trazioni uniformi sul contorno, siano quelli caratterizzati dai maggiori errori percentuali che superano anche il 40% per le celle poste in prossimità del lato incastrato della lastra. Gli errori più bassi sono, come anticipato, quelli relativi al caso in cui vengono imposte le condizioni di tipo periodico, che si aggirano al massimo attorno al 2%, fatta eccezione per le poco significative zone terminali della lastra. Per quanto riguarda il caso in cui vengono imposte le condizioni di spostamenti lineari, invece, gli errori percentuali si attestano attorno al 5%, praticamente in tutte le zone della lastra stessa. Emerge, quindi, chiaramente come mediante la condizione al contorno di fluttuazioni periodiche e trazioni antiperiodiche, si realizzi in maniera più accurata la transizione dalla micro alla macro-scala.

4.6 Transizione dalla micro alla macro-scala per il composito rinforzato mediante fibre corte

Un'analisi di tipo macroscopico, al fine di validare la procedura di omogeneizzazione proposta, è stata effettuata anche per il materiale composito rinforzato mediante l'inserimento di fibre corte. In particolare, la procedura di transizione dalla micro alla macro-scala è stata articolata, anche in questo caso, in quattro fasi successive: 1) *la*

valutazione dei moduli omogeneizzati, per un'assegnata macrodeformazione unitaria, su di un RVE caratterizzato da una lunghezza fissata del debonding tra la fibra e la matrice, per le tre differenti condizioni al contorno analizzate; 2) *l'analisi diretta* di un macroelemento piano, ottenuto mediante una sequenza regolare di 5x5 microcelle; 3) *l'analisi del macroelemento omogeneizzato*, utilizzando i moduli ottenuti nella fase 1) per ciascuna delle condizioni al contorno, al fine di valutare la macrodeformazione da applicare alla singola microcella; 4) *la valutazione dell'energia di rilascio* in entrambi gli apici del debonding tra la fibra e la matrice all'interno di ciascun RVE, sul contorno del quale viene imposta la macrodeformazione ottenuta nella fase 3).

I valori della singola energia di rilascio, valutati per mezzo della tecnica dell'integrale J , sono stati quindi confrontati con quelli ottenuti a livello di ciascuna microcella mediante l'analisi diretta, al fine di verificare la validità della procedura di omogeneizzazione. Tale analisi diretta è stata condotta, anche in questo caso, su di una lastra piana incastrata alla base, ottenuta mediante un arrangiamento regolare di 5x5 microcelle, contenente ciascuna una singola microfibrà. Sul contorno della lastra è stato imposto uno spostamento $\Delta = H/1000$, essendo H l'altezza totale della lastra stessa.

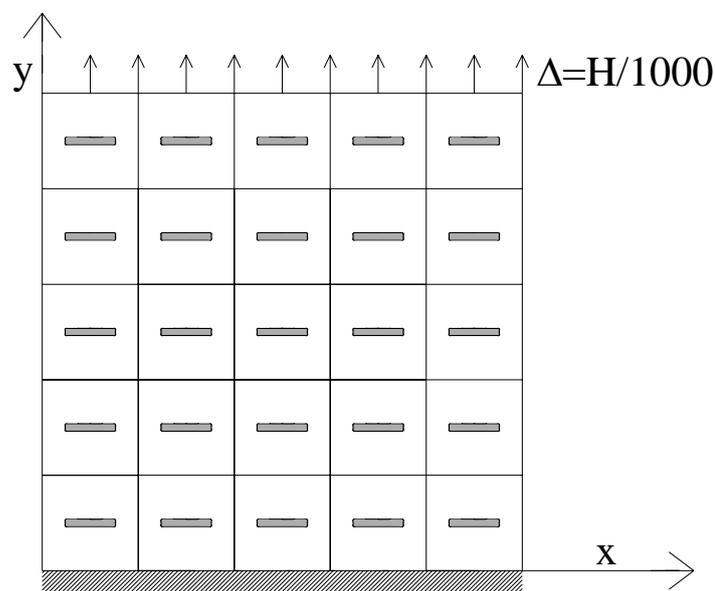


Figura 4.45. Lastra piana, ottenuta mediante una disposizione regolare di 5x5 microcelle.

La lunghezza relativa del singolo crack $l/2h$ è stata assunta pari a 0.125, sia per quanto riguarda l'analisi diretta, sia nello studio della singola microcella. Occorre osservare

come, imponendo un spostamento positivo, le facce del singolo crack non entrino mai in contatto, come mostrato dalla seguente Fig.4.46, in cui viene rappresentata la mappa delle tensioni macroscopiche σ_y all'interno della lastra piana, in seguito all'applicazione dello spostamento impresso.

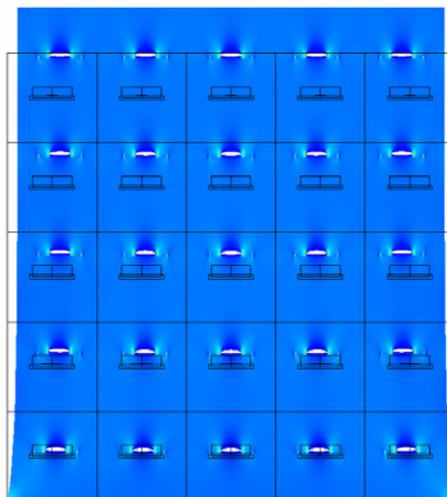


Figura 4.46. Mappa della tensione σ_y all'interno della lastra piana, in seguito all'analisi diretta.

Mediante tale analisi diretta è possibile valutare 50 valori dell'energia di rilascio, uno per ogni apice del debonding presente all'interno della singola microcella, i quali verranno confrontati con i valori dell'energia di rilascio stessa ottenuti mediante lo studio di un solo RVE, soggetto alla macrodeformazione ottenuta nell'analisi della lastra omogeneizzata.

Nella seguente Fig.4.47 viene presentato l'andamento dell'energia di rilascio, ottenuta mediante l'analisi diretta, in funzione della posizione all'interno della lastra piana. In particolare, all'interno del grafico si distinguono cinque curve, ciascuna delle quali è rappresentativa dell'energia di rilascio in corrispondenza delle ordinate $y=0.5h$; $1.5h$; $2.5h$; $3.5h$; $4.5h$, con $h=1$ altezza della singola microcella, al variare dell'ascissa x . All'interno del grafico l'energia di rilascio è stata adimensionalizzata utilizzando l'espressione (4.8), all'interno della quale con E_m si intende il modulo elastico della matrice. Le curve mostrano come l'energia di rilascio sia soggetta a delle variazioni abbastanza contenute all'interno della lastra, fatta eccezione per le microcelle poste in prossimità dell'incastro o dei lati esterni della lastra stessa, a causa dei ben noti effetti di bordo.

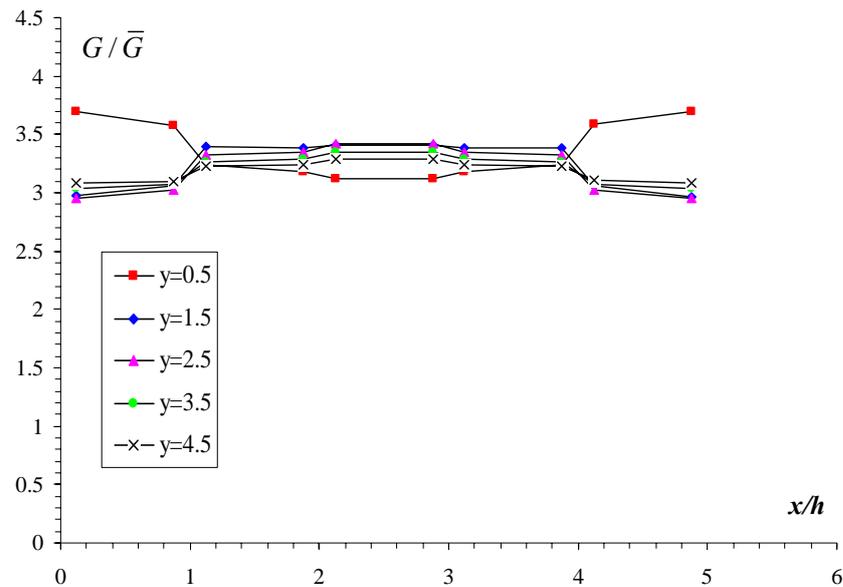


Figura 4.47. Energia di rilascio totale adimensionalizzata, per il singolo debonding fibra-matrice, ottenuta mediante l'analisi diretta.

La valutazione dei moduli omogeneizzati può essere effettuata mediante la procedura di omogeneizzazione proposta, analizzando un RVE in cui la lunghezza relativa del debonding fibra-matrice $l/2h$ viene assunta pari a 0.125. In particolare, i moduli sono stati valutati per le tre differenti condizioni al contorno considerate, per un'assegnata macrodeformazione unitaria. Nella terza fase è stato condotto, quindi, lo studio della lastra piana omogeneizzata, incastrata alla base e soggetta alla stesso spostamento $\Delta = H/1000$, utilizzato per l'analisi diretta. In particolare sono state condotte, anche in questo caso, tre analisi differenti, utilizzando in ciascuna di esse i moduli omogeneizzati relativi alla singola condizione al contorno, imposta sull'RVE nell'analisi microscopica.

All'interno della lastra è stato quindi valutato lo stato deformativo locale a livello del singolo RVE, per ciascuna condizione al contorno. In particolare, la macrodeformazione a livello della singola microcella può essere valutata mediante la relazione (4.9), dove con \mathbf{n} viene indicata la normale esterna alla singola cella. Tale macrodeformazione di tipo bi-assiale, viene impiegata nella successiva fase 4) in modo da valutare per ogni RVE il valore dell'energia di rilascio per entrambi gli apici del singolo debonding fibra-matrice, da confrontare con i risultati dell'analisi diretta. In particolare, vengono ottenuti per ogni microcella tre coppie di valori dell'energia di

rilascio, ciascuna delle quali è associata alla singola condizione al contorno utilizzata nella procedura di omogeneizzazione. Le successive Fig.4.48, 4.49 e 4.50 illustrano l'andamento dell'energia di rilascio al variare della posizione all'interno della lastra piana, valutata sulla cella unitaria per le condizioni al contorno di trazioni uniformi, fluttuazioni periodiche e spostamenti lineari, rispettivamente.

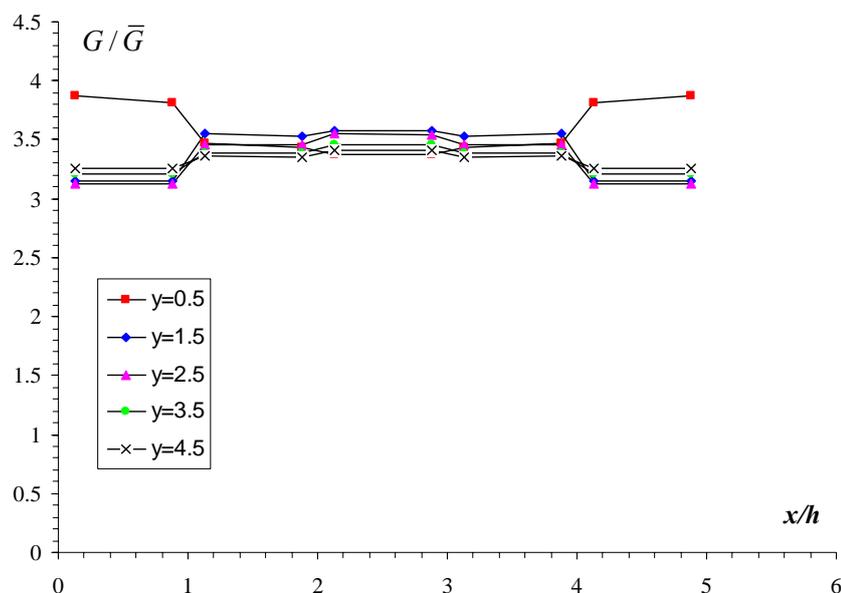


Figura 4.48. Energia di rilascio totale adimensionalizzata, per il singolo debonding fibra-matrice, ottenuta mediante l'imposizione della condizione di trazioni uniformi sul singolo RVE.

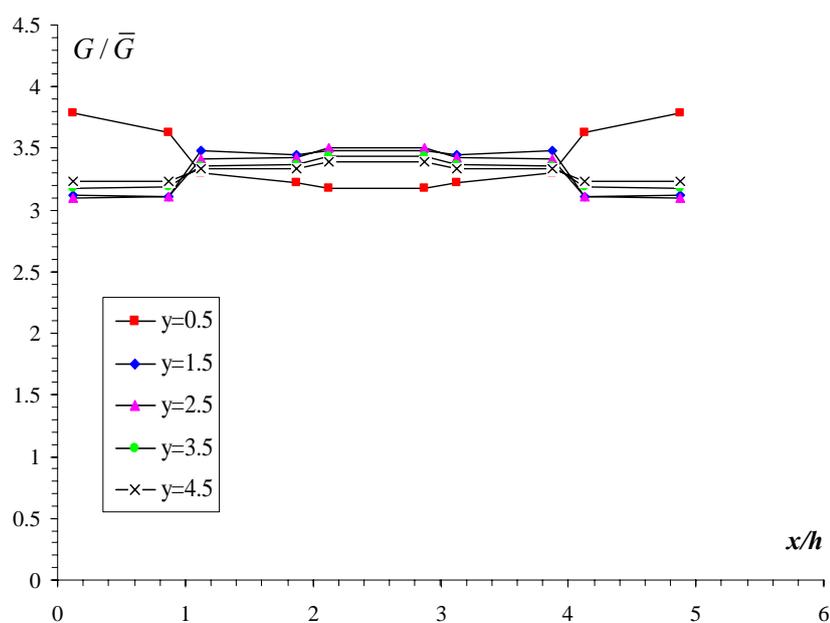


Figura 4.49. Energia di rilascio totale adimensionalizzata, per il singolo debonding fibra-matrice, ottenuta mediante l'imposizione della condizione di fluttuazioni periodiche sul singolo RVE.

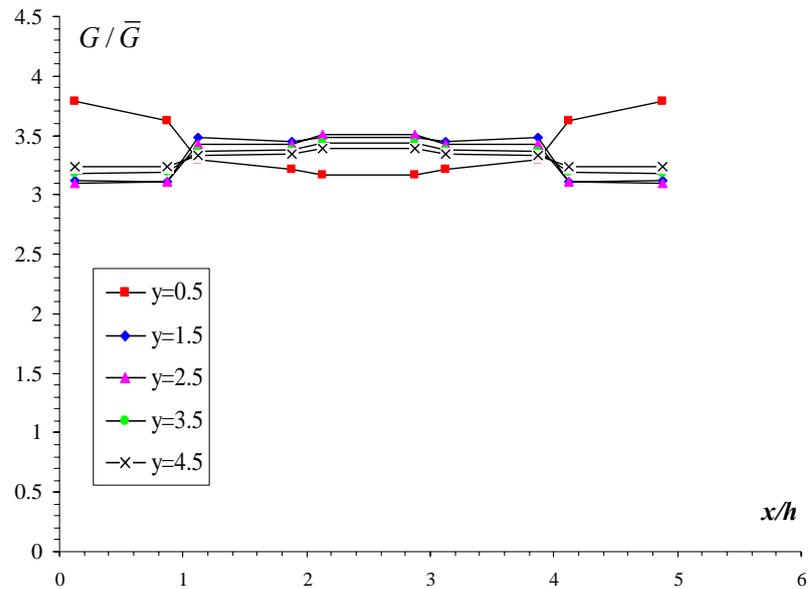


Figura 4.50. Energia di rilascio totale adimensionalizzata, per il singolo debonding fibra-matrice, ottenuta mediante l'imposizione della condizione di spostamenti lineari sul singolo RVE.

Le tre figure mostrano come, sostanzialmente, l'energia di rilascio non sia influenzata in maniera apprezzabile dalla condizione al contorno adottata nella transizione dalla micro alla macro-scala. Dal confronto con la Fig.4.47 emerge, infatti, come si abbia un buon accordo, in termini di energia di rilascio, tra i risultati ottenuti mediante l'analisi diretta e quelli ottenuti attraverso le tre analisi microscopiche condotte su di una cella unitaria, sotto le tre differenti condizioni al contorno adottate. Leggere differenze si notano solo per il caso in cui viene imposta la condizione di trazioni uniformi, come già visto nel caso del materiale poroso, essendo questa la condizione maggiormente influenzata dagli effetti di bordo.

Nelle Fig.4.51, 4.52 e 4.53 vengono illustrati i confronti tra le analisi microscopiche e l'analisi diretta, dai quali emerge come la soluzione per condizioni periodiche sia comunque quella che garantisce i risultati più accurati in termini di energia di rilascio, come già osservato per il caso del materiale poroso. Nella Fig.4.52, infatti, è possibile osservare come i valori dell'energia di rilascio ottenuti mediante l'imposizione delle condizioni periodiche sul singolo RVE, siano praticamente coincidenti con quelli ottenuti mediante l'analisi diretta, specie per le microcelle lontane dai contorni esterni delle lastra piana. Occorre osservare, tuttavia, come in questo caso si abbia un ottimo

accordo anche tra i risultati ottenuti mediante l'analisi diretta e quelli relativi all'analisi microscopica sotto la condizione di spostamenti lineari, come mostrato dalla Fig.4.53. Nei grafici sono stato plottati i valori dell'energia di rilascio, per le celle alla sinistra dell'asse di simmetria per l'analisi diretta, e alla destra dell'asse di simmetria stesso per quanto riguarda le analisi microscopiche.

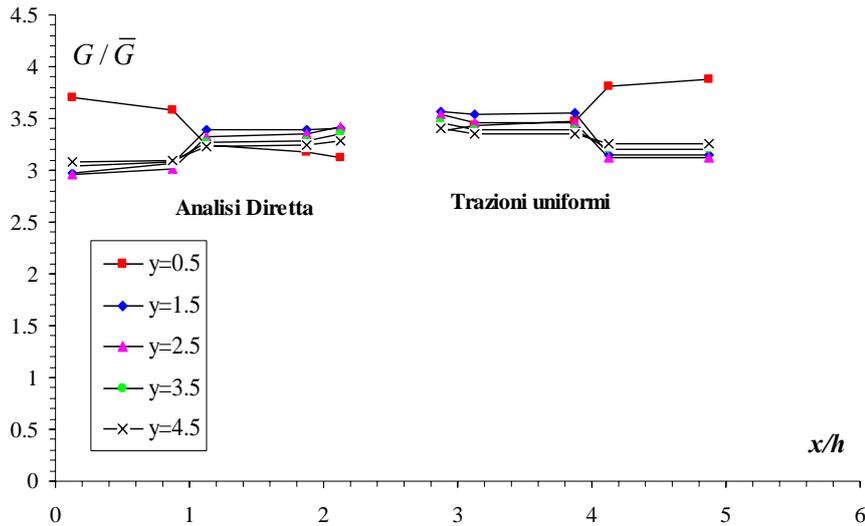


Figura 4.51. Confronto tra l'energia di rilascio totale adimensionalizzata, valutata mediante l'analisi diretta, e quella calcolata mediante l'imposizione della condizione di trazioni uniformi sul singolo RVE.

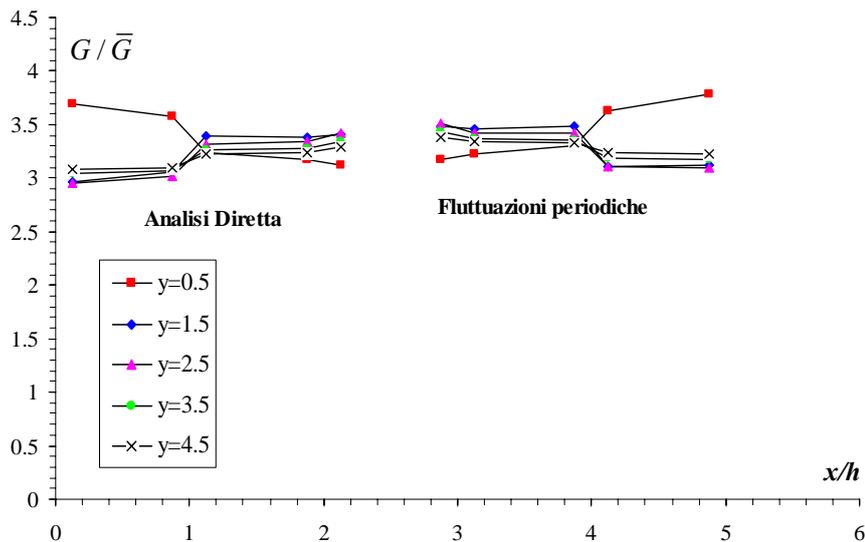


Figura 4.52. Confronto tra l'energia di rilascio totale adimensionalizzata, valutata mediante l'analisi diretta, e quella calcolata mediante l'imposizione della condizione di fluttuazioni periodiche sul singolo RVE.

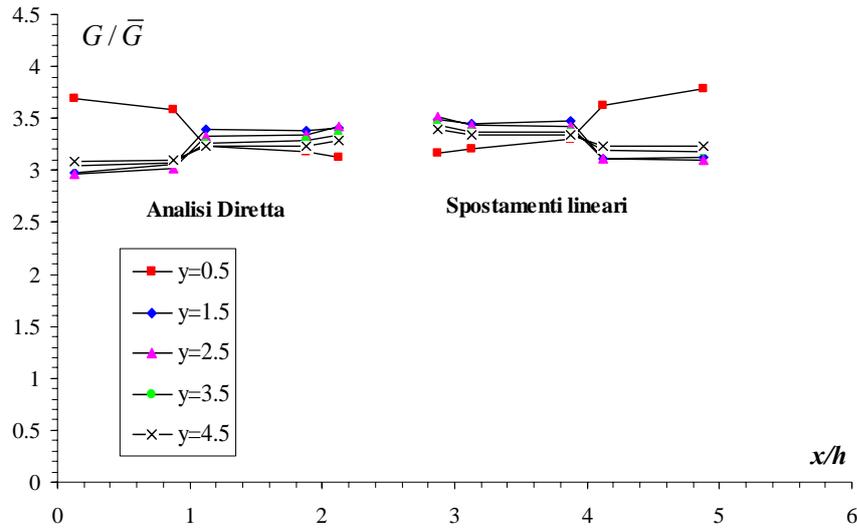


Figura 4.53. Confronto tra l'energia di rilascio totale adimensionalizzata, valutata mediante l'analisi diretta, e quella calcolata mediante l'imposizione della condizione di spostamenti lineari sul singolo RVE.

Il fatto che praticamente tutti i tipi di condizione al contorno imposta sull'RVE garantiscano un buon accordo con la soluzione relativa all'analisi diretta, viene confermato anche dalle seguenti Fig.4.54, 4.55 e 4.56 in cui vengono presentati i grafici relativi agli errori percentuali tra i risultati ottenuti mediante l'analisi diretta stessa e quelli relativi alle analisi di tipo microscopico.

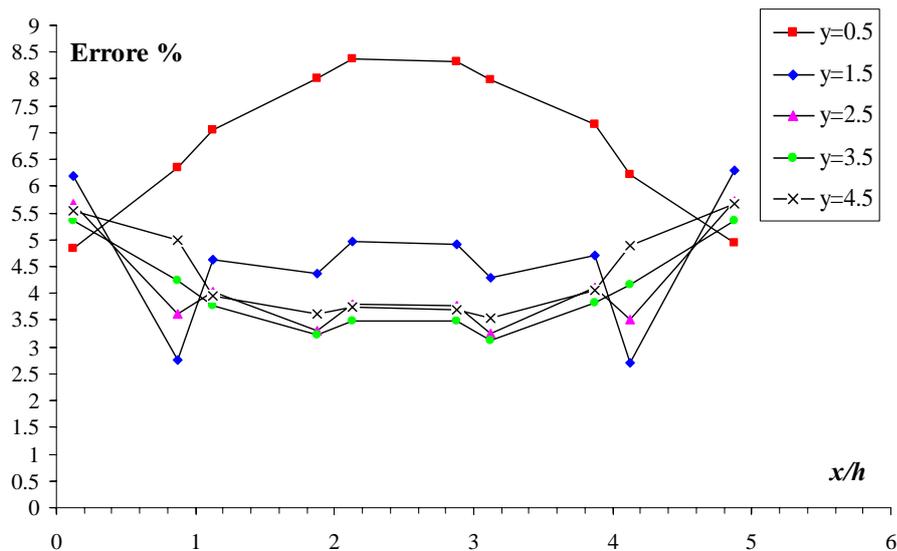


Figura 4.54. Errori percentuali tra i risultati ottenuti mediante l'analisi diretta e quelli relativi all'analisi dei singoli RVE soggetti alla condizione di trazioni uniformi.

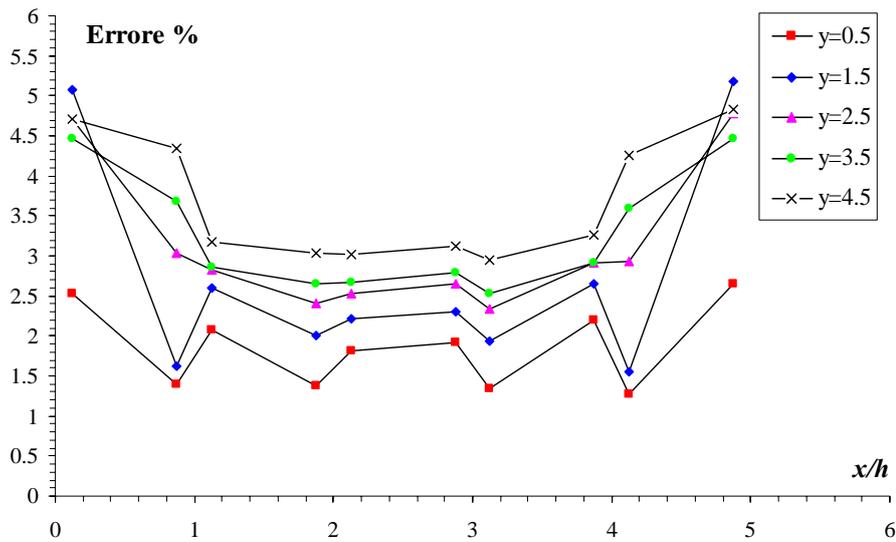


Figura 4.55. Errori percentuali tra i risultati ottenuti mediante l’analisi diretta e quelli relativi all’analisi dei singoli RVE soggetti alla condizione di fluttuazioni periodiche.

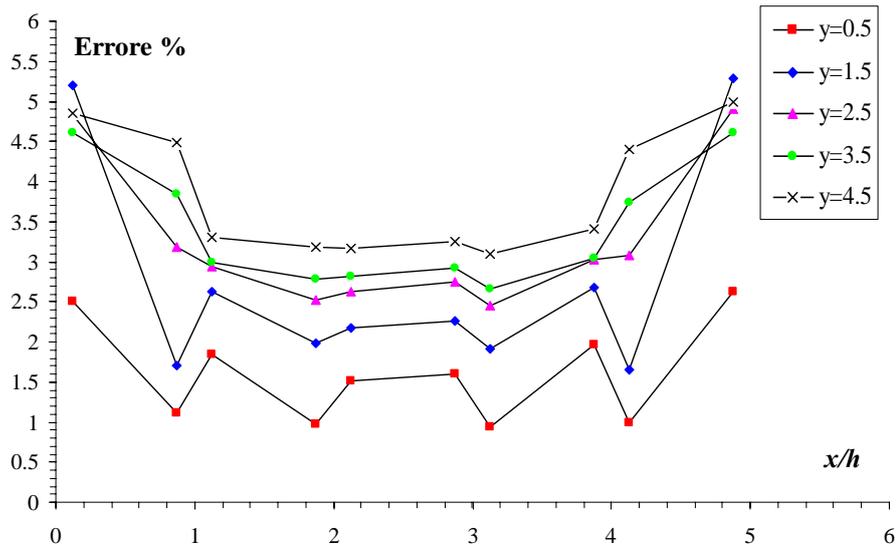


Figura 4.56. Errori percentuali tra i risultati ottenuti mediante l’analisi diretta e quelli relativi all’analisi dei singoli RVE soggetti alla condizione di spostamenti lineari.

Dalle curve emerge come i risultati, ottenuti mediante l’analisi microscopica dei singoli RVE soggetti alla condizione di trazioni uniformi sul contorno, siano quelli caratterizzati dai maggiori errori percentuali che tuttavia raggiungono al massimo il 9% per le celle poste in prossimità del lato incastrato della lastra, attestandosi attorno al 4% per la zona centrale della lastra. Per quanto riguarda le celle poste proprio in corrispondenza della zona centrale della lastra piana, invece, è possibile osservare

come sia gli errori percentuali relativi al caso in cui sono imposte le condizioni periodiche, che quello in cui viene applicata la condizione di spostamenti lineari, si aggirano al massimo attorno al 3%. Emerge quindi chiaramente come, per il composito rinforzato mediante fibre corte, si realizzi un'ottimale transizione dalla micro alla macro-scala per tutti i tipi di condizione al contorno analizzati.

