
Capitolo 2

Proprietà macroscopiche di microstrutture in presenza di fratture e/o cavità

Obiettivo del presente capitolo è lo studio dei problemi di omogeneizzazione di materiali compositi caratterizzati da microstrutture fortemente eterogenee.

Particolare attenzione sarà rivolta all'analisi di microstrutture caratterizzate dalla presenza di inclusioni e micro-cracks, che influenzano fortemente il comportamento macroscopico del materiale. A tal fine si osserverà come spesso risulti molto utile l'utilizzo di analisi di tipo incrementale nell'ambito della *Micromeccanica* per meglio cogliere l'influenza dell'evoluzione della microstruttura, a causa della presenza dei micro-cracks, sul comportamento globale del materiale composito [Nemat-Nasser S., Hori M., 1993].

2.1 Introduzione

La meccanica del continuo assume che i materiali idealizzati siano costituiti da punti materiali e dal loro intorno infinitesimo, all'interno del quale la distribuzione del materiale, le tensioni e le deformazioni possono essere assunte sostanzialmente uniformi.

A livello della microscala, tuttavia, l'intorno infinitesimo di un punto materiale risulta, in generale, non uniforme, annoverando vari costituenti con proprietà e forme differenti, che rendono la microstruttura complessa ed in continua evoluzione [Nemat-Nasser S., Hori M., 1993].

Pertanto, i campi di tensione e deformazione all'interno dell'elemento infinitesimo di materiale risultano essere assolutamente non uniformi a livello delle microscala.

Principale obiettivo della Micromeccanica è quello di rappresentare in maniera rigorosa e sistematica le proprietà del continuo in funzione dei parametri che

caratterizzano la microstruttura e le proprietà dei microcostituenti dell'intorno del punto materiale.

A tal fine viene introdotto il concetto di RVE (*Representative Volume Element*) dovuto ad Hill (1963), che per un punto materiale è un volume infinitesimo il quale risulta essere statisticamente rappresentativo delle proprietà dell'intorno del punto stesso. In Micromeccanica si definisce, quindi, *macro-elemento* il punto materiale all'interno del continuo, *micro-elementi*, invece, i corrispondenti microcostituenti dell'RVE. Al fine di risultare statisticamente rappresentativo delle proprietà locali del continuo, un RVE deve, quindi, contenere un ampio numero di micro-elementi.

La seguente Fig.2.1 mostra un continuo, all'interno del quale è possibile isolare un punto materiale P. L'intorno di tale punto materiale può essere caratterizzato da una complessa microstruttura contenente varie eterogeneità, come vuoti, inclusioni, microfibre, micro-cracks e difetti simili. Al fine di essere realmente rappresentativo l'RVE scelto deve contenere un ampio numero di tali micro-eterogeneità.

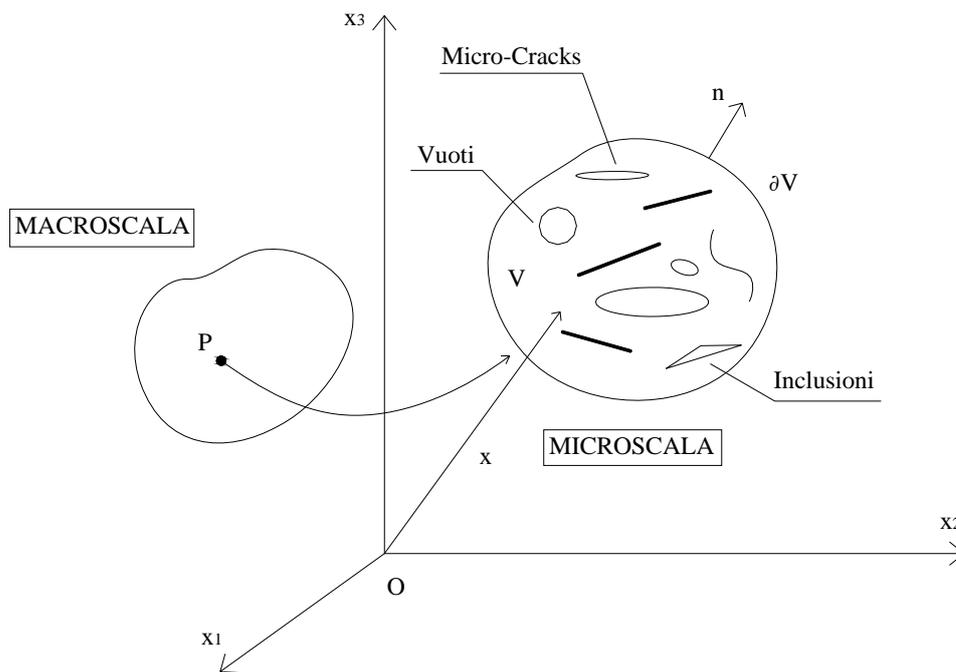


Figura 2.1. Microstruttura di un RVE per l'intorno infinitesimo del punto materiale P.

Per quantificare in maniera rigorosa le dimensioni di un RVE, che in generale non andranno oltre pochi millimetri, occorre definire due tipi di scala: la prima è rappresentata dalla scala del continuo, definita *macro-scala*, mediante la quale è

possibile misurare l'intorno infinitesimo del punto materiale; la seconda, invece, è la cosiddetta *micro-scala*, che misura le dimensioni del più piccolo microcostituente all'interno della microstruttura, le cui proprietà si assume abbiano una diretta influenza sulle proprietà globali del macro-elemento.

In generale, indicata con D la dimensione caratteristica del macro-elemento e con d quella relativa al micro-elemento, si assume che la prima sia notevolmente maggiore della seconda. Indicando con ε il rapporto tra le due, si assume cioè:

$$\varepsilon = \frac{d}{D} \ll 1 \quad (2.1)$$

2.2 Descrizione dell'RVE

In Micromeccanica, come detto, il concetto di RVE viene utilizzato al fine di stimare le proprietà costitutive del continuo in un punto materiale, in termini di microstruttura e microcostituenti. Tali proprietà costitutive vengono, poi, utilizzate all'interno delle equazioni di bilancio, al fine di valutare la risposta, sotto i carichi applicati e le relative condizioni al contorno, della massa continua. All'interno di tali equazioni globali compaiono le forze di volume, legate all'effetto dei materiali non in contatto con il continuo considerato. Tuttavia, è lecito trascurare tali forze di volume nella scrittura di un problema con condizioni al contorno che riguardi l'RVE, date le sue dimensioni trascurabili rispetto al continuo circostante.

L'obiettivo principale risulta essere la valutazione delle proprietà medie dell'RVE, soggetto a condizioni al contorno corrispondenti ai campi uniformi di tensione e deformazione, valutati all'interno dell'intorno infinitesimo del punto materiale, che l'RVE stesso è chiamato a rappresentare. In altre parole, un RVE, o cella unitaria, può essere visto come un mezzo eterogeneo sotto assegnate condizioni al contorno, corrispondenti ai campi locali uniformi valutati all'interno del continuo punto per punto. La risoluzione del problema con condizioni al contorno locale sulla cella unitaria, poi, conduce alla valutazione delle proprietà elastiche medie del continuo circostante, che è possibile utilizzare in problemi di equilibrio globale.

Data la complessità della microstruttura del materiale, che presenta varie micro-eterogeneità che la rendono in continua evoluzione sotto deformazione, le proprietà medie valutate sull'RVE possono subire continui cambiamenti, che rendono, quindi, necessario l'utilizzo di analisi di tipo non-lineare.

Si consideri un RVE di volume V limitato da una superficie regolare ∂V . Un punto all'interno della cella unitaria viene rappresentato mediante il vettore posizione \mathbf{x} , il quale, utilizzando i tre versori della terna cartesiana di riferimento \mathbf{e}_i ($i=1,2,3$), può essere rappresentato nella forma seguente:

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i \quad (2.2)$$

Sotto assegnate condizioni sul contorno ∂V , l'RVE deve risultare in equilibrio, mentre le deformazioni devono risultare compatibili. Definiti, quindi, $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ e $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ rispettivamente i campi di spostamento, di deformazione e di tensione all'interno di V devono valere le seguenti equazioni di governo, ricordando l'assenza di forze di volume, legata alla forte differenza di scala tra macro e microstruttura:

$$\begin{cases} \text{Div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = 0 & \text{in } V \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \text{sym}\{\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})\} = \frac{1}{2}\{\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})^T\} & \text{in } V \end{cases} \quad (2.3)$$

Nella prima delle (2.3) sono contenute le classiche equazioni indefinite di equilibrio in assenza di forze volume, che mostrano come il campo di tensione sia a divergenza nulla per l'RVE, mentre nella seconda sono contenute le classiche relazioni di congruenza tra deformazioni e spostamenti. Sul contorno ∂V possono essere assegnate, ad esempio, le trazioni auto-equilibrate \mathbf{t}^0 non necessariamente uniformi, legate al tensore delle tensioni mediante le ben note relazioni di equilibrio sulla superficie esterna:

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{t}^0 \quad \text{su } \partial V \quad (2.4)$$

dove \mathbf{n} rappresenta la normale esterna al contorno ∂V della cella unitaria. In alternativa è possibile imporre una condizione al contorno sugli spostamenti, assegnando il campo di spostamenti, non necessariamente lineare, \mathbf{u}^0 su ∂V :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \quad \text{su } \partial V \quad (2.5)$$

Le due condizioni al contorno possono essere riassunte nelle seguenti Fig.2.2 a) e b):

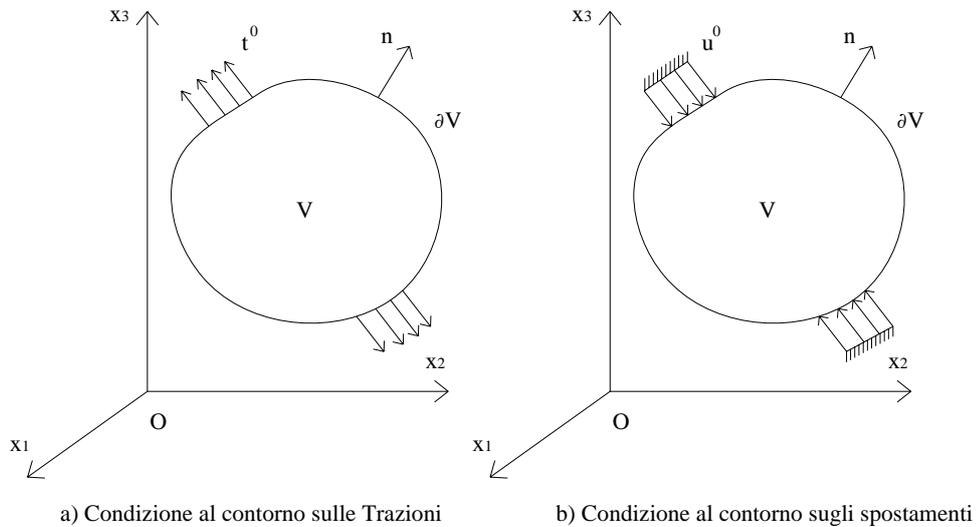


Figura 2.2. a) Condizione al contorno sulle tensioni; b) Condizione al contorno sugli spostamenti.

Nel caso in cui l'intorno del punto materiale analizzato sia caratterizzato da una microstruttura in continua evoluzione, a causa della presenza di micro-eterogeneità variabili sotto deformazione, come micro-cracks, il problema diviene fortemente non-lineare, come già osservato. In tale situazione, quindi, è necessario effettuare sull'RVE un'analisi di tipo incrementale, applicando sul contorno rispettivamente un incremento della trazione \mathbf{t}^0 o dello spostamento \mathbf{u}^0 . Le equazioni di governo presentano la medesima forma, ma ai campi di spostamento, deformazione e tensione vanno sostituiti i valori incrementali:

$$\begin{cases} Div(\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})) = 0 & \text{in } V \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) = sym\{\nabla \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x})\} = \frac{1}{2}\{\nabla \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \nabla \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x})^T\} & \text{in } V \end{cases} \quad (2.6)$$

2.3 Tecniche della Media

Definito il problema con condizioni al contorno all'interno dell'RVE, la valutazione delle proprietà costitutive del materiale circostante verrà condotto mediante l'utilizzo dei metodi della media che, come visto, rappresentano una delle tecniche fondamentali di omogeneizzazione. Un simile approccio consente un'ottimale valutazione dei moduli del materiale omogeneizzato, rendendo inoltre possibile la creazione di un forte legame tra macropotenziali e micropotenziali per quei solidi eterogenei che ammettono l'esistenza di un potenziale stesso. Vedremo, inoltre, come mediante tale tecnica risulti possibile tenere in conto la presenza all'interno dell'RVE di qualsiasi tipo di micro-eterogeneità, evidenziandone l'influenza sulla valutazione dei campi medi di tensione e deformazione, ai quali risultano legate le proprietà meccaniche globali del materiale.

2.3.1 Tensioni Medie

Siano o meno uniformi le trazioni auto-equilibrate sul contorno dell'RVE, il valore medio sul volume del campo di tensione $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ risulta essere completamente definito in funzioni di tali trazioni. Nota una qualsiasi quantità integrabile $\mathbf{T}(\mathbf{x})$, il suo valore medio sul volume assume tale rappresentazione:

$$\langle \mathbf{T} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{T}(\mathbf{x}) dV \quad (2.7)$$

Al fine di valutare, allora, il campo medio del campo di tensione, osserviamo come il vettore posizione \mathbf{x} soddisfa la seguente relazione:

$$\nabla \mathbf{x} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{I}^{(2s)} \quad (2.8)$$

dove δ_{ij} rappresenta il delta di Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ quando $i=j$ e $\delta_{ij} = 0$ quando $i \neq j$) mentre $\mathbf{I}^{(2s)}$ rappresenta il tensore identità del secondo ordine.

Ricordando la prima delle (2.3), che indica come il campo di tensione sia a divergenza nulla è possibile scrivere la seguente uguaglianza:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I}^{(2s)} = \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{x}) = \text{Div}(\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{x}) \quad (2.9)$$

A questo punto applicando la (2.7) al campo tensionale, nonché utilizzando il teorema di Gauss della divergenza, si ottiene il valore medio per la tensione:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{V} \int_V \text{Div}(\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{x}) dV = \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{x}) \mathbf{n} dS \quad (2.10)$$

Ricordando le relazioni di equilibrio al contorno (2.4), per un assegnata trazione auto-equilibrata \mathbf{t}^0 otteniamo, in definitiva:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{t}^0 \otimes \mathbf{x} dS \quad (2.11)$$

Nel caso in cui la microstruttura sia in evoluzione e diventi, quindi, necessario un problema di tipo incrementale, l'incremento della tensione media assume la forma seguente:

$$\bar{\dot{\boldsymbol{\sigma}}} = \langle \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \dot{\mathbf{t}}^0 \otimes \mathbf{x} dS \quad (2.12)$$

2.3.2 Deformazioni Medie

Siano o meno lineari gli spostamenti imposti sul contorno dell'RVE, il valore medio sul volume del campo di deformazione $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ risulta essere completamente definito in funzioni di tali spostamenti. Applicando il teorema di Gauss e ricordando la condizione al contorno espressa dalla (2.5) otteniamo la seguente espressione per la media del gradiente del campo di spostamento:

$$\langle \nabla \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \nabla \mathbf{u} \, dV = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{u} \otimes \mathbf{n} \, dS = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{u}^0 \otimes \mathbf{n} \, dS \quad (2.13)$$

D'altro canto, essendo legate le deformazioni, mediante le ben note relazioni di congruenza, alla parte simmetrica del gradiente del campo di spostamento, otteniamo:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \frac{1}{2} (\mathbf{u}^0 \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{u}^0) \, dS \quad (2.14)$$

Analogamente, essendo la rotazione rigida la parte antisimmetrica del gradiente dello spostamento, può scriversi:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \langle \boldsymbol{\omega} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \frac{1}{2} (\mathbf{u}^0 \otimes \mathbf{n} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{u}^0) \, dS \quad (2.15)$$

Come visto in precedenza, gli spostamenti assegnati sul contorno dell'RVE risultano essere compatibili ed escludono traslazioni o rotazioni rigide per la cella unitaria. Tuttavia è possibile dimostrare come un qualsiasi spostamento rigido non alteri l'espressione ottenuta nella (2.14) per la deformazione media. Si consideri, infatti, il seguente spostamento rigido aggiuntivo:

$$\mathbf{u}^r + \boldsymbol{\omega}^r \mathbf{x} \quad (2.16)$$

dove $\boldsymbol{\omega}^r$ rappresenta il tensore antisimmetrico al quale risulta essere assegnata una rotazione rigida del corpo. Effettuando il valore medio del gradiente di tale spostamento aggiuntivo, si ottiene, mediante l'applicazione del teorema della divergenza:

$$\langle \nabla (\mathbf{u}^r + \boldsymbol{\omega}^r \mathbf{x}) \rangle = \boldsymbol{\omega}^r \quad (2.17)$$

Dalla (2.17) emerge, quindi, chiaramente come tale spostamento rigido non altera l'espressione della deformazione media.

Nel caso in cui la microstruttura sia in evoluzione e diventi, quindi, necessario un problema di tipo incrementale, l'incremento della deformazione media assume la forma seguente:

$$\bar{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}^0 \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \dot{\mathbf{u}}^0) dS \quad (2.18)$$

2.3.3 Energia di deformazione Media

Il bilancio energetico conduce alla seguente equazione locale espressa in termini incrementali:

$$\rho \dot{e} + \text{Div}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho h \quad \text{in } V \quad (2.19)$$

dove e rappresenta la densità di energia interna, ρ la densità di massa, \mathbf{q} il flusso di calore ed h il calore associato alle radiazioni o ad altre fonti di energia. Nella (2.19), inoltre, il prodotto $\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ rappresenta la variazione del lavoro prodotto dalle tensioni per unità di volume.

Supponendo che il materiale sia di tipo elastico, esiste la funzione $\phi = \phi(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta)$, nota come *Energia per unità di volume di Helmholtz*, dove θ rappresenta la temperatura e per la quale vale:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \\ \eta = -\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{cases} \quad (2.20)$$

Nella seconda delle (2.20) η rappresenta l'entropia. Nel caso in cui la temperatura si mantenga costante vale poi che:

$$\dot{\phi} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.21)$$

Per cui, a temperatura costante, la variazione del lavoro delle tensioni eguaglia la variazione della densità di energia di Helmholtz. Introducendo la funzione di Energia complementare $\psi = \psi(\boldsymbol{\sigma}, \theta)$, è possibile scrivere inoltre:

$$\phi(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta) + \psi(\boldsymbol{\sigma}, \theta) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.22)$$

Mentre da tale energia complementare è possibile ottenere:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \eta = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{cases} \quad (2.23)$$

In generale il materiale costituente l'RVE potrebbe non essere elastico e non ammettere quindi l'esistenza di un potenziale. Aldilà, tuttavia, delle proprietà dei costituenti la cella unitaria risulta di notevole interesse investigare la media dell'energia di deformazione, ed osservare, in particolare, sotto quali condizioni vale l'uguaglianza tra $\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle$ e $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle$. A tal fine osserviamo come:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \dot{\boldsymbol{u}}) = \text{Div}(\boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{u}}) \quad (2.24)$$

La (2.24) è stata ottenuta sfruttando la simmetria del tensore delle tensioni e la prima delle (2.3), per la quale il campo di tensione è a divergenza nulla. Da tale risultato è possibile risalire al valore medio della variazione del lavoro delle tensioni:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \text{Div}(\boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{u}}) dV = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \boldsymbol{t} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dS \quad (2.25)$$

dove \mathbf{t} rappresenta la trazione sul contorno dell'RVE. La differenza tra $\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle$ e $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle$ è espressa mediante la relazione seguente [Hill, 1963]:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle - \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \{ \dot{\mathbf{u}} - \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \cdot \mathbf{x} \} \cdot \{ \mathbf{t} - \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \mathbf{n} \} dS \quad (2.26)$$

Indipendentemente dalle proprietà del materiale, l'identità (2.26) risulta valida nell'ambito delle piccole deformazioni. Per particolari condizioni sul contorno dell'RVE il membro di destra tende a zero e la media della variazione del lavoro delle tensioni eguaglia la variazione del lavoro delle tensioni medie.

Ad esempio, nel caso in cui sul contorno dell'RVE si abbia la condizione di *trazioni uniformi* avremo:

$$\mathbf{t}^0 = \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{n} \quad (2.27)$$

dove $\boldsymbol{\sigma}^0$ rappresenta un tensore simmetrico del secondo ordine costante. Sfruttando la (2.27) è possibile esprimere le tensioni medie come:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^0 \left\{ \frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{n} \otimes \mathbf{x} dS \right\} = \boldsymbol{\sigma}^0 \quad (2.28)$$

Per la (2.28), quindi, il membro di destra della (2.26) tende a zero garantendo l'uguaglianza tra $\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle$ e $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle$.

Quando, invece, sul contorno della cella unitaria viene imposta la condizione di *velocità assegnate lineari*, è possibile esprimerle mediante un tensore costante del secondo ordine $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0$:

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 \mathbf{x} \quad (2.29)$$

Dalla (2.29), emerge che:

$$\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 \quad (2.30)$$

La (2.30) consente di annullare il secondo membro della (2.26), garantendo, anche in questo caso, l'uguaglianza tra $\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle$ e $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle$.

L'espressione (2.26) resta valida anche nel caso in cui il termine incrementale diventa $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ e l'incremento di deformazione viene rimpiazzato da $\boldsymbol{\varepsilon}$, a patto che l'incremento della tensione sia comunque auto-equilibrato ($Div(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) = 0$) e rappresentato mediante un tensore simmetrico.

Nel caso generale, tuttavia, l'eguaglianza (2.26) può essere riscritta in funzione del classico tensore delle tensioni e di quello delle deformazioni, senza coinvolgere i loro valori incrementali:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \rangle - \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \{ \mathbf{u} - \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \mathbf{x} \} \cdot \{ \mathbf{t} - \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \mathbf{n} \} dS \quad (2.31)$$

Anche per quanto riguarda la (2.31) si osserva come, considerando le condizioni sul contorno dell'RVE di *trazioni uniformi* oppure di *spostamenti lineari*, viene garantito l'annullamento del membro di destra, che assicura l'uguaglianza tra $\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ e $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$.

E' importante notare come la (2.26) così come la (2.31) siano state ottenute indipendentemente dal fatto che esista o meno un legame tra le tensioni auto-equilibrate e le deformazioni considerate. In altre parole, le relazioni ottenute valgono indipendentemente dalle proprietà costitutive del materiale, richiedendo solo considerazioni sull'equilibrio e sulla congruenza.

2.4 Interfacce e discontinuità

In generale, le proprietà globali di un RVE risultano essere fortemente influenzate dalla struttura, dalla composizione chimica, dalla resistenza e da altri attributi rilevanti delle interfacce comprese tra i suoi micro-costituenti.

Ad esempio, la resistenza e la rigidità dei materiali ceramici fibro-rinforzati risultano direttamente legate alla natura del legame a livello dell'interfaccia tra fibre e matrice. L'insacco e l'avanzamento di difetti quali micro-cracks oppure il debonding fibra-matrice sono associati ad una progressiva perdita di energia meccanica per il materiale, alla quale risulta associata la conseguente riduzione della resistenza e della rigidità del materiale stesso. Tali fenomeni possono essere rappresentati, sostanzialmente, come delle discontinuità negli spostamenti, che ovviamente influenzano notevolmente la risposta globale della cella unitaria.

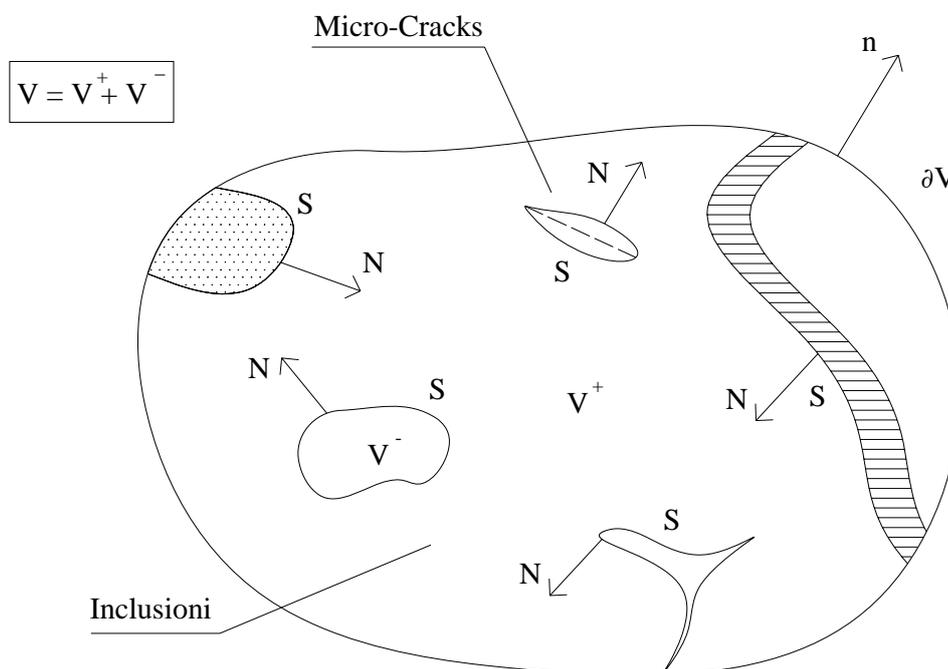


Figura 2.3. Discontinuità all'interno dell'RVE.

Con riferimento alla Fig.2.3 viene indicata con S la collezione di tutte le superfici contenute all'interno dell'RVE. E' possibile individuare tre tipi di superfici: (1) una superficie di tipo chiuso, totalmente contenuta all'interno dell'RVE e la quale separa il materiale in essa contenuta dal circostante; (2) una superficie isolata, interamente contenuta all'interno di V e limitata dal contorno ∂S ; (3) una superficie di discontinuità, che interseca il contorno ∂V dell'RVE.

Un esempio del tipo (1) potrebbe essere un'inclusione all'interno di V per la quale gli spostamenti tangenziali risultano essere discontinui. Per quanto riguarda il tipo (2), invece, si può pensare ad un micro-crack per il quale anche la componente normale

dello spostamento è afflitta da discontinuità oltre a quella tangenziale. Fanno parte, infine, del tipo (3) tutti quei micro-cracks che intersecano il contorno ∂V dell'RVE.

Un crack all'interno della cella unitaria può essere visto come una cavità per la quale una dimensione risulta essere infinitesima rispetto alle altre. E' lecito, quindi, considerare una parte interna ed una esterna di tale cavità.

Per questo motivo il volume V viene ad essere suddiviso dalla somma delle superfici S in due parti, V^- e V^+ . Indicato con N il vettore normale ad ogni superficie, ritenuto positivo se diretto dall'interno verso l'esterno della superficie stessa, può scriversi:

$$\begin{cases} \partial V^- = S^- = S \\ \partial V^+ = \partial V + S^+ \end{cases} \quad (2.32)$$

Definito un campo generico T , è possibile indicare con ΔT la sua discontinuità attraverso la generica superficie S . Per cui, considerando i campi di spostamento, tensione e deformazione è possibile definire le rispettive discontinuità in un generico punto ξ di S nella seguente forma:

$$\begin{aligned} \Delta u(\xi) &= \lim_{x^+ \rightarrow \xi} u(x^+) - \lim_{x^- \rightarrow \xi} u(x^-) \\ \Delta \sigma(\xi) &= \lim_{x^+ \rightarrow \xi} \sigma(x^+) - \lim_{x^- \rightarrow \xi} \sigma(x^-) \\ \Delta \varepsilon(\xi) &= \lim_{x^+ \rightarrow \xi} \varepsilon(x^+) - \lim_{x^- \rightarrow \xi} \varepsilon(x^-) \end{aligned} \quad (2.33)$$

dove x^+ ed x^- rappresentano punti all'interno di V^+ e V^- rispettivamente. In generale, se le proprietà del materiale variano rapidamente attraverso la superficie S i salti nelle tensioni e nelle deformazioni hanno il compito di compensare tali forti differenze tra i materiali stessi. C'è da osservare, comunque, come anche in presenza di una discontinuità nella tensione $\Delta \sigma$ la discontinuità nelle trazioni deve tendere a zero per ragioni di equilibrio:

$$\Delta t(\xi) = \Delta \sigma(\xi) N \rightarrow 0 \quad (2.34)$$

D'altro canto, la discontinuità degli spostamenti non può essere nulla in presenza di debonding a livello delle interfacce. Tale salto può essere decomposto in una componente normale $\Delta \mathbf{u}_N$, o di *opening*, e in una tangenziale $\Delta \mathbf{u}_S$, o di *sliding*:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{u}_N &= (\mathbf{N} \cdot \Delta \mathbf{u}) \mathbf{N} \\ \Delta \mathbf{u}_S &= \Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}_N\end{aligned}\tag{2.35}$$

Occorre osservare come la componente normale del salto degli spostamenti deve risultare sempre positiva, al fine di evitare compenetrazioni all'interno del materiale.

Le tensioni medie possono essere rivalutate, tenendo in conto la suddivisione di V in V^+ e V^- :

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle &= \frac{1}{V} \left\{ \int_{V^+} \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{V^-} \boldsymbol{\sigma} dV \right\} = \\ &= \frac{1}{V} \left\{ \int_{\partial V^+} \mathbf{t} \otimes \mathbf{x}^+ dS + \int_{\partial V^-} \mathbf{t} \otimes \mathbf{x}^- dS \right\} = \\ &= \frac{1}{V} \left\{ \int_{\partial V} \mathbf{t} \otimes \mathbf{x} dS - \int_S \Delta \mathbf{t} \otimes \boldsymbol{\xi} dS \right\}\end{aligned}\tag{2.36}$$

Nello scrivere la (2.36) si sono tenute in conto le (2.32). Si può notare come l'integrale su S vada a zero nel momento in cui la discontinuità delle trazioni è nulla per garantire l'equilibrio. Analogamente a quanto fatto per le tensioni, può essere riscritta anche l'espressione relativa alle deformazioni medie:

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle &= \frac{1}{V} \left\{ \int_{V^+} \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_{V^-} \boldsymbol{\varepsilon} dV \right\} = \\ &= \frac{1}{V} \left\{ \int_{\partial V^+} \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) dS + \int_{\partial V^-} \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) dS \right\} = \\ &= \frac{1}{V} \left\{ \int_{\partial V} \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) dS - \int_S \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{u} \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes \Delta \mathbf{u}) dS \right\}\end{aligned}\tag{2.37}$$

Anche l'energia di deformazione media può essere riscritta tenendo, in conto gli effetti della discontinuità e ipotizzando, ancora, la continuità delle trazioni:

$$\begin{aligned}
 \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \rangle &= \frac{1}{V} \left\{ \int_{V^+} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_{V^-} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV \right\} = \\
 &= \frac{1}{V} \left\{ \int_{\partial V^+} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS + \int_{\partial V^-} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS \right\} = \\
 &= \frac{1}{V} \left\{ \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS - \int_S \mathbf{t} \cdot \Delta \mathbf{u} dS \right\}
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

2.5 Funzione potenziale per i macro-elementi

Come già visto, un RVE è l'elemento di volume rappresentativo della microstruttura di un macro-elemento all'interno di un corpo continuo. Tensioni e deformazioni risultano essere, in generale, funzioni della posizione del macro-elemento all'interno della massa continua. Indicato con \mathbf{X} il vettore posizione del macro-elemento è possibile, quindi, scrivere:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\Sigma} &= \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{X}, t) && \text{Macrotensioni} \\
 \mathbf{E} &= \mathbf{E}(\mathbf{X}, t) && \text{Macrodeformazioni}
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

dove t rappresenta il tempo. Nella (2.39) sono stati definiti i *macrocampi* di tensione e deformazione, validi all'interno del macro-elemento, che occorre distinguere dai *microcampi* $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ e $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$, detti rispettivamente *microtensioni* e *microdeformazioni*, validi all'interno dell'RVE.

I macrocampi devono soddisfare le equazioni di bilancio globali. In particolare, l'equazione del moto diventa:

$$\text{Div}(\boldsymbol{\Sigma}) + \mathbf{F} = \mathbf{R}\ddot{\mathbf{U}} \tag{2.40}$$

dove \mathbf{F} , \mathbf{R} ed $\mathbf{U}=\mathbf{U}(\mathbf{X})$ sono rispettivamente le forze di volume macroscopiche, la densità di massa e il macrocampo di spostamenti. Analogamente abbiamo le relazioni di congruenza a livello macroscopico:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left\{ \nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T \right\} \quad (2.41)$$

In generale, in un punto generico \mathbf{X} all'interno del continuo, e ad un fissato istante di tempo t , il valore delle macrotensioni e delle macrodeformazioni può essere valutato mediante i campi medi di tensione e deformazione, valutati a livello dell'RVE rappresentativo del macro-elemento corrispondente:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \mathbf{E} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{cases} \quad (2.42)$$

D'altra parte, i macrocampi $\boldsymbol{\Sigma}$ ed \mathbf{E} vengono utilizzati all'interno delle condizioni al contorno per l'RVE di *trazioni uniformi* e *spostamenti lineari*, rispettivamente.

Per cui, quando sul contorno della cella unitaria viene imposta la condizione di trazioni uniformi, questa assume la forma:

$$\mathbf{t}^0 = \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{n} \quad \text{su } \partial V \quad (2.43)$$

Mentre, la condizione di spostamenti lineari al contorno può esprimersi come:

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{E} \mathbf{x} \quad \text{su } \partial V \quad (2.44)$$

In generale, la risposta del macro-elemento, in termini di macrotensioni e macrodeformazioni, può essere inelastica e dipendente dalla storia deformativa, anche se i vari micro-costituenti dell'RVE risultano essere elastici. Come detto, questo accade poiché, durante il corso della deformazione, i micro-cracks, le cavità e gli altri tipi di difetto possono progredire all'interno dell'RVE, causando un'evoluzione continua della microstruttura.

Per questi motivi, quindi, risulta necessario che le macro-relazioni tensione-deformazione includano dei parametri aggiuntivi in grado di tenere in conto le variazioni subite dalla microstruttura.

A tal riguardo, per un qualsiasi macro-elemento si indichi con χ lo stato attuale della corrispondente microstruttura, dipendente da numerosi parametri che ne influenzano il comportamento. Ad esempio, in presenza di micro-cracks χ risulterebbe influenzata dalla loro dimensione, orientazione e distribuzione. Nell'ipotesi che la matrice sia costituita da un materiale con comportamento elastico, l'inelasticità è causata dalla crescita dei cracks. Per cui, se non si verificasse una crescita di tali micro-cracks, dalla quale dipende la variazione della microstruttura, la risposta del macro-elemento risulterebbe elastica.

Per il macro-elemento è possibile, quindi, definire la densità di energia di deformazione, o energia libera di Helmholtz:

$$\Phi = \Phi(\mathbf{E}, \Theta; \chi) \quad (2.45)$$

che, come detto, dipende, mediante χ , dalla configurazione attuale della microstruttura. Per una determinata χ , allora, è possibile scrivere:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{E}} \\ \mathbf{H} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} \end{cases} \quad (2.46)$$

dove con \mathbf{H} si è indicata la *macro-entropia*. Analogamente, è possibile introdurre una densità di energia complementare per il macro-elemento:

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\Sigma}, \Theta; \chi) \quad (2.47)$$

Da tale energia complementare è possibile risalire alle macrodeformazioni mediante derivazione:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \\ \mathbf{H} = \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \end{cases} \quad (2.48)$$

Definiti tali due *macro-potenziali*, è possibile legarli mediante la ben nota trasformazione di Legendre:

$$\Phi + \Psi = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{E} \quad (2.49)$$

L'obiettivo è quello di esprimere i macro-potenziali Φ e Ψ in funzione dei valori medi sul volume dei *micropotenziali* ϕ e ψ .

Avendo ipotizzato il materiale costituente l'RVE elastico, esso ammette l'esistenza dei due micropotenziali $\phi = \phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \theta)$ e $\psi = \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \theta)$. E' possibile definire, allora, i macropotenziali in funzione di quelli microscopici, imponendo sul contorno dell'RVE, singolarmente, la condizione sulle trazioni o sugli spostamenti.

2.5.1 Potenziale elastico

Supponendo assegnato un macrocampo di deformazione costante \mathbf{E} , i microcampi variabili di tensione e deformazione possono essere espressi in funzione di esso, fissata la temperatura θ :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}; \mathbf{E}) \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{E}) \end{cases} \quad (2.50)$$

dove la dipendenza da \mathbf{E} sintetizza la condizione al contorno sugli spostamenti, imposta proprio mediante le macrodeformazioni. Ricordando, poi, che tali macrodeformazioni coincidono con il valore medio sul volume dell'RVE delle microdeformazioni, è possibile rappresentare la densità di energia di deformazione microscopica nella seguente forma:

$$\phi = \phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}; \mathbf{E})) = \phi^E(\mathbf{x}; \mathbf{E}) \quad (2.51)$$

dove l'apice E mostra come tale micropotenziale dipenda dalle macrodeformazioni imposte. Supponiamo, ora, di imporre una variazione infinitesima $\delta \mathbf{E}$ della macrodeformazione, la quale produce una variazione all'interno del microcampo di deformazione:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}; \mathbf{E}) = \delta E_{ij} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial E_{ij}}(\mathbf{x}; \mathbf{E}) \quad (2.52)$$

Tale variazione infinitesima di deformazione produce, quindi, il seguente lavoro medio prodotto dalle microtensioni:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle &= \left\langle \left(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varepsilon}) \right) \cdot \left(\delta E_{ij} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial E_{ij}}(\mathbf{x}; \mathbf{E}) \right) \right\rangle = \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial \phi^E}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{x}; \mathbf{E}) \right) \cdot \delta \mathbf{E} \right\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{E}} \langle \phi^E \rangle \right) \cdot \delta \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Dalla (2.53) segue, allora, che il valore medio delle microtensioni assume l'aspetto:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{E}) \rangle = \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}} \langle \phi^E \rangle \quad (2.54)$$

Il macropotenziale elastico può essere, a questo punto, definito come media della densità di energia di deformazione microscopica:

$$\Phi^E = \Phi^E(\mathbf{E}) = \langle \phi^E \rangle = \frac{1}{V} \int_V \phi^E(\mathbf{x}; \mathbf{E}) dV \quad (2.55)$$

Mentre le corrispondenti macrotensioni presentano la seguente espressione:

$$\Sigma^E = \langle \sigma(\mathbf{x}; \mathbf{E}) \rangle = \frac{\partial \Phi^E}{\partial \mathbf{E}} \quad (2.56)$$

dove l'apice \mathbf{E} mostra come si stiano valutando le tensioni medie sull'RVE, associate ad una macrodeformazione costante. C'è da notare come la (2.55) dipende, come già osservato, dalla configurazione attuale della microstruttura χ . Una variazione di quest'ultima, causata, ad esempio, dalla crescita dei micro-cracks, conduce ad una variazione nel campo di deformazione locale, e quindi nella densità di energia di deformazione microscopica. Per questo motivo occorre tenere in conto la dipendenza dalla configurazione attuale:

$$\Phi^E = \Phi^E(\mathbf{E}, \Theta; \chi) \quad (2.57)$$

dove è stata tenuta in conto anche la dipendenza dalla macrotemperatura.

2.5.2 Potenziale elastico complementare

Supponendo assegnato un macrocampo di tensione costante Σ , al quale risulta legata la condizione di trazione uniforme sul contorno dell'RVE, i microcampi variabili di tensione e deformazione possono essere espressi in funzione di esso, fissata la temperatura θ e la configurazione della microstruttura χ :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}; \Sigma) \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \Sigma) \end{cases} \quad (2.58)$$

dove la dipendenza da Σ sintetizza la condizione al contorno sulle trazioni, imposta proprio mediante tale campo costante di macrotensioni. Ricordando, poi, che tali macrotensioni coincidono con il valore medio sul volume dell'RVE delle microtensioni, è possibile rappresentare la densità di energia complementare elastica microscopica nella seguente forma:

$$\psi = \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Sigma})) = \psi^\Sigma(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Sigma}) \quad (2.59)$$

Imponendo, ora, una variazione infinitesima arbitraria $\delta\boldsymbol{\Sigma}$ della macrotensione, è possibile osservare una variazione all'interno del microcampo di tensione:

$$\delta\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Sigma}) = \delta\Sigma_{ij} \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\Sigma_{ij}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Sigma}) \quad (2.60)$$

Tale variazione infinitesima di tensione produce, quindi, il seguente lavoro medio associato alle microdeformazioni:

$$\begin{aligned} \langle \delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \rangle &= \left\langle \left(\delta\Sigma_{ij} \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\Sigma_{ij}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Sigma}) \right) \cdot \left(\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\sigma}) \right) \right\rangle = \\ &= \left\langle \delta\boldsymbol{\Sigma} \cdot \left(\frac{\partial\psi^\Sigma}{\partial\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Sigma}) \right) \right\rangle = \delta\boldsymbol{\Sigma} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\Sigma}} \langle \psi^\Sigma \rangle \right) \end{aligned} \quad (2.61)$$

Dalla (2.61) segue, allora, che il valore medio delle microdeformazioni assume l'aspetto:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Sigma}) \rangle = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\Sigma}} \langle \psi^\Sigma \rangle \quad (2.62)$$

Il macropotenziale complementare elastico può essere, a questo punto, definito come media della densità di energia complementare elastica microscopica:

$$\Psi^\Sigma = \Psi^\Sigma(\boldsymbol{\Sigma}) = \langle \psi^\Sigma \rangle = \frac{1}{V} \int_V \psi^\Sigma(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Sigma}) dV \quad (2.63)$$

Mentre le corrispondenti macrodeformazioni presentano la seguente espressione:

$$\mathbf{E}^\Sigma = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Sigma}) \rangle = \frac{\partial \Psi^\Sigma}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \quad (2.64)$$

dove l'apice Σ mostra come si stiano valutando le deformazioni medie sull'RVE, associate ad una macrotensione costante. C'è da notare come la (2.63) dipende, come già osservato, dalla configurazione attuale della microstruttura χ . Per questo motivo occorre tenere in conto la dipendenza dalla configurazione attuale:

$$\Psi^\Sigma = \Psi^\Sigma(\boldsymbol{\Sigma}, \Theta; \chi) \quad (2.65)$$

dove è stata tenuta in conto anche la dipendenza dalla macrotemperatura.

2.5.3 Relazioni tra i macropotenziali

Si visto come il macropotenziale complementare possa essere definito come media sul volume dell'RVE del micropotenziale complementare $\psi^\Sigma(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Sigma})$, nel caso in cui siano assegnate le macrotensioni $\boldsymbol{\Sigma}$ sul contorno. Definiamo, a questo punto, un nuovo macropotenziale elastico nella forma seguente:

$$\Phi^\Sigma = \Phi^\Sigma(\mathbf{E}^\Sigma) = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{E}^\Sigma - \Psi^\Sigma(\boldsymbol{\Sigma}) \quad (2.66)$$

dipendente, quindi, dalle macrotensioni. A livello locale avremo poi:

$$\begin{cases} \phi^\Sigma = \phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Sigma})) = \phi^\Sigma(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Sigma}) \\ \psi^\Sigma = \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Sigma})) = \psi^\Sigma(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Sigma}) \end{cases} \quad (2.67)$$

Tali micropotenziali saranno poi legati mediante la ben nota trasformazione di Legendre, che in termini di valori medi diviene:

$$\langle \phi^{\Sigma} \rangle + \langle \psi^{\Sigma} \rangle = \Sigma \cdot \mathbf{E}^{\Sigma} \quad (2.68)$$

Dal confronto con la (2.66) emergono allora le seguenti tre identità:

$$\begin{cases} \Phi^{\Sigma} = \langle \phi^{\Sigma} \rangle \\ \mathbf{E}^{\Sigma} = \frac{\partial \Psi^{\Sigma}}{\partial \Sigma}(\Sigma) \\ \Sigma = \frac{\partial \Phi^{\Sigma}}{\partial \mathbf{E}^{\Sigma}}(\mathbf{E}^{\Sigma}) \end{cases} \quad (2.69)$$

Analogamente, nel momento in cui sul contorno dell'RVE viene imposta la condizione di spostamenti lineari, ottenuta tramite il macrocampo costante di deformazione \mathbf{E} , è possibile scrivere un'espressione alternativa per il macropotenziale complementare:

$$\Psi^E = \Psi^E(\Sigma^E) = \Sigma^E \cdot \mathbf{E} - \Phi^E(\mathbf{E}) \quad (2.70)$$

In questo caso i micropotenziali diventeranno:

$$\begin{cases} \phi^E = \phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}; \mathbf{E})) = \phi^E(\mathbf{x}; \mathbf{E}) \\ \psi^E = \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{E})) = \psi^E(\mathbf{x}; \mathbf{E}) \end{cases} \quad (2.71)$$

che saranno ancora legati dalla relazione seguente:

$$\langle \phi^E \rangle + \langle \psi^E \rangle = \Sigma^E \cdot \mathbf{E} \quad (2.72)$$

Confrontando la (2.72) con la (2.70) si ottengono le seguenti tre identità fondamentali:

$$\begin{cases} \Psi^E = \langle \psi^E \rangle \\ \mathbf{E} = \frac{\partial \Psi^E}{\partial \boldsymbol{\Sigma}^E}(\boldsymbol{\Sigma}^E) \\ \boldsymbol{\Sigma}^E = \frac{\partial \Phi^E}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) \end{cases} \quad (2.73)$$

2.5.4 Caratterizzazione dell'RVE

Si è già mostrato come l'imposizione di un campo costante macroscopico di tensione $\boldsymbol{\Sigma}$ sul contorno della cella unitaria equivale ad una condizione sulle trazioni del tipo:

$$\mathbf{t}^0 = \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{n} \quad \text{su } \partial V \quad (2.74)$$

la quale consente la valutazione dei microcampi di deformazione e tensione:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Sigma}) \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Sigma}) \end{cases} \quad (2.75)$$

Si è visto, poi, come la macrodeformazione associata possa essere valutata mediante la media della microdeformazione:

$$\mathbf{E}^\Sigma = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Sigma}) \rangle \quad (2.76)$$

Supponiamo, adesso, di imporre sul contorno dell'RVE una condizione sugli spostamenti, utilizzando la macrodeformazione valutata tramite la (2.76), nella forma:

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{E}^\Sigma \mathbf{x} \quad \text{su } \partial V \quad (2.77)$$

Tale condizione conduce, allora, ai microcampi $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}; \mathbf{E}^\Sigma)$ e $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{E}^\Sigma)$, che risultano essere, in generale, differenti da quelli valutati mediante le (2.75). L'eventuale uguaglianza tra i microcampi così valutati e quelli ottenuti mediante la (2.75) risulterebbe verificata solo nel caso in cui $\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{E}^\Sigma) \rangle = \boldsymbol{\Sigma}$, che non si verifica a priori, sotto la condizione (2.77).

L'RVE risulta essere *statisticamente rappresentativo* della risposta macroscopica dell'intorno infinitesimo del punto materiale, se e solo se una macrotensione costante ed arbitraria $\boldsymbol{\Sigma}$ produce, mediante l'imposizione della condizione (2.74), una macrodeformazione come quella rappresentata nella (2.76), la quale, a sua volta imposta sul contorno mediante la condizione (2.77), consente di ottenere la seguente macrotensione:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{E}^\Sigma) \rangle \approx \boldsymbol{\Sigma} \quad (2.78)$$

D'altro canto, imponendo sul contorno la condizione sulla linearità degli spostamenti mediante la macrodeformazione costante \mathbf{E} , le microtensioni e microdeformazioni corrispondenti saranno $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{E})$ e $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}; \mathbf{E})$, rispettivamente. In questo caso, l'RVE risulterà essere *statisticamente rappresentativo* se e solo se, imponendo a questo punto sul contorno le macrotensioni ottenute $\boldsymbol{\Sigma}^E = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{E}) \rangle$, il valore medio sul volume del microcampo di deformazione relativo risulta essere:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Sigma}^E) \rangle \approx \mathbf{E} \quad (2.79)$$

La definizione data di RVE conduce, a questo punto, alle seguenti considerazioni sul macropotenziale complementare $\Psi^\Sigma(\boldsymbol{\Sigma})$ e su quello elastico $\Phi^E(\mathbf{E})$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi^\Sigma(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \approx \mathbf{E} \\ \frac{\partial \Phi^E(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \approx \boldsymbol{\Sigma} \end{cases} \quad (2.80)$$

che consente di scrivere la seguente uguaglianza, in accordo con la ben nota trasformazione di Legendre:

$$\Psi^{\Sigma}(\Sigma) + \Phi^E(E) \approx \Sigma \cdot E \quad (2.81)$$

Data, tuttavia, la diversità tra i microcampi valutati in seguito all'applicazione della macrotensione Σ e quelli valutati mediante l'applicazione della macrodeformazione E , segue la seguente disuguaglianza:

$$\psi^{\Sigma}(x; \Sigma) + \phi^E(x; E) \neq \sigma(x; \Sigma) \cdot \varepsilon(x; E) \quad (2.82)$$

Osserviamo, ora, come nel momento in cui la microstruttura è fissata e il materiale costituente l'RVE è di tipo elastico lineare, anche la corrispondente risposta globale risulta essere linearmente elastica. Supponendo imposta, a questo punto, la condizione al contorno sugli spostamenti mediante la macrodeformazione E , la macrotensione risulta essere legata a quest'ultima mediante la ben nota relazione costitutiva:

$$\Sigma^E = \langle \sigma(x; E) \rangle = \bar{C}E \quad (2.83)$$

dove \bar{C} rappresenta il tensore di elasticità omogeneizzato per il materiale circostante la cella unitaria. Analogamente, imponendo la condizione sulle trazioni, mediante il tensore costante Σ , è possibile legare le macrodeformazioni ad esso tramite la seguente relazione:

$$E^{\Sigma} = \langle \varepsilon(x; \Sigma) \rangle = \bar{D}\Sigma \quad (2.84)$$

dove \bar{D} rappresenta il tensore di cedevolezza omogeneizzato. Nel momento in cui l'RVE risulta essere statisticamente rappresentativo, la tecnica di omogeneizzazione risulta essere *consistente* ed i due tensori globali sono legati mediante:

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{D}}^{-1} \quad (2.85)$$

Nel momento in cui, invece, il materiale consistente l'RVE risulta essere elastico non-lineare, nonostante una microstruttura fissata, la risposta globale del materiale risulta essere anch'essa non-lineare. In questo caso, se l'RVE è statisticamente rappresentativo dell'intorno del punto materiale, allora valgono le relazioni (2.80).

2.5.5 Relazioni generali tra i macropotenziali

Il potenziale elastico $\phi = \phi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varepsilon})$ risulta essere una funzione convessa rispetto all'argomento $\boldsymbol{\varepsilon}$, se per ogni coppia di deformazioni ammissibili e tra loro differenti $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$ vale:

$$\phi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}) - \phi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}) > (\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}) \quad (2.86)$$

Considerando, allora, un unico RVE caratterizzato da un materiale di tipo elastico convesso, esaminiamo, adesso, due differenti condizioni al contorno: (1) *trazioni uniformi* $\mathbf{t} = \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{n}$ assegnate sul contorno ∂V di V ; (2) una condizione consistente *mista* sugli spostamenti e sulle trazioni assegnate. Indichiamo con $\boldsymbol{\varepsilon}^Z = \boldsymbol{\varepsilon}^Z(\mathbf{x})$ e $\boldsymbol{\sigma}^Z = \boldsymbol{\sigma}^Z(\mathbf{x})$ rispettivamente il campo di deformazione e quello di tensione per la prima condizione al contorno, mentre con $\boldsymbol{\varepsilon}^G = \boldsymbol{\varepsilon}^G(\mathbf{x})$ e $\boldsymbol{\sigma}^G = \boldsymbol{\sigma}^G(\mathbf{x})$ saranno indicati quelli relativi alla seconda. I corrispondenti macrocampi verranno ottenuti come valori medi dei microcampi associati, assumendo la forma:

$$\begin{cases} \mathbf{E}^Z = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^Z \rangle \\ \boldsymbol{\Sigma}^Z = \langle \boldsymbol{\sigma}^Z \rangle = \boldsymbol{\Sigma} \end{cases} \quad (2.87)$$

per la condizione sulle trazioni, mentre per quella di tipo generale diventano:

$$\begin{cases} \mathbf{E}^G = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^G \rangle \\ \boldsymbol{\Sigma}^G = \langle \boldsymbol{\sigma}^G \rangle \end{cases} \quad (2.88)$$

Supponiamo, ora, che alle due condizioni al contorno corrispondano le medesime macrodeformazioni $\mathbf{E}^\Sigma = \mathbf{E}^G$. Sotto questa ipotesi, si può osservare come il macropotenziale elastico $\Phi^\Sigma(\mathbf{E}^\Sigma)$, associato alla condizione di trazioni uniformi al contorno, risulti essere sempre inferiore a $\Phi^G(\mathbf{E}^G)$, associato alla condizione generale (possibilmente mista), quando i costituenti l'RVE sono di tipo elastico convesso (*Teorema 1*). E' possibile dimostrare questa cosa osservando come:

$$\begin{aligned} \Phi^G(\mathbf{E}^G) - \Phi^\Sigma(\mathbf{E}^\Sigma) &= \langle \phi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varepsilon}^G) - \phi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varepsilon}^\Sigma) \rangle > \left\langle (\boldsymbol{\varepsilon}^G - \boldsymbol{\varepsilon}^\Sigma) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varepsilon}^\Sigma) \right\rangle = \\ &= \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}^G \right\rangle - \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}^\Sigma \right\rangle \cdot \left\langle \boldsymbol{\sigma}^\Sigma \right\rangle = (\mathbf{E}^G - \mathbf{E}^\Sigma) \cdot \boldsymbol{\Sigma} \end{aligned} \quad (2.89)$$

la quale è stata ottenuta ipotizzando il potenziale elastico come funzione convessa. Dovendo, a questo punto, essere uguali tra di loro le due macrodeformazioni, per ipotesi, si osserva come il membro di destra vada a zero, garantendo la seguente disuguaglianza [Willis, 1989]:

$$\Phi^G(\mathbf{E}^G) > \Phi^\Sigma(\mathbf{E}^\Sigma) \quad (2.90)$$

Chiaramente, tale risultato resta valido anche per il caso in cui i costituenti l'RVE sono di tipo elastico lineare. Utilizzando come seconda condizione al contorno quella di spostamenti lineari $\mathbf{u} = \mathbf{E}\mathbf{x}$, si osserva, inoltre, come il macropotenziale elastico associato a tale condizione non può mai essere inferiore a quello ottenuto sotto la condizione al contorno di trazioni uniformi, nell'ipotesi che valga $\mathbf{E} = \mathbf{E}^\Sigma$:

$$\Phi^E(\mathbf{E}) \geq \Phi^\Sigma(\mathbf{E}) \quad (2.91)$$

A tal riguardo, un RVE può essere considerato statisticamente rappresentativo se, ipotizzando l'uguaglianza tra le macrodeformazioni, la differenza tra i macropotenziali elastici, associati rispettivamente alle condizioni al contorno di trazioni uniformi e di spostamenti lineari, risulta essere contenuta entro una determinata tolleranza. Può, dunque, affermarsi che il potenziale Φ^{Σ} tende ad eguagliare Φ^E dal basso.

Consideriamo ora, sempre per il medesimo RVE, una terza condizione al contorno che vada ad aggiungersi alla (1) e alla (2): (3) *spostamenti lineari* su ∂V imposti mediante una macrodeformazione uniforme \mathbf{E} . I valori medi dei microcampi associati alla condizione sugli spostamenti saranno:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^E \rangle \\ \boldsymbol{\Sigma}^E = \langle \boldsymbol{\sigma}^E \rangle \end{cases} \quad (2.92)$$

Si assume, come nel caso precedente, che la macrotensione associata alla condizione (3) eguagli quella associata alla condizione di tipo generale, $\boldsymbol{\Sigma}^E = \boldsymbol{\Sigma}^G$. Sotto questa ipotesi, si può osservare come il macropotenziale elastico complementare $\Psi^E(\boldsymbol{\Sigma}^E)$, associato alla condizione di spostamenti lineari sul contorno, risulta essere sempre inferiore a $\Psi^G(\boldsymbol{\Sigma}^G)$, associato alla condizione generale (possibilmente mista), quando i costituenti l'RVE sono di tipo elastico convesso (*Teorema 2*). E' possibile dimostrare questa cosa osservando come:

$$\begin{aligned} \Psi^G(\boldsymbol{\Sigma}^G) - \Psi^E(\boldsymbol{\Sigma}^E) &= \langle \psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\sigma}^G) - \psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\sigma}^E) \rangle > \left\langle (\boldsymbol{\sigma}^G - \boldsymbol{\sigma}^E) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\sigma}^E) \right\rangle = \\ &= \left\langle \boldsymbol{\sigma}^G \right\rangle - \left\langle \boldsymbol{\sigma}^E \right\rangle \cdot \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}^E \right\rangle = (\boldsymbol{\Sigma}^G - \boldsymbol{\Sigma}^E) \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.93)$$

la quale è stata ottenuta ipotizzando, anche in questo caso, il potenziale elastico complementare come funzione convessa. Dovendo, a questo punto, essere uguali tra di loro le due macrotensioni, per ipotesi, si osserva come il membro di destra vada a zero, garantendo la seguente disuguaglianza [Willis, 1989]:

$$\Psi^G(\boldsymbol{\Sigma}^G) > \Psi^E(\boldsymbol{\Sigma}^E) \quad (2.94)$$

In particolare, si osserva come il macropotenziale elastico complementare associato alla condizione al contorno sulle trazioni risulta essere sempre maggiore di quello associato alla condizione di spostamenti lineari su ∂V , quando entrambe le condizioni producono le medesime macrotensioni:

$$\Psi^E(\boldsymbol{\Sigma}) \leq \Psi^\Sigma(\boldsymbol{\Sigma}) \quad (2.95)$$

Anche in questo caso, un RVE può essere definito statisticamente rappresentativo nel momento in cui la differenza tra i due macropotenziali Ψ^E e Ψ^Σ risulta inferiore ad una determinata tolleranza. Può, dunque, affermarsi che il potenziale Ψ^E tende ad eguagliare Ψ^Σ dal basso.

Come mostrato i due teoremi possono essere interpretati come principi di minimo per i macropotenziali. In particolare, il *Teorema 1* afferma che per un RVE elastico, per il quale ciascuna condizione al contorno garantisce l'uguaglianza tra le macrodeformazioni, la condizione di *trazioni uniformi* rende il macropotenziale elastico Φ un minimo assoluto. Il *Teorema 2*, invece, assicura che per il medesimo RVE, per il quale ciascuna condizione al contorno assicura l'uguaglianza tra le macrotensioni, la condizione di *spostamenti lineari* rende il macropotenziale elastico complementare Ψ un minimo assoluto. Considerando, adesso, un RVE di tipo elastico lineare è possibile scrivere:

$$\begin{cases} \Phi^G(\mathbf{E}^G) = \frac{1}{2} \mathbf{E}^G \cdot \bar{\mathbf{C}}^G \mathbf{E}^G \\ \Psi^G(\boldsymbol{\Sigma}^G) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}^G \cdot \bar{\mathbf{D}}^G \boldsymbol{\Sigma}^G \end{cases} \quad (2.96)$$

che rappresentano i macropotenziali associati alla condizione di tipo generale, la quale produce la macrodeformazione \mathbf{E}^G e la macrotensione $\boldsymbol{\Sigma}^G$, che a loro volta soddisfano la relazione seguente:

$$\frac{1}{V} \int_{\partial V} \{ \mathbf{u}^G - \mathbf{E}^G \mathbf{x} \} \cdot \{ (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Sigma}^G) \mathbf{n} \} dS = 0 \quad (2.97)$$

che garantisce, quindi, l'uguaglianza tra la media dell'energia di deformazione ed il prodotto tra le medie di tensione e deformazione, secondo la ben nota relazione di Hill:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^G \cdot \boldsymbol{\sigma}^G \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^G \rangle \cdot \langle \boldsymbol{\sigma}^G \rangle = \mathbf{E}^G \cdot \boldsymbol{\Sigma}^G \quad (2.98)$$

Occorre osservare come la (2.97) possa essere soddisfatta da entrambe le condizioni al contorno (1) e (3) sulle trazioni e sugli spostamenti, rispettivamente. Definiti, quindi, $\bar{\mathbf{C}}^\Sigma$ e $\bar{\mathbf{D}}^E$, relativi alle condizioni sulle trazioni e sugli spostamenti, rispettivamente, è possibile definire i seguenti macropotenziali elastico e complementare:

$$\begin{cases} \Phi^\Sigma(\mathbf{E}^\Sigma) = \frac{1}{2} \mathbf{E}^\Sigma \cdot \bar{\mathbf{C}}^\Sigma \mathbf{E}^\Sigma \\ \Psi^E(\boldsymbol{\Sigma}^E) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}^E \cdot \bar{\mathbf{D}}^E \boldsymbol{\Sigma}^E \end{cases} \quad (2.99)$$

Essendo $\bar{\mathbf{C}}^\Sigma$ e $\bar{\mathbf{D}}^E$ associati a condizioni al contorno differenti, ovviamente l'uno non sarà l'inverso dell'altro. Per ciascuna condizione su ∂V gli inversi del tensore di elasticità e di deformabilità saranno, invece:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{D}}^\Sigma = (\bar{\mathbf{C}}^\Sigma)^{-1} \\ \bar{\mathbf{C}}^E = (\bar{\mathbf{D}}^E)^{-1} \end{cases} \quad (2.100)$$

In accordo con i teoremi 1 e 2, e per un qualsiasi valore della macrodeformazione \mathbf{E} e della macrotensione $\boldsymbol{\Sigma}$, è possibile scrivere le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{E} \cdot (\bar{\mathbf{C}}^G - \bar{\mathbf{C}}^\Sigma) \mathbf{E} \geq 0 \\ \boldsymbol{\Sigma} \cdot (\bar{\mathbf{D}}^G - \bar{\mathbf{D}}^E) \boldsymbol{\Sigma} \geq 0 \end{cases} \quad (2.101)$$

Le (2.101) mostrano come la condizione di spostamenti lineari e quella di trazioni uniformi possono essere utilizzate per ottenere gli estremi superiore ed inferiore (*upper and lower bound*) per i moduli elastici associati a ciascuna condizione al contorno.

In particolare, nel caso in cui il comportamento macroscopico dell'RVE sia di tipo isotropo, è possibile dimostrare come i macropotenziali siano in grado di soddisfare le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{C}}^\Sigma \mathbf{E} \leq \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{C}}^G \mathbf{E} \leq \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{C}}^E \mathbf{E} \\ \boldsymbol{\Sigma} \cdot \bar{\mathbf{D}}^\Sigma \boldsymbol{\Sigma} \geq \boldsymbol{\Sigma} \cdot \bar{\mathbf{D}}^G \boldsymbol{\Sigma} \geq \boldsymbol{\Sigma} \cdot \bar{\mathbf{D}}^E \boldsymbol{\Sigma} \end{cases} \quad (2.102)$$

Nelle applicazioni numeriche, ad esempio, si osserverà nel successivo capitolo 3 come tali disuguaglianze fondamentali siano soddisfatte considerando come condizione di tipo generale, quella di *fluttuazioni periodiche e trazioni antiperiodiche* sul contorno.

2.5.6 Valori estremi per i macropotenziali

A causa delle forti eterogeneità che possono essere presenti all'interno di un RVE risulta estremamente difficile valutare i valori esatti del macropotenziale elastico Φ e di quello complementare Ψ , mentre possono essere ottenuti gli estremi superiore ed inferiore di tali funzioni mediante l'utilizzo dei principi variazionali. Supponiamo di voler calcolare, ad esempio, un valore estremo per il macropotenziale elastico Φ^E associato alla condizione al contorno $\mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon}^0$. Per un campo di spostamenti che soddisfa la condizione di linearità su ∂V è possibile definire un funzionale I^E :

$$I^E(\mathbf{u}; \boldsymbol{\varepsilon}^0) = \langle \phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varepsilon}^0)) \rangle \quad (2.103)$$

Osservando che $\delta\phi = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon}$, è possibile definire la variazione prima del funzionale I^E nella forma seguente:

$$\delta I^E = \langle \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}) \cdot \delta\mathbf{u} \, dS - \langle \{Div(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}))\} \cdot \delta\mathbf{u} \rangle \quad (2.104)$$

Tendendo a zero l'integrale di superficie quando gli spostamenti sono assegnati sul contorno, la soluzione che assicura $\delta I^E = 0$, detta \mathbf{u}^{ex} , restituisce un campo di tensione $\boldsymbol{\sigma}^{ex} = \partial\phi / \partial\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}^{ex})$ in grado di soddisfare le equazioni indefinite di equilibrio in assenza di forze di volume. In questa situazione, \mathbf{u}^{ex} coincide con il reale campo di spostamenti prodotto dalla macrodeformazione $\mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon}^0$, mentre il corrispondente macropotenziale elastico sarà:

$$I^E(\mathbf{u}^{ex}; \boldsymbol{\varepsilon}^0) = \Phi^E(\boldsymbol{\varepsilon}^0) \quad (2.105)$$

Se il micropotenziale elastico è una funzione definita positiva per la quale vale $\delta^2\phi > 0$, tra tutti i campi di spostamento cinematicamente ammissibili, il campo di spostamento esatto rende il funzionale I^E un minimo assoluto. Per tanto, per ciascun campo di spostamenti cinematicamente ammissibile \mathbf{u} vale la seguente disuguaglianza:

$$I^E(\mathbf{u}^{ex}; \boldsymbol{\varepsilon}^0) \leq I^E(\mathbf{u}; \boldsymbol{\varepsilon}^0) \quad (2.106)$$

Essendo il campo di spostamenti lineari $\mathbf{u}(x) = \boldsymbol{\varepsilon}^0 \mathbf{x}$ in V cinematicamente ammissibile la (2.106) può essere riscritta nella forma:

$$I^E(\mathbf{u}^{ex}; \boldsymbol{\varepsilon}^0) < I^E(\boldsymbol{\varepsilon}^0 \mathbf{x}; \boldsymbol{\varepsilon}^0) = \langle \phi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varepsilon}^0) \rangle \quad (2.107)$$

dove $\phi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varepsilon}^0)$ rappresenta il micropotenziale elastico in \mathbf{x} , valutato per la deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}^0$. Dalla (2.105) e dalla (2.107) è possibile ottenere un limite superiore per il macropotenziale elastico:

$$\Phi^E(\boldsymbol{\varepsilon}^\theta) < \langle \phi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varepsilon}^\theta) \rangle \quad (2.108)$$

Supponiamo, ora, di voler calcolare un valore estremo per il macropotenziale elastico complementare Ψ^Σ , quando sul contorno è applicata una macro tensione $\Sigma = \boldsymbol{\sigma}^\theta$.

Per un campo di tensione simmetrico che soddisfa l'equazione d'equilibrio $Div(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ in V e la condizione di trazioni uniformi sul contorno $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^\theta\mathbf{n}$ è possibile definire un funzionale I^Σ :

$$I^\Sigma(\boldsymbol{\sigma}; \boldsymbol{\sigma}^\theta) = \langle \psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\sigma})) + \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) \cdot (Div(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}))) \rangle \quad (2.109)$$

dove $\boldsymbol{\mu}$ rappresenta un moltiplicatore di Lagrange, il quale in forma debole assicura il soddisfacimento delle equazioni indefinite di equilibrio, e di conseguenza che $\boldsymbol{\sigma}$ rappresenti un campo di tensione staticamente ammissibile. Essendo $\delta\psi = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}$, la variazione prima del funzionale I^Σ vale:

$$\begin{aligned} \delta I^\Sigma &= \langle \{ \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta\boldsymbol{\sigma} + \delta(\boldsymbol{\mu} \cdot Div(\boldsymbol{\sigma})) \} \rangle = \\ &= \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\mu} \cdot (\delta\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}) dS + \langle (\boldsymbol{\varepsilon} - sym(\nabla\boldsymbol{\mu})) \cdot \delta\boldsymbol{\sigma} + \delta\boldsymbol{\mu} \cdot (Div(\boldsymbol{\sigma})) \rangle \end{aligned} \quad (2.110)$$

Tendendo a zero l'integrale di superficie, data la condizione al contorno sulle trazioni, la soluzione che assicura $\delta I^\Sigma = 0$, indicata con $\boldsymbol{\sigma}^{ex}$, produce un campo di deformazione compatibile, $\boldsymbol{\varepsilon}^{ex} = \partial\psi / \partial\boldsymbol{\sigma}^{ex}$. Per tale campo di tensione, prodotto dalla macro tensione uniforme $\Sigma = \boldsymbol{\sigma}^\theta$, il macropotenziale elastico complementare assume la forma:

$$I^\Sigma(\boldsymbol{\sigma}^{ex}; \boldsymbol{\sigma}^\theta) = \Psi^\Sigma(\boldsymbol{\sigma}^\theta) \quad (2.111)$$

Se il micropotenziale elastico complementare è una funzione definita positiva, per ogni campo di tensione staticamente ammissibile $\boldsymbol{\sigma}(x)$:

$$I^{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}^{ex}; \boldsymbol{\sigma}^{\theta}) \leq I^{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}; \boldsymbol{\sigma}^{\theta}) \quad (2.112)$$

Il campo di tensione uniforme $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^{\theta}$ definito all'interno di V soddisfa le equazioni indefinite di equilibrio nonché le assegnate condizioni di trazioni uniformi al contorno. Per cui dalla (2.112) è possibile ottenere:

$$I^{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}^{ex}; \boldsymbol{\sigma}^{\theta}) < I^{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}^{\theta}; \boldsymbol{\sigma}^{\theta}) = \langle \psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\sigma}^{\theta}) \rangle \quad (2.113)$$

dove $\psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\sigma}^{\theta})$ rappresenta il micropotenziale elastico complementare in \mathbf{x} per l'assegnata macrotensione uniforme $\boldsymbol{\sigma}^{\theta}$. L'estremo superiore per il macropotenziale elastico complementare è dato in questo caso da:

$$\Psi^{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}^{\theta}) < \langle \psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\sigma}^{\theta}) \rangle \quad (2.114)$$

I risultati precedenti sono dirette conseguenze dei principi variazionali. Essi mostrano come il campo di deformazione uniforme $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\theta} (= \mathbf{E})$ restituisce un estremo superiore (*upper bound*) per il macropotenziale elastico $\Phi^E(\mathbf{E})$, mentre al campo di tensione uniforme $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\theta} (= \boldsymbol{\Sigma})$ è associato un estremo superiore per il macropotenziale elastico complementare $\Psi^{\Sigma}(\boldsymbol{\Sigma})$. In elasticità lineare i macropotenziali elastico ed elastico complementare corrispondono, rispettivamente, all'energia di deformazione media e all'energia di deformazione complementare media. Le costanti elastiche medie possono essere definite mediante tali potenziali. Pertanto, può essere ottenuto un estremo superiore (*upper bound*) per i moduli omogeneizzati mediante l'imposizione di un campo uniforme di deformazione, mentre sarà ottenuto un estremo inferiore (*lower bound*), imponendo un campo di tensione uniforme. La stima dei moduli omogeneizzati, utilizzando la condizione di deformazioni uniformi e di trazioni uniformi, è dovuta a Voigt (1889) e Reuss (1929), rispettivamente.

2.6 Solidi elastici con difetti a tensione nulla

Viene, adesso, considerato un RVE costituito da un materiale elastico lineare, contenente una serie di difetti a tensione nulla, quali, ad esempio, della microcavità. L'obiettivo è quello di definire i legami costitutivi macroscopici per questo genere di microstruttura, mostrando come la continua evoluzione di quest'ultima, causata dalla crescita e dallo sviluppo di tali difetti, influenza in maniera notevole le proprietà globali del materiale.

L'RVE in analisi è caratterizzato dall'aver un volume totale V , limitato dalla superficie esterna ∂V . Su tale contorno esterno, come detto, è possibile applicare, separatamente, le due condizioni $\mathbf{t}^0 = \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{n}$ o di *trazioni uniformi*, oppure $\mathbf{u}^0 = \boldsymbol{\varepsilon}^0 \mathbf{x}$ o di *spostamenti lineari*. In tali relazioni $\boldsymbol{\sigma}^0$ ed $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ sono i due tensori costanti del secondo ordine, rappresentativi, rispettivamente, della macrotensione e della macrodeformazione. Come detto, le due condizioni possono essere applicate entrambe, ma comunque separatamente, nel senso che la condizione sulle trazioni, imposta mediante l'applicazione di una macrotensione costante, conduce ad un campo di spostamenti in generale non lineare sulla superficie ∂V , mentre l'applicazione di una macrodeformazione costante restituisce una trazione sul contorno non uniforme.

Ipotizzando che l'RVE sia costituito interamente da materiale elastico lineare ed omogeneo, la presenza di non-omogeneità è dovuta, sostanzialmente, alla dislocazione di cavità al suo interno. Indicata la cavità generica con Ω_α ($\alpha=1,2,\dots,p$), tale che il suo contorno sia la superficie $\partial\Omega_\alpha$, assumiamo che p sia il numero complessivo di cavità contenuto nel volume V . L'unione di tali cavità si indichi con Ω , in modo tale da avere:

$$\begin{cases} \Omega = \bigcup_{\alpha=1}^p \Omega_\alpha \\ \partial\Omega = \bigcup_{\alpha=1}^p \partial\Omega_\alpha \end{cases} \quad (2.115)$$

Il volume rimanente all'interno dell'RVE sarà rappresentato dalla matrice M . Avremo allora, come mostrato dalla Fig.2.4:

$$\begin{cases} M = V - \Omega \\ \partial M = \partial V + \partial \Omega \end{cases} \quad (2.116)$$

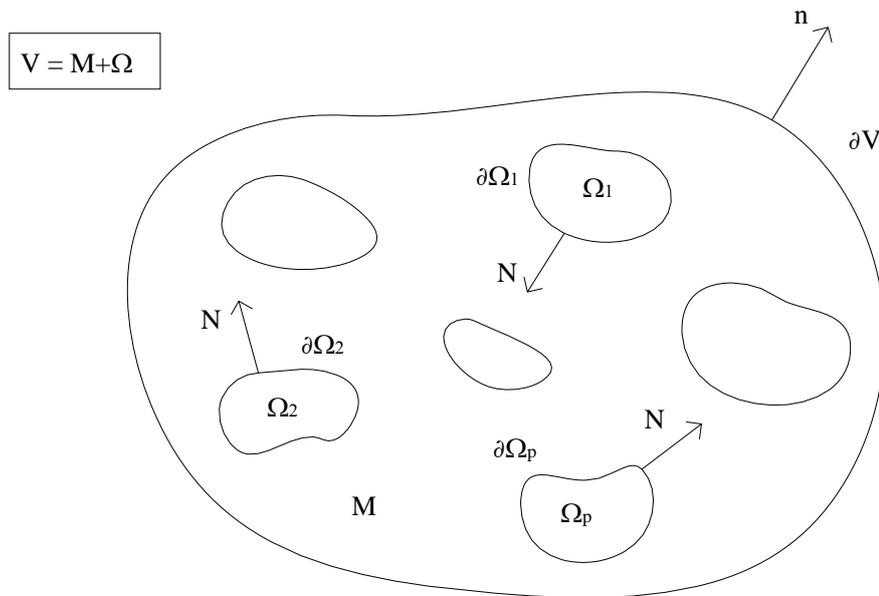


Figura 2.4. Microcavità all'interno della matrice.

Supponiamo, per semplicità, che tutte le cavità siano contenute all'interno dell'RVE, in modo tale che ciascuna di esse risulti essere circondata dalla matrice. Per ciascuna cavità, poi, occorre distinguere due facce distinte del proprio contorno $\partial \Omega_\alpha$: (1) la faccia esterna della cavità $\partial \Omega_\alpha^C$, orientata verso la matrice e caratterizzata dal vettore normale N orientato dall'interno verso la matrice stessa; (2) la faccia esterna della matrice circostante $\partial \Omega_\alpha^M$, rivolta verso l'interno della cavità e caratterizzata dal vettore normale $-N$. Risulta quindi che $\partial \Omega_\alpha$ coincide con $\partial \Omega_\alpha^C$ per la cavità, mentre ∂M , a livello della cavità, coincide con $\partial \Omega_\alpha^M$, come mostrato dalla seguente Fig.2.5:

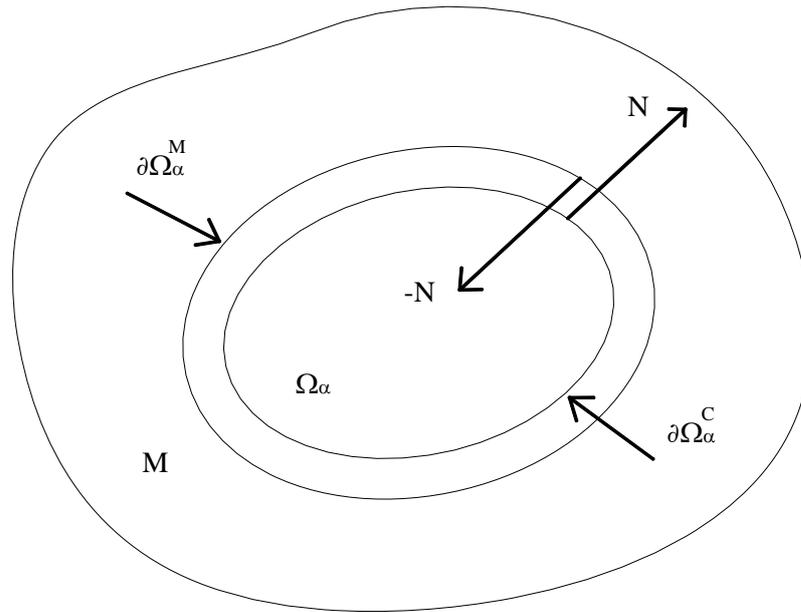


Figura 2.5. Faccia esterna della cavità e faccia esterna della matrice.

Assunta tale convenzione, l'integrale di superficie di una generica quantità su ∂M può essere scritto nella forma seguente:

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} (\cdot) dS &= \int_{\partial V} (\cdot) dS + \sum_{\alpha=1}^p \int_{\partial\Omega_\alpha^M} (\cdot) dS = \int_{\partial V} (\cdot) dS - \sum_{\alpha=1}^p \int_{\partial\Omega_\alpha^C} (\cdot) dS = \\ &= \int_{\partial V} (\cdot) dS - \int_{\partial\Omega} (\cdot) dS \end{aligned} \quad (2.117)$$

dove con $\partial\Omega$ si è indicata l'unione delle $\partial\Omega_\alpha^C$ ($\alpha=1,2,\dots,p$). Supponiamo, poi, che il materiale costituente la matrice sia elastico lineare ed omogeneo, caratterizzato dal tensore di elasticità \mathbf{C} e dal tensore di cedevolezza \mathbf{D} .

2.6.1 Deformazioni medie per macrotensioni assegnate

Supponiamo, che sul contorno ∂V dell'RVE sia assegnata la condizione di trazioni uniformi $\mathbf{t}^0 = \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{n}$. Nell'ipotesi di materiale costituente la cella unitaria omogeneo ed in assenza di cavità, le corrispondenti deformazioni medie, associate con il tensore

costante di macrotensione $\boldsymbol{\sigma}^0$, risultano definite mediante il legame costitutivo elastico lineare:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}^0 \quad (2.118)$$

In presenza di cavità, invece, i campi uniformi di tensione e deformazioni subiscono un disturbo, divenendo funzioni puntuali all'interno dell'RVE.

Avremo, pertanto, i campi variabili $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ e $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ in M , con la condizione $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ in Ω . I valori medi di tali campi saranno, invece, per la tensione:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{M} \int_M \boldsymbol{\sigma} dV = \boldsymbol{\sigma}^0 \quad (2.119)$$

Mentre, per la deformazione:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^C \quad (2.120)$$

dove il primo termine è quello valutato tramite la (2.118), che rappresenta la deformazione media in assenza di cavità, mentre $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^C$ rappresenta l'incremento di deformazione associato alla presenza delle cavità stesse.

Al fine di valutare tale incremento deformativo, è possibile applicare il teorema di Betti. Questo afferma che, nel caso di materiale elastico lineare, dati due set di carichi superficiali $\boldsymbol{t}^{(1)}$ e $\boldsymbol{t}^{(2)}$, il lavoro prodotto dal primo per gli spostamenti associati al secondo $\boldsymbol{u}^{(2)}$ eguaglia il lavoro prodotto dal secondo per gli spostamenti associati al primo $\boldsymbol{u}^{(1)}$:

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{t}^{(1)} \cdot \boldsymbol{u}^{(2)} dS = \int_{\partial V} \boldsymbol{t}^{(2)} \cdot \boldsymbol{u}^{(1)} dS \quad (2.121)$$

Nel nostro caso il primo dei due set di carichi sarà:

$$\mathbf{t}^{(1)} = \begin{cases} \delta\boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{n} & \text{su } \partial V \\ -\delta\boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{N} & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.122)$$

che corrisponde alle tensioni uniformi virtuali $\delta\boldsymbol{\sigma}^0$ e alle deformazioni associate $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbf{D}\delta\boldsymbol{\sigma}^0$ all'interno dell'intero RVE. Mentre il secondo:

$$\mathbf{t}^{(2)} = \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{n} & \text{su } \partial V \\ \boldsymbol{\theta} & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.123)$$

rappresentato, quindi, dalla distribuzione reale delle trazioni sull'RVE stesso. Associati con il primo avremo, allora, i seguenti campi di spostamento, deformazione e tensione:

$$\{\mathbf{u}^{(1)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}, \boldsymbol{\sigma}^{(1)}\} = \{(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^0 \mathbf{x}), \delta\boldsymbol{\varepsilon}^0, \delta\boldsymbol{\sigma}^0\} \quad (2.124)$$

Per il secondo, invece, avremo i campi reali di spostamento, deformazione e tensione:

$$\{\mathbf{u}^{(2)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}, \boldsymbol{\sigma}^{(2)}\} = \{\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}\} \quad (2.125)$$

E' possibile, a questo punto, applicare il teorema di Betti nella forma espressa dalla (2.121):

$$\int_{\partial V} (\boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{n}) \cdot (\delta\boldsymbol{\varepsilon}^0 \mathbf{x}) dS = \int_{\partial V} (\delta\boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} dS - \int_{\partial\Omega} (\delta\boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{N}) \cdot \mathbf{u} dS \quad (2.126)$$

L'espressione (2.126) può, a questo punto, essere manipolata, introducendo le relazioni di legame nel membro di sinistra, e portando fuori dall'integrale il fattore comune costante $\delta\boldsymbol{\sigma}^0$:

$$\delta\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \left\{ \int_{\partial V} \mathbf{D} \{ (\mathbf{x} \otimes \mathbf{n}) \boldsymbol{\sigma}^0 \} dS - \int_{\partial V} \mathbf{n} \otimes \mathbf{u} dS + \int_{\partial\Omega} \mathbf{N} \otimes \mathbf{u} dS \right\} = 0 \quad (2.127)$$

Essendo, tuttavia, $\delta\boldsymbol{\sigma}^0$ un tensore simmetrico del tutto arbitrario, la (2.127) è verificata solo se il termine tra parentesi risulta essere identicamente nullo. A tal riguardo si osservi come il primo termine coincide con il valore medio del campo di deformazione in assenza di cavità :

$$\frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{D} \{ (\mathbf{x} \otimes \mathbf{n}) \boldsymbol{\sigma}^0 \} dS = \mathbf{D} \{ \mathbf{I}^{(2s)} \boldsymbol{\sigma}^0 \} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 \quad (2.128)$$

Per cui, ricordando l'espressione della deformazione media sull'RVE, ottenuta mediante i classici metodi della media:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \frac{1}{2} \{ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \} dV = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} \{ \mathbf{u} \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{u} \} dS \quad (2.129)$$

Dal confronto con la (2.120) emerge, quindi, come l'incremento di deformazione associato alla presenza delle cavità è dato dal termine:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^c = \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} \{ \mathbf{u} \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{u} \} dS \quad (2.130)$$

2.6.2 Tensore di deformabilità omogeneizzato per solidi elastici porosi

L'obiettivo è quello di definire il tensore di deformabilità omogeneizzato per un RVE poroso, la cui matrice è caratterizzata da un materiale di tipo elastico lineare, nella forma:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\mathbf{D}}\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{D}}\boldsymbol{\sigma}^0 \quad (2.131)$$

dove $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0$ rappresenta la macrotensione applicata al contorno, mentre la deformazione media è data dall'espressione (2.120). Al fine di ottenere in forma esplicita il tensore di cedevolezza, conviene esprimere l'incremento di deformazione associato alla presenza delle cavità $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^c$ in funzione della macrotensione applicata. Essendo il materiale costituente la matrice dell'RVE elastico lineare, il campo di spostamenti $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x})$ in un generico punto x del contorno delle cavità $\partial\Omega$ risulta essere linearmente dipendente dalle tensioni uniformi $\boldsymbol{\sigma}^0$ applicate su ∂V . Tale rappresentazione può essere ottenuta mediante l'utilizzo della funzione di Green $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, che, per problemi di tipo lineare, rappresenta un tensore del secondo ordine, le cui componenti $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ consistono nelle componenti di spostamento $u_i(\mathbf{x})$ in un punto \mathbf{x} del volume V , dovuto ad una forza unitaria concentrata applicata nel punto \mathbf{y} del contorno ∂V nella j -esima direzione. Considerando, allora, le trazioni associate sul contorno alla macrodeformazione costante applicata, avremo:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\partial V} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \{ \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{n}(\mathbf{y}) \} dS \quad (2.132)$$

dove l'integrazione è da intendersi fatta rispetto ad \mathbf{y} . Essendo $\boldsymbol{\sigma}^0$ un tensore costante simmetrico la (2.132) può essere riscritta in forma indiciale nella maniera seguente:

$$u_i(\mathbf{x}) = K_{ijk}(\mathbf{x}) \sigma_{jk}^0 \quad (2.133)$$

dove il tensore del terzo ordine \mathbf{K} risulta dipendente dalla geometria e dalle proprietà elastiche della matrice ed è definito mediante:

$$K_{ijk}(\mathbf{x}) = K_{ikj}(\mathbf{x}) = \int_{\partial V} \frac{1}{2} \{ G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_k(\mathbf{y}) + G_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_j(\mathbf{y}) \} dS \quad (2.134)$$

Al fine di ottenere l'incremento di deformazione associato alla presenza delle cavità, occorre, a questo punto, sostituire il campo di spostamenti ottenuto mediante la (2.133) nella relazione (2.130):

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^C = H_{ijkl} \sigma_{kl}^0 \quad (2.135)$$

dove è stato introdotto il tensore del quarto ordine costante \mathbf{H} definito come:

$$H_{ijkl} = H_{jikl} = H_{ijlk} = \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} \{N_i(\mathbf{x})K_{jkl}(\mathbf{x}) + N_j(\mathbf{x})K_{ikl}(\mathbf{x})\} dS \quad (2.136)$$

E' da notare come tale risultato è valido solo sotto l'ipotesi che il materiale costituente la matrice dell'RVE sia elastico lineare, prescindendo dal fatto che esso sia o meno omogeneo. Le uniche condizioni sono: (1) la matrice dell'RVE deve essere elastico lineare; (2) la microstruttura deve restare invariata in seguito all'applicazione della macrotensione $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0$.

Il tensore di deformabilità omogeneizzato può essere, a questo punto, espresso in funzione del tensore del quarto ordine \mathbf{H} nella forma seguente:

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + \mathbf{H} \quad (2.137)$$

dove il tensore \mathbf{H} potrebbe essere valutato anche direttamente dall'incremento di deformazione associato alla presenza delle cavità, mediante la relazione (2.130).

2.6.3 Tensioni medie per macrodeformazioni assegnate

Supponiamo, adesso, che sul contorno ∂V dell'RVE sia assegnata la condizione $\mathbf{u}^0 = \boldsymbol{\varepsilon}^0 \mathbf{x}$, per la quale gli spostamenti superficiali risultano lineari ed imposta mediante l'applicazione di un tensore del secondo ordine costante $\mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon}^0$, rappresentativo della macrodeformazione. In assenza di cavità, le corrispondenti tensioni medie possono essere valutate mediante la relazione di legame:

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^0 \quad (2.138)$$

dove \mathbf{C} rappresenta il tensore di elasticità relativo al materiale costituente la matrice dell'RVE. In presenza di cavità, invece, i campi reali risultano essere, in generale, non uniformi. La deformazione media coincide, come visto, con la macrodeformazione:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) dS = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon} dV = \boldsymbol{\varepsilon}^0 \quad (2.139)$$

che risulta valida per qualsiasi tipo di RVE e microstruttura. Si può osservare come l'integrale risulti esteso al solo contorno ∂V senza tenere in conto quello relativo alle cavità $\partial\Omega$, in quanto la macrodeformazione viene applicata mediante la condizione sugli spostamenti sul contorno del solo RVE. La tensione media, dunque, in presenza di cavità non coincide con $\boldsymbol{\sigma}^0$ ma è data dalla relazione seguente:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \boldsymbol{\sigma}^0 + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^c \quad (2.140)$$

dove $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^c$ rappresenta il decremento della tensione media dovuto alla presenza di cavità all'interno dell'RVE. Anche in questo caso può essere applicato il teorema di Betti per risolvere il problema della valutazione della tensione media, introducendo un terzo set di condizioni al contorno, che va ad aggiungersi agli altri due utilizzati per la valutazione della deformazione media sotto l'applicazione della macrotensione $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0$ al contorno:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(3)} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 \mathbf{x} & su \partial V \\ \mathbf{t}^{(3)} = \mathbf{0} & su \partial\Omega \end{cases} \quad (2.141)$$

I campi di spostamento, deformazione e tensione associati con le condizioni (2.141) sono i seguenti:

$$\{\mathbf{u}^{(3)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)}, \boldsymbol{\sigma}^{(3)}\} = \{\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}\} \quad (2.142)$$

che rappresentano i campi reali, in generale differenti da quelli definiti dalla (2.125).

Le trazioni reali sul contorno dell'RVE saranno espresse, in questo caso, da:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad (2.143)$$

dove x rappresenta un punto sul contorno ∂V . Applicando il teorema di Betti, utilizzando i due set di carichi (2.122) e (2.141), otteniamo la seguente equazione:

$$\int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^0 \mathbf{x}) dS = \int_{\partial V} (\delta \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{n}) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^0 \mathbf{x}) dS - \int_{\partial \Omega} (\delta \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{N}) \cdot \mathbf{u} dS \quad (2.144)$$

che può essere riscritta nella forma seguente, mettendo in evidenza il termine costante $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^0$:

$$\left\{ \int_{\partial V} \mathbf{t} \otimes \mathbf{x} dS - \int_{\partial V} \mathbf{C} \{(\mathbf{x} \otimes \mathbf{n}) \boldsymbol{\varepsilon}^0\} dS + \int_{\partial \Omega} \mathbf{C}(\mathbf{N} \otimes \mathbf{u}) dS \right\} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}^0 = 0 \quad (2.145)$$

dove $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^0$ può essere interpretata come una deformazione virtuale costante, cui può essere associato il corrispondente campo di tensione $\delta \boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{C} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^0$. Essendo $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^0$ un tensore simmetrico arbitrario, la (2.145) risulta verificata in seguito all'annullamento del termine tra parentesi.

Il secondo termine può essere espresso nella forma seguente:

$$\frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{C} \{(\mathbf{x} \otimes \mathbf{n}) \boldsymbol{\varepsilon}^0\} dS = \mathbf{C} \{ \mathbf{I}^{(2s)} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \} = \boldsymbol{\sigma}^0 \quad (2.146)$$

Per cui, ricordando l'espressione della tensione media sull'RVE, ottenuta mediante i classici metodi della media:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{t} \otimes \mathbf{x} dS = \sigma^0 - \mathbf{C} \left\{ \frac{1}{V} \int_{\partial \Omega} \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{u}) dS \right\} \quad (2.147)$$

Dal confronto con la (2.140) emerge, quindi, come il decremento subito dal campo di tensione, a causa della presenza delle cavità, può essere espresso mediante:

$$\bar{\sigma}^C = -\mathbf{C} \bar{\varepsilon}^C \quad (2.148)$$

dove $\bar{\varepsilon}^C$ è l'incremento di deformazione associato alla presenza delle cavità, che deve essere, in questo caso, valutato in corrispondenza del campo lineare di spostamento imposto $\mathbf{u}^0 = \varepsilon^0 \mathbf{x}$.

2.6.4 Tensore di elasticità omogeneizzato per solidi elastici porosi

Quando risulta applicata sul contorno la macrodeformazione $\mathbf{E} = \varepsilon^0$, il tensore di elasticità omogeneizzato per l'RVE poroso, caratterizzato da una matrice con comportamento elastico lineare, lega tensioni e deformazioni medie mediante la classica relazione di legame:

$$\bar{\sigma} = \bar{\mathbf{C}} \varepsilon^0 \quad (2.149)$$

Sostituendo la (2.138), la (2.148) e la (2.149) nell'equazione (2.140), otteniamo la relazione seguente:

$$(\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{C}) \varepsilon^0 + \mathbf{C} \bar{\varepsilon}^C = 0 \quad (2.150)$$

Per un'assegnata microstruttura, caratterizzata dall'aver la distribuzione delle cavità fissa per forma e dimensioni delle stesse, la risposta dell'RVE risulta essere lineare. Pertanto, il campo di spostamenti, in ogni punto all'interno della matrice elastico lineare, risulta essere una funzione lineare ed omogenea della macrodeformazione

applicata. Alla luce di quanto ottenuto per il caso in cui sul contorno risulta applicata una macrotensione costante, possiamo rappresentare il campo di spostamento nella forma seguente:

$$u_i(\mathbf{x}) = L_{ijk}(\mathbf{x})\varepsilon_{jk}^0 \quad (2.151)$$

dove con x è da intendersi il generico punto sul contorno delle cavità $\partial\Omega$. Con $L(x)$ viene indicato, invece, il tensore del terzo ordine simmetrico, ottenuto mediante l'applicazione della funzione di Green, come già fatto per il caso precedente. Dalla definizione della $\bar{\varepsilon}^C$ è possibile, allora, ottenere la seguente espressione:

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^C = J_{ijkl}(\mathbf{x})\varepsilon_{kl}^0 \quad (2.152)$$

dove il tensore del quarto ordine costante J è espresso dalla:

$$J_{ijkl} = J_{jikl} = J_{ijlk} = \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} \{N_i(\mathbf{x})L_{jkl}(\mathbf{x}) + N_j(\mathbf{x})L_{ikl}(\mathbf{x})\} dS \quad (2.153)$$

Espressa, quindi, la $\bar{\varepsilon}^C$ in funzione della macrodeformazione assegnata ε^0 , possiamo ottenere l'espressione del tensore di elasticità omogeneizzato per l'RVE poroso, sostituendo la (2.152) nella (2.150):

$$\bar{C} = C - CJ \quad (2.154)$$