



UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA

DOTTORATO DI RICERCA IN MECCANICA COMPUTAZIONALE
XXI CICLO

SETTORE SCIENTIFICO DISCIPLINARE ICAR-08

Tesi di Dottorato

**Rielaborazioni e sviluppi degli approcci per
l'analisi di problemi dinamici nonlineari
delle strutture**

Katia Russo

Dissertazione presentata per il conseguimento del titolo di Dottore di
Ricerca in Meccanica Computazionale

Novembre 2008

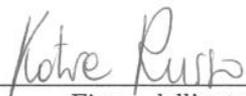
UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA

Data: Cosenza, Novembre 2008

Autore: Katia Russo

Titolo: Rielaborazioni e sviluppi degli approcci per l'analisi di problemi dinamici nonlineari delle strutture

Dipartimento: Modellistica per l'Ingeneria



Firma dell'autore

Supervisore:



Prof. Salvatore Lopez

Coordinatore:



Prof. Maurizio Aristodemo

*Alla Professoressa
Paolamaria Pietramala*

Indice

Ringraziamenti	iii
Introduzione	1
1 Preliminari	4
1.1 Il problema dinamico e l'algoritmo di integrazione di Newmark	4
1.2 Il metodo delle scale multiple	6
2 Miglioramento della stabilità nell'analisi dinamica	8
2.1 Un cambiamento di sistema di coordinate	8
2.2 Analisi dinamica	12
2.3 Risultati numerici	13
2.3.1 L-shaped block	13
2.3.2 Toss rule	15
3 Descrizione cinematica delle piccole deformazioni in regime di grandi spostamenti e rotazioni	18
3.1 Cinematiche lineari di base: elemento finito bidimensionale a quattro nodi	19
3.2 Cinematiche lineari di base: elemento finito tridimensionale ad otto nodi	22
3.3 Definizione degli invarianti deformativi	32
3.3.1 Elemento finito bidimensionale a quattro nodi	33
3.3.2 Elemento finito tridimensionale ad otto nodi	35
3.4 Contributi al tensore delle deformazioni	36
3.5 Risultati numerici	38
3.5.1 L-shaped block	38
3.5.2 Toss rule nel piano	39
3.5.3 Toss rule nello spazio	39
4 Analisi di un modello non lineare di trave alla Timoshenko con il metodo delle scale multiple	41
4.1 Equazioni del moto	42

4.2	Analisi asintotica	46
4.3	Equazioni del moto al primo ordine	51
5	Conclusioni	58
	Bibliografia	60

Ringraziamenti

Per primo e più di ogni altro voglio ringraziare il professore Salvatore Lopez, per essere stato una guida preziosa, un maestro paziente e un esempio di costanza nel tendere alla perfezione in ciò che più importa.

Il gruppo di ricerca Labmec, per avermi accolto come un ingegnere e per le opportunità di crescita culturale fornitemi.

Luigi, per essere stato l'esempio estremo di perseveranza nel raggiungimento degli obiettivi prefissati e, soprattutto, per la sua capacità di riuscire ad incoraggiarmi e permettermi, così, di superare i miei limiti.

Mamma, papà, Adele e Carmine per l'affetto e il sostegno costante.

Il professore Luigi Maierù, i cui preziosi consigli di vita mi hanno permesso di affrontare questi anni con la serenità necessaria.

Tre amici conosciuti attraverso questa esperienza e, che proprio per questo, l'hanno resa ancora più preziosa per la mia vita: Ottavio, per avermi mostrato come cercare l'ottimismo della vita, Zaira per essere stata l'amica dai modi discreti e sinceri a lungo cercata, Andrea per avermi insegnato che esiste sempre la possibilità di poter cambiare l'osservatore.

I miei colleghi: Antonio per avermi mostrato come la passione per lo studio possa superare i confini della materialità umana, Cristian per avermi incoraggiata costantemente, Giuseppe Z. per la sua capacità di ascoltare senza mai giudicare, Jamal con cui ho condiviso l'esperienza milanese, Emira, Marianna C., Giuseppe V., Lorenzo e quanti si sono già dottorati Rosamaria, Leonardo, Daniele, Sandro, Giuseppe D., Francesco P., Francesco M., Giovanna, Marialaura.

Gli amici conosciuti al Mox: Loredana, Valentina e Ugo.

I tesisti che periodicamente hanno affollato i laboratori di ricerca: Fabio Cofone, Domenico Citrea, Francesco D'Angeli, Michele Garcea, Francesco Moscato, Mimmo Fiorillo, Luigi Grisolia.

I *matematici*: Gennaro, Vittorio, Filomena, Marianna, Nadia, Emilia.

In ultimo ringrazio chi in questi anni mi ha regalato anche solo un semplice sorriso.

Novembre, 2008

Katia Russo

Introduzione

Negli ultimi anni in tutti i settori dell'ingegneria si è notevolmente diffuso l'uso di strumenti per la simulazione di fenomeni di tipo dinamico. In particolare, dal punto di vista dell'ingegneria strutturale, progressi significativi si sono registrati nell'ambito della dinamica non lineare ed hanno investito sia la teoria che l'implementazione di metodi computazionali. Tuttavia, anche alla luce di tali progressi, la dinamica non lineare delle strutture è ad oggi un campo in cui rimane ancora molto da indagare da più punti di vista.

In questo lavoro di tesi si sono particolarizzati ed approfonditi aspetti che coinvolgono alcuni filoni di ricerca della dinamica non lineare. In particolare, attraverso un approccio computazionale, si sono affrontate le tematiche riguardanti il miglioramento della stabilità nell'analisi dinamica, la descrizione cinematica delle piccole deformazioni in regimi di grandi spostamenti e rotazioni e, infine, l'analisi di un modello non lineare di trave alla Timoshenko con il metodo delle scale multiple.

In letteratura sono disponibili numerosi schemi di integrazione nel tempo, poichè una delle richieste più ricorrenti in ambito dinamico è quella della selezione di un appropriato schema di integrazione. Molti degli schemi usati sono stati originariamente ottenuti per problemi lineari. Tra questi schemi il più famoso e diffuso è l'algoritmo di Newmark [38], proposto alla fine degli anni 50 del secolo scorso, che risulta incondizionatamente stabile in ambito lineare, ma manifesta instabilità in contesti non lineari.

Sebbene esso sia tra i metodi esistenti quello che offre i maggiori margini di stabilità, a causa di alcune sue performance limitate in regimi non lineari, negli anni ha subito molte modifiche, originando in tal modo nuovi metodi. Le prime variazioni apportate sono legate all'introduzione di dissipazioni numeriche per evitare l'influenza sulla stabilità delle componenti ad alta frequenza delle vibrazioni, come appare nei lavori di Hoff e Pahl [15] o nei più popolari *generalized α -methods* ideati da Chung e Hulbert [10] e *HHT method*, proposto da Hilber *et al.*[14]. Nel corso degli anni, comunque, si sono ricercate anche strade alternative per la determinazione di metodi di integrazione nel tempo che potessero garantire analisi stabili. Tali metodi, basati sulle proprietà di conservazione dell'energia, sono motivati dalla gen-

eralizzazione del criterio di incondizionata stabilità proposto da Belytschko e Schoeberle [5]. I primi contributi in questa direzione sono dovuti a Hughes *et al.* [16], che propongono un algoritmo in cui il vincolo di conservazione dell'energia è imposto attraverso il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Ulteriori contributi sono dovuti a Simo e Tarnow [40, 41] e a Kuhl e Crisfield [19] che impongono, ad ogni passo temporale, vincoli di conservazione dell'energia e a Kuhl e Ramm [20, 21] che aggiungono, sempre attraverso l'uso dei moltiplicatori di Lagrange, anche vincoli di conservazione della quantità di moto lineare ed angolare. Accanto a questi metodi si sono affiancate le varianti con dissipazione numerica formulate da Armero e Petöcz [1] ed Armero e Romero [2, 3]. Tuttavia, le restrizioni della conservazione dell'energia e della quantità di moto lineare ed angolare, ad ogni passo di integrazione, sono solo condizioni necessarie per la stabilità.

Un altro aspetto problematico della dinamica delle strutture a comportamento geometricamente non lineare è legato alla modellazione di spostamenti e rotazioni finite e di piccole deformazioni. Classicamente le formulazioni sono di tipo corotazionale, in cui il moto del corpo continuo viene scomposto in moti deformativi puri e moti rigidi in modo da poter inizialmente studiare il moto del corpo in un contesto lineare, dove alcune problematiche, quali i fenomeni di locking o la presenza di modi spuri, possono essere più facilmente affrontati. In quest'ottica, una risposta iniziale ai fenomeni di locking è stata data da una classe di tecniche, note con il nome di tecniche di integrazione selettiva, in cui l'integrale che definisce l'energia potenziale all'interno dell'elemento è calcolato in modo esatto o in modo numerico ridotto a seconda delle componenti deformative (Zienkiewicz *et al.* [43], Kavanagh e Key [17]). Anche dal punto di vista dell'eliminazione dei modi spuri, ovvero dei modi legati alla presenza di energia interna nulla, si sono ottenute buone risposte, grazie, soprattutto, al metodo di integrazione con *hourglass control*. Tale metodo, introdotto da Kosloff e Frazier [18] e poi sviluppato, con migliori performance computazionali, da Flanagan e Belytschko [13] e Belytschko *et al.* [4], è basato sull'introduzione di parametri di smorzamento e di rigidità artificiale. Queste tecniche, comunque, devono essere affiancate da una definizione del sistema di riferimento locale adatta, robusta ed economica poiché, in generale, un approccio di tipo corotazionale soffre di singolarità della matrice di rotazione e, pertanto, richiede manipolazioni algebriche complesse per poter superare tali difficoltà.

Un'altra tematica oggetto di indagini in ambito dinamico è l'analisi di modelli non lineari di strutture tramite soluzioni in forma chiusa. Infatti se è possibile usare metodi analitici per problemi anche non lineari, questa operazione risulta opportuna sia per l'immediatezza dei risultati che per un'indagine qualitativa delle meccaniche coinvolte. Come accade nei casi,

che saranno esaminati, di piccole oscillazioni in cui non è possibile trascurare le risonanze interne non lineari, i metodi di soluzione in forma chiusa sono lo standard. Usualmente i problemi temporali sono risolti attraverso tecniche perturbative quali il metodo di Lindstedt-Poincaré, il metodo del bilanciamento armonico o il metodo delle scale multiple, mentre il problema spaziale, spesso, viene risolto usando il metodo dei residui pesati (metodi di Ritz o Galerkin) o delle espansioni in termini di modi normali del problema linearizzato. In particolare queste tecniche sono state usate per determinare risposte non lineari per travi con varie proprietà, come in [30] in cui Nayfeh usa una versione generalizzata del metodo delle scale multiple per analizzare le vibrazioni libere non lineari di una trave con modellizzazione alla Bernoulli, con leggere variazioni delle proprietà lungo la sua lunghezza oppure includendo gli effetti della risonanza interna, come nei lavori più recenti [8, 37, 9, 23].

I contenuti della tesi sono organizzati come segue. Nel primo capitolo sono definite le quantità meccaniche coinvolte nelle analisi e sono riformulati, secondo la notazione utilizzata, il metodo per la ricerca di soluzioni di un problema dinamico e il metodo delle scale multiple. Nel secondo capitolo è affrontato il tema della ricerca di un algoritmo di integrazione nel tempo che abbia margini di stabilità più ampi, senza fare ricorso all'uso dei vincoli di conservazione dell'energia. In effetti, l'algoritmo ottenuto produce analisi più stabili ed è realizzato aggiungendo alle variabili cartesiane un set di variabili locali che permettono di esprimere l'energia interna in una forma fortemente semplificata, per cui l'aumento del costo computazionale dovuto all'introduzione delle nuove variabili è comunque bilanciato dal minor numero di iterazioni richiesto. Nel terzo capitolo è determinata una formulazione alternativa per la descrizione del moto di un continuo bidimensionale e tridimensionale in regimi di piccole deformazioni e grandi spostamenti e rotazioni. In particolare, la nuova formulazione, che risulta valida sia per il caso bidimensionale che per quello tridimensionale, è ottenuta senza l'utilizzo di tecniche di tipo corotazionale. La metodologia usata è basata, infatti, sull'individuazione di alcune grandezze caratteristiche invarianti delle deformazioni. Essa preserva la possibilità di istruire l'elemento finito in ambito lineare e filtra nel tensore delle deformazioni i contributi non lineari dovuti alle sole deformazioni, conservando però quelli degli spostamenti e delle rotazioni. Nel quarto capitolo è analizzato un modello non lineare di trave alla Timoshenko attraverso il metodo delle scale multiple ottenendo le formulazioni dei sistemi delle equazioni del moto ai diversi ordini. Le conclusioni sono presentate nel quinto capitolo.

Capitolo 1

Preliminari

In questo capitolo preliminare sono definite le principali grandezze meccaniche che sono alla base delle analisi presentate in questo lavoro. Inoltre, sono illustrati, seppur in modo sintetico, i metodi per la ricerca della soluzione di un problema dinamico e il metodo delle scale multiple, noti in letteratura e qui riformulati secondo la notazione utilizzata.

1.1 Il problema dinamico e l'algoritmo di integrazione di Newmark

Sia dato un corpo \mathcal{B} definito su un dominio Ω , si indichi con $\mathbf{u} = (u, v, w)$ il vettore degli spostamenti dipendente dalle posizioni iniziali del corpo $\mathbf{x} = (x, y, z)$ e dal tempo t , i.e. $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

Le principali quantità energetiche coinvolte nelle analisi in esame sono: l'energia potenziale

$$V(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega, \quad (1.1)$$

in cui $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ è il vettore non lineare delle deformazioni ed \mathbf{A} è la matrice dei coefficienti materiali;

l'energia cinetica

$$T(\dot{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^2 d\Omega, \quad (1.2)$$

la quale è legata alla derivata degli spostamenti rispetto al tempo t (alla velocità) per mezzo della densità di massa ρ ;

l'energia esterna

$$L(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{p}^T \mathbf{u} d\Omega, \quad (1.3)$$

la cui espressione dipende dal vettore dai carichi esterni \mathbf{p} .

Attraverso un approccio ad elementi finiti gli spostamenti nel corpo sono individuati da n spostamenti in forma discreta. Con tale discretizzazione

spaziale, utilizzando le equazioni del moto di Lagrange e includendo le condizioni al contorno si ottiene la seguente espressione dell'equazione semidiscrета del moto:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{N}(\mathbf{u}(t)) - \mathbf{P}(t) = 0 \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \\ \dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

in cui $\ddot{\mathbf{u}}$ indica il vettore delle accelerazioni, \mathbf{u}_0 e $\dot{\mathbf{u}}_0$ sono, rispettivamente, il vettore degli spostamenti e quello delle velocità iniziali ed \mathbf{M} , \mathbf{N} , \mathbf{P} sono legati alle quantità energetiche per mezzo delle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T(\dot{\mathbf{u}}(t))}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right), \\ \mathbf{N}(\mathbf{u}(t)) &= \frac{\partial V(\mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}}, \\ \mathbf{P}(t) &= \frac{\partial L(\mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

L'algoritmo di integrazione alla Newmark rappresenta uno dei più diffusi tra gli schemi di integrazione nel tempo usati in dinamica computazionale. Esso in realtà realizza, nella sua formulazione generale data in (1.6), una serie di formule di integrazione caratterizzata ognuna dalla scelta dei parametri β e γ in essa coinvolti:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{\mathbf{u}}_n + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n, \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_n + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{u}}_n. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Nel seguito ci si riferirà allo schema, detto dell'accelerazione media, ottenuto con $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \frac{2}{\Delta t}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \dot{\mathbf{u}}_n, \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \frac{4}{\Delta t^2}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \frac{4}{\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_n - \ddot{\mathbf{u}}_n. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Sostituendo le equazioni (1.7) in (1.4) si ottiene un sistema di equazioni algebriche non lineari definite al tempo t_{n+1} dove il vettore incognito è \mathbf{u}_{n+1} :

$$\mathbf{M} \left(\frac{4}{\Delta t^2}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \frac{4}{\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_n - \ddot{\mathbf{u}}_n \right) + \mathbf{N}(\mathbf{u}_{n+1}) - \mathbf{P}_{n+1} = 0. \quad (1.8)$$

Più sinteticamente, il sistema (1.8) può essere posto nella seguente forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_{n+1}) = 0. \quad (1.9)$$

L'equazione precedente, di tipo non lineare, è risolta attraverso il metodo di Newton:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)}) + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)})}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} (\mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} - \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}). \quad (1.10)$$

Lo schema iterativo per la ricerca del punto di equilibrio parte da una stima iniziale degli spostamenti $\mathbf{u}_{n+1}^{(0)}$, ottenuta come estrapolazione lineare a partire dagli ultimi due punti noti \mathbf{u}_n e \mathbf{u}_{n-1} quando $n > 0$, mentre il primo passo è ottenuto tramite la relazione $\mathbf{u}_1^{(0)} = \mathbf{u}_0 + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_0$.

Le iterazioni continuano fino a quando non si verifica una condizione di uscita. In genere, la condizione di uscita dallo schema iterativo è imposta su una opportuna norma dell'incremento degli spostamenti. Nelle applicazioni che saranno presentate si è scelto la condizione seguente:

$$\frac{\|\mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} - \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}\|}{\|\mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} - \mathbf{u}_n\|} \leq 10^{-8}. \quad (1.11)$$

1.2 Il metodo delle scale multiple

Il metodo delle scale multiple è uno dei metodi perturbativi più diffusi ed è applicato ad una vastità di problemi in fisica, ingegneria e matematica quando la soluzione dipende da più scale temporali.

Come accade per la classe dei metodi perturbativi, lo scopo è quello di determinare una soluzione approssimata $u(x, t, \varepsilon)$ dove ε è una quantità sufficientemente piccola.

La caratteristica principale del metodo delle scale multiple è quella di considerare scale temporali diverse in modo da rendere possibile l'osservazione di un fenomeno a diversi istanti di tempo. Si suppone, infatti, di poter esprimere la variabile indipendente tempo in funzione di n variabili indipendenti, dette scale temporali, definite tramite:

$$t_n = \varepsilon^n t.$$

La scala $t_0 = t$ è la scala temporale più veloce, la scala t_1 è più lenta di t_0 e in generale la scala t_n è più lenta di t_{n-1} .

Avendo espresso la variabile indipendente t in funzione di n variabili indipendenti, le derivate rispetto al tempo, utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte, si trasformano in:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots, \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \dots \end{aligned}$$

Allora, la soluzione approssimata è ricercata nella forma:

$$u(x, t, \varepsilon) = u_0(x, t_0, t_1, \dots) + \varepsilon u_1(x, t_0, t_1, \dots) + \varepsilon^2 u_2(x, t_0, t_1, \dots) + \dots$$

e ricavata risolvendo, in successione, le equazioni che si ottengono uguagliando i coefficienti secondo le potenze di ε . Il numero di scale richiesto per formulare un'approssimazione è strettamente legato all'ordine dell'approssimazione: un'approssimazione all' n -esimo ordine richiede l'uso di $n + 1$ scale temporali.

Capitolo 2

Miglioramento della stabilità nell'analisi dinamica

La problematica in esame è quella di indagare l'evoluzione, in ambito dinamico, di una struttura sottoposta sia a forze inerenti le deformazioni, sia a forze che, essendo legate all'evoluzione della struttura stessa, si sviluppano durante il suo moto. Classicamente questo tipo di analisi si caratterizza per essere molto onerosa dal punto di vista computazionale e fortemente condizionata dalla scelta dell'algoritmo di integrazione nel tempo usato.

Nel contesto di questa ricerca, utilizzando il classico algoritmo di integrazione nel tempo di Newmark, si è cercato di aumentare i margini di stabilità utilizzando una descrizione dell'elemento finito basata solo sull'individuazione di distanze e angoli. Con questa scelta si è raggiunto l'obiettivo di semplificare l'espressione dell'energia legata alle forze interne e di migliorare anche i costi computazionali.

In questo capitolo dapprima sono illustrate le due tipologie di elementi finiti utilizzate nelle analisi e definite le nuove grandezze caratterizzanti gli elementi stessi. Successivamente sono indicate le modifiche da apportare, in questo nuovo contesto, all'algoritmo di determinazione della soluzione. Infine sono illustrati alcuni test numerici.

2.1 Un cambiamento di sistema di coordinate

Si consideri un corpo bidimensionale \mathcal{B} discretizzato attraverso due tipi di elementi finiti. Nel primo caso è stato utilizzato un elemento finito a quattro nodi, con lunghezze dei lati pari a $2h_x$ e $2h_y$, centrato nell'origine del sistema di riferimento O (Fig. 2.1). Per esso è stata scelta una classica interpolazione bilineare di $u(x, y)$ e $v(x, y)$:

$$\begin{aligned}u(x, y) &= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy, \\v(x, y) &= b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{11}xy.\end{aligned}\tag{2.1}$$

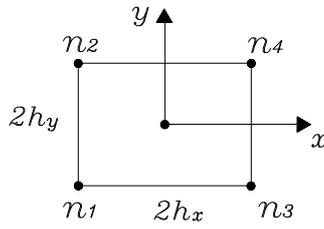


Fig. 2.1: Elemento finito a quattro nodi.

Nel secondo caso, invece, è stato scelto (Fig. 2.2) un elemento finito di pari dimensioni rispetto al caso precedente, ma avente sei nodi e le seguenti interpolazioni per $u(x, y)$ e $v(x, y)$:

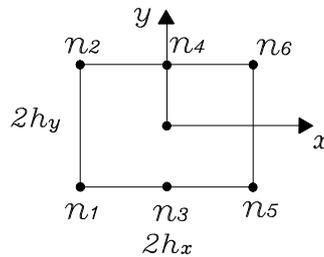


Fig. 2.2: Elemento finito a sei nodi.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{21}x^2y, \\ v(x, y) &= b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{21}x^2y. \end{aligned} \quad (2.2)$$

I valori dei coefficienti a_{ij} e b_{ij} indicati nelle equazioni (2.1) e (2.2) sono ottenuti imponendo le condizioni di compatibilità lungo i lati degli elementi di contorno.

Al fine di ottenere un'espressione semplificata delle forze interne, l'elemento finito è stato caratterizzato attraverso una rappresentazione di tipo polare, basata, cioè sull'individuazione di distanze ed angoli. In particolare, per l'elemento finito a quattro nodi, sono state scelte come nuove variabili le quantità indicate nell'elenco seguente e rappresentate in Fig. 2.3:

- L_1 : lunghezza del segmento congiungente i nodi n_1 and n_2 ,
- α_1 : angolo compreso tra L_1 e la posizione iniziale,
- L_3 : lunghezza del segmento congiungente i nodi n_3 and n_4 ,
- α_3 : angolo compreso tra L_3 e la posizione iniziale,
- L_2 : lunghezza del segmento congiungente i punti medi dei segmenti L_1 e L_3 ,

- α_2 : angolo compreso tra L_2 e la posizione iniziale,
- u_G, v_G : spostamenti del baricentro.

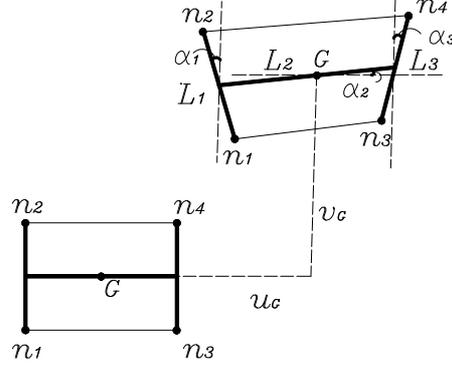


Fig. 2.3: Set di variabili locali per l'elemento finito a quattro nodi.

Queste nuove variabili rappresentano le componenti del vettore

$$\mathbf{q}(t) = (L_1, \alpha_1, L_2, \alpha_2, L_3, \alpha_3, u_G, v_G)$$

e sono legate alle variabili cartesiane attraverso le usuali relazioni che sussistono tra lati e angoli delle figure geometriche. Tali relazioni, che si presentano nella forma di equazioni non lineari, sono indicate nella (2.3):

$$\begin{cases} (u_3 - u_1) + L_1 \sin \alpha_1 = 0 \\ (v_3 - v_1) - L_1 \cos \alpha_1 + 2h_y = 0 \\ \frac{1}{2}(u_2 + u_4 - u_1 - u_3) - L_2 \cos \alpha_2 + 2h_x = 0 \\ \frac{1}{2}(v_2 + v_4 - v_1 - v_3) - L_2 \sin \alpha_2 = 0 \\ (u_4 - u_2) + L_3 \sin \alpha_3 = 0 \\ (v_4 - v_2) + L_3 \cos \alpha_3 + 2h_y = 0 \\ \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) - u_G = 0 \\ \frac{1}{4}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) - v_G = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Analogamente a quanto fatto per il quattro nodi, anche per l'elemento finito a sei nodi sono state individuate nuove variabili locali che indicano le distanze e gli angoli mostrati in Fig. 2.4, componenti del vettore $\mathbf{q}(t) = (L_1, \alpha_1, L_2, \alpha_2, L_3, \alpha_3, L_4, \alpha_4, L_5, \alpha_5, u_G, v_G)$ e definite come segue:

- L_1 : lunghezza del segmento congiungente i nodi n_1 and n_2 ,
- α_1 : angolo compreso tra L_1 e la posizione iniziale,
- L_2 : lunghezza del segmento congiungente i nodi n_3 and n_4 ,
- α_2 : angolo compreso tra L_2 e la posizione iniziale,

- L_3 : lunghezza del segmento congiungente i nodi n_5 and n_6 ,
- α_3 : angolo compreso tra L_3 e la posizione iniziale,
- L_4 : lunghezza del segmento congiungente i punti medi dei segmenti L_1 e L_2 ,
- α_4 : angolo compreso tra L_4 e la posizione iniziale,
- L_5 : lunghezza del segmento congiungente i punti medi dei segmenti L_2 e L_3 ,
- α_5 : angolo compreso tra L_5 e la posizione iniziale,
- u_G, v_G : spostamenti del baricentro.

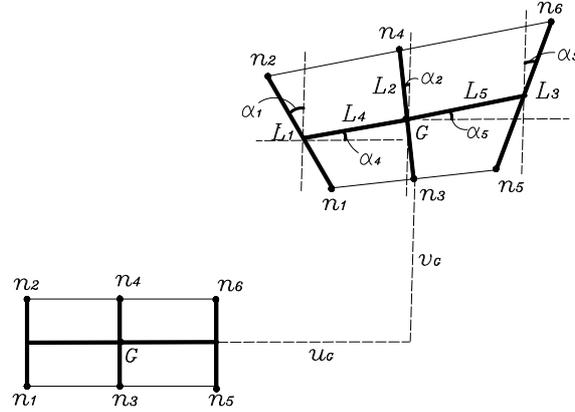


Fig. 2.4: Set di variabili locali per l'elemento finito a sei nodi.

Le relazioni che legano le variabili cartesiane a quelle locali nel caso dell'elemento finito a sei nodi sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_2 - u_1) + L_1 \sin \alpha_1 = 0 \\ (v_2 - v_1) - L_1 \cos \alpha_1 + 2h_y = 0 \\ (u_4 - u_3) + L_2 \sin \alpha_2 = 0 \\ (v_4 - v_3) - L_2 \cos \alpha_2 + 2h_y = 0 \\ (u_6 - u_5) + L_3 \sin \alpha_3 = 0 \\ (v_6 - v_5) - L_3 \cos \alpha_3 + 2h_y = 0 \\ \frac{1}{2}(u_3 + u_4 - u_1 - u_2) - L_4 \cos \alpha_4 + h_x = 0 \\ \frac{1}{2}(v_3 + v_4 - v_1 - v_2) - L_4 \sin \alpha_4 = 0 \\ \frac{1}{2}(u_5 + u_6 - u_3 - u_4) - L_5 \cos \alpha_5 + h_x = 0 \\ \frac{1}{2}(v_5 + v_6 - v_3 - v_4) - L_5 \sin \alpha_5 = 0 \\ \frac{1}{12}(u_1 + u_2 + 4u_3 + 4u_4 + u_5 + u_6) - u_G = 0 \\ \frac{1}{12}(v_1 + v_2 + 4v_3 + 4v_4 + v_5 + v_6) - v_G = 0. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

2.2 Analisi dinamica

Avendo introdotto nel paragrafo precedente un set di ulteriori variabili per descrivere l'elemento finito, risulta necessario apportare alcune modifiche sia alle definizioni delle energie che all'algoritmo di soluzione. Pertanto, si indichi con n_u il numero di componenti del vettore $\mathbf{u}(t)$, definito in un riferimento cartesiano (\mathbf{u}) e n_q il numero di componenti nel vettore $\mathbf{q}(t)$ del sistema di riferimento locale (\mathbf{q}) . Esprimendo la dipendenza tra variabili locali e cartesiane nella forma:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{q}(t)),$$

è possibile riscrivere il vettore delle forze interne come:

$$\mathbf{N}(\mathbf{q}(t)) = \left. \frac{\partial V(\mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}(\mathbf{q}(t))}. \quad (2.5)$$

Si denoti, ora, con (\mathbf{u}, \mathbf{q}) lo spazio in cui si realizza la nuova rappresentazione; esso è tale che $(\mathbf{u}) \subset (\mathbf{u}, \mathbf{q})$, $(\mathbf{q}) \subset (\mathbf{u}, \mathbf{q})$, e, inoltre, nel caso in cui $(\mathbf{u}) \cap (\mathbf{q}) \neq \emptyset$, la dimensione indicata con n_{uq} è tale che $n_{uq} \leq n_u + n_q$.

Allora, il sistema delle equazioni del moto (1.4) viene riscritto in modo che l'energia interna V è calcolata nella rappresentazione (\mathbf{q}) , mentre l'energia cinetica rimane espressa nella formulazione cartesiana (\mathbf{u}) così come il lavoro dei carichi esterni. Inoltre, le condizioni iniziali sono definite tramite le relazioni seguenti:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(\mathbf{u}(t)), \quad \dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{u}}(\dot{\mathbf{u}}(t)), \quad \ddot{\mathbf{q}}(t) = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{u}}(\dot{\mathbf{u}}(t)),$$

mentre le condizioni al contorno rimangono imposte nella rappresentazione cartesiana.

Il nuovo sistema delle equazioni del moto è:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{q}) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{N}(\mathbf{q}(t)) - \mathbf{P}(t) = \mathbf{0}. \quad (2.6)$$

Si osserva che in (2.6) sono presenti n_{uq} incognite, ma solo n_u equazioni e, pertanto, per poter risolvere il sistema è necessario introdurre un set Γ di $n_{uq} - n_u$ equazioni aggiuntive. Tali equazioni sono ottenute, sia per il quattro nodi che per il sei nodi, derivando due volte nel tempo, rispettivamente, le relazioni (2.3) e (2.4) e sono indicate sinteticamente come segue:

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{q}) = b(\mathbf{u}) + a(\mathbf{q}) + r = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

A questo punto, si può procedere con la determinazione della soluzione. Il sistema associato, includendo il set di equazioni aggiuntive Γ , risulta:

$$\begin{cases} \mathbf{g} + \mathbf{M}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{K}\Delta\mathbf{q} = \mathbf{0} \\ \mathbf{h} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{A}\Delta\mathbf{q} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.8)$$

dove la matrice di rigidezza \mathbf{K} è definita da $K_{ij} = \frac{\partial N_i}{\partial q_j}$, \mathbf{B} è definita da $B_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial u_j}$ e \mathbf{A} , definita da $A_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial q_j}$, è una matrice a blocchi 3×3 facilmente invertibile.

L'algoritmo di integrazione nel tempo nella rappresentazione (\mathbf{u}, \mathbf{q}) , infine, segue lo schema di Newmark (1.7) anche per la determinazione di $\dot{\mathbf{q}}_n$ e $\ddot{\mathbf{q}}_n$. Pertanto, lo schema di soluzione che si propone per determinare $\Delta \mathbf{u}$ e $\Delta \mathbf{q}$ è:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{q}^{k+1} = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{h} + \mathbf{B}\Delta \mathbf{u}^{k+1}) \\ (\mathbf{M} - \mathbf{K}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\Delta \mathbf{u}^{k+1} + \mathbf{g} - \mathbf{K}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{h} = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

2.3 Risultati numerici

In questa sezione vengono proposte due applicazioni numeriche del metodo a problematiche presenti in letteratura. Ci si è riferiti all'energia interna V calcolata nella nuova rappresentazione, all'energia cinetica T nella rappresentazione cartesiana:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} \quad (2.10)$$

e al lavoro delle forze esterne L calcolato tramite la formula dei trapezi:

$$L_{n+1} = L_n + \Delta L_n, \quad \Delta L_n = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n)^T (\mathbf{P}_{n+1} + \mathbf{P}_n). \quad (2.11)$$

Inoltre si è indicato con *steps* il numero di passi effettuati nel processo di integrazione e con Nw_i il numero di iterazioni alla Newton richieste all' i -esimo passo:

$$Nw_m = \sum_{i=1}^{step} Nw_i / steps. \quad (2.12)$$

2.3.1 L-shaped block

Questo problema è apparso nel lavoro di Betsch and P. Steinmann [7] del 2001. La configurazione iniziale del corpo e la sua discretizzazione, realizzata attraverso 36 elementi finiti a quattro nodi, è mostrata in Fig. 2.5. Il corpo è soggetto a carichi esterni distribuiti p , il cui andamento è descritto in Fig. 2.6, il modulo di Young utilizzato nell'analisi è $E = 10^7 \text{ N/m}^2$, il coefficiente di Poisson è $\nu = 0.3$ e la densità di massa $\rho = 1 \text{ Kg/m}^3$.

Il processo iterativo nella rappresentazione classica (\mathbf{u}) produce deformate esatte se si sceglie un passo temporale Δt minore di 0.05 s , mentre il metodo diventa instabile se $\Delta t \geq 0.05 \text{ s}$. Nella rappresentazione (\mathbf{u}, \mathbf{q}) , invece, si ottengono deformate esatte anche se il passo temporale scelto è

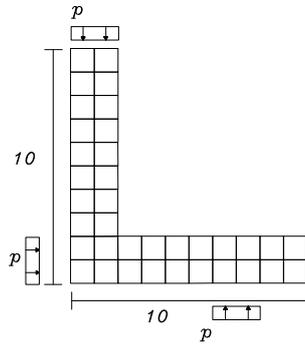


Fig. 2.5: L-shaped block: configurazione iniziale e mesh.

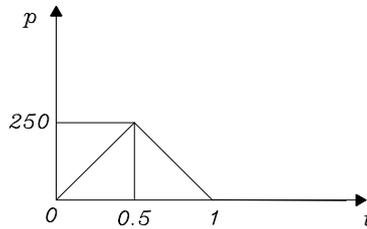


Fig. 2.6: L-shaped block: storia dei carichi esterni.

molto più piccolo di $0.05 s$. Inoltre, se si calcola il numero di iterazioni alla Newton Nw_m , si osserva che esso risulta più piccolo nella nuova rappresentazione che nel caso classico e, al fine di evidenziare tali differenze, nella Tab. 2.1 sono riportati le Nw_m effettuate in entrambe le formulazioni per alcuni fissati passi temporali.

Δt	0.01 s	0.02 s	0.05 s	0.1 s	0.2 s
(\mathbf{u})	3.000	3.725	<i>div</i>		
(\mathbf{u}, \mathbf{q})	2.089	2.098	2.105	2.178	2.294

Tab. 2.1: L-shaped block: confronto delle iterazioni Nw_m richieste.

In Fig. 2.7, invece, sono riportate le deformate dell'elemento ottenute nella rappresentazione (\mathbf{u}, \mathbf{q}) nell'intervallo di tempo $[0 s, 10 s]$ con passo temporale $\Delta t = 0.05 s$.

Nell'analisi effettuata si è osservato anche l'andamento delle energie, rilevando che nella rappresentazione classica (\mathbf{u}) si manifesta un fenomeno di instabilità in prossimità di $t = 4 s$, se si sceglie il passo temporale $\Delta t = 0.05 s$, (Fig. 2.8), mentre nella rappresentazione (\mathbf{u}, \mathbf{q}) l'energia totale del sistema si conserva (Fig. 2.9).

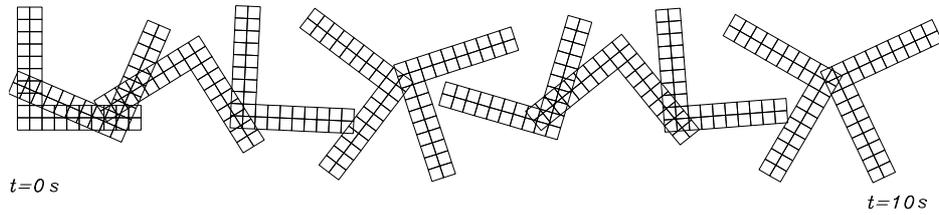


Fig. 2.7: L-shaped block: sequenza di deformate calcolate nella rappresentazione (\mathbf{u}, \mathbf{q}) con passo temporale $\Delta t = 0.05 s$.

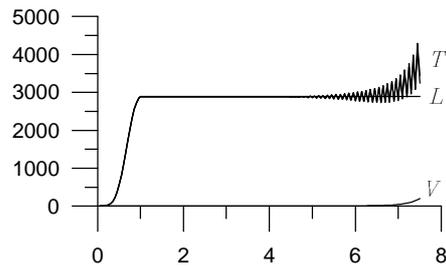


Fig. 2.8: L-shaped block: andamento delle energie nella rappresentazione (\mathbf{u}) ottenuto con passo temporale $\Delta t = 0.05 s$.

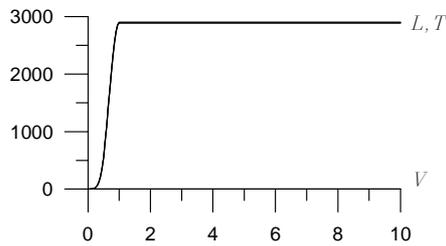


Fig. 2.9: L-shaped block: andamento delle energie nella rappresentazione (\mathbf{u}, \mathbf{q}) ottenuto con passo temporale $\Delta t = 0.05 s$.

2.3.2 Toss rule

Il test proposto è presente, in forma tridimensionale, nel lavoro di Kuhl and Ramm [21]. La discretizzazione è realizzata con 15 elementi a sei nodi e come mostra la Fig. 2.10 essa è soggetta a carichi esterni distribuiti p il cui andamento è invece indicato in Fig. 2.11.

Le costanti materiali utilizzate sono: $E = 1.236 \cdot 10^{10} N/m^2$, $\nu = 0.3$ e $\rho = 4.68 \cdot 10^2 Kg/m^3$.

Nella rappresentazione classica (\mathbf{u}) il processo iterativo produce deformate esatte se $\Delta t < 0.0001 s$, mentre per $\Delta t \geq 0.0001 s$ il processo diventa instabile. Nella rappresentazione (\mathbf{u}, \mathbf{q}) , invece, si ottengono deformate esat-

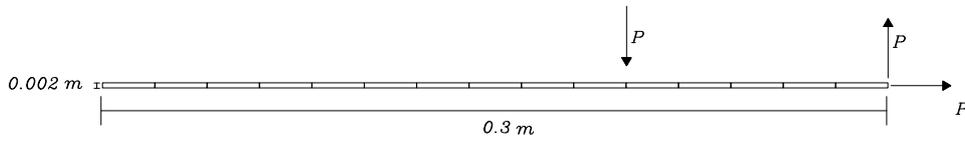


Fig. 2.10: Toss rule: configurazione iniziale e mesh.

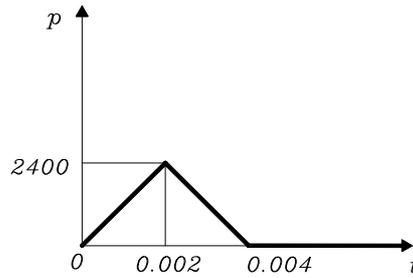


Fig. 2.11: Toss rule: storia dei carichi esterni.

te anche per valori del passo temporale più piccolo di $\Delta t = 0.0001$ s come si può rilevare dalla Fig. 2.12.

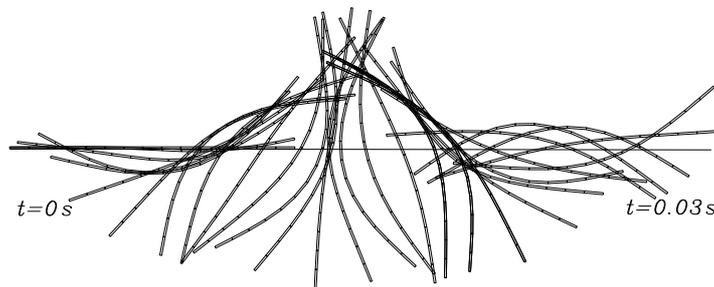


Fig. 2.12: Toss rule: sequenza di deformate calcolate nella rappresentazione (\mathbf{u}, \mathbf{q}) e con passo temporale $\Delta t = 0.0001$ s.

Inoltre, anche in questo caso, il numero di iterazioni alla Newton diminuisce rispetto al caso classico, come mostrato nella Tab. 2.2.

Δt	0.00001 s	0.00002 s	0.00005 s	0.0001 s	0.0002 s	0.0005 s
(\mathbf{u})	2.013	2.477	3.072	<i>div</i>		
(\mathbf{u}, \mathbf{q})	2.000	2.051	2.970	3.000	3.826	4.360

Tab. 2.2: Toss rule: confronto delle iterazioni Nw_m .

Analizzando gli andamenti energetici è possibile, analogamente al caso precedente, evidenziare che nella rappresentazione classica si manifesta un

fenomeno di instabilità in prossimità del tempo $t = 0.043 s$, con scelta del passo temporale $\Delta t = 0.0001 s$ (Fig. 2.13). Invece, nella rappresentazione locale (\mathbf{u}, \mathbf{q}) l'energia totale del sistema si conserva (Fig. 2.14).

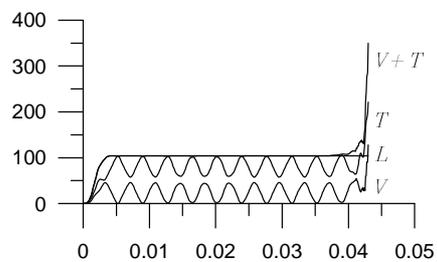


Fig. 2.13: Toss rule: andamento delle energie nella rappresentazione (\mathbf{u}) ottenuto con passo temporale $\Delta t = 0.0001 s$.

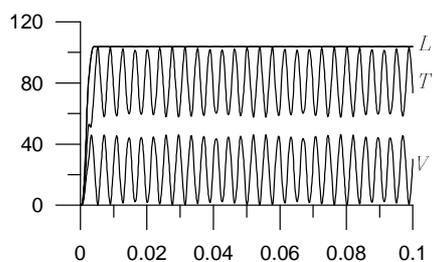


Fig. 2.14: Toss rule: andamento delle energie nella rappresentazione (\mathbf{u}, \mathbf{q}) ottenuto con passo temporale $\Delta t = 0.0001 s$.

Capitolo 3

Descrizione cinematica delle piccole deformazioni in regime di grandi spostamenti e rotazioni

Il contesto è quello della modellizzazione di un continuo bidimensionale o tridimensionale nell'ipotesi di piccole deformazioni e grandi spostamenti e rotazioni in ambito dinamico, tramite elementi finiti semplici. Classicamente, l'elemento viene dapprima istruito in ambito lineare, dove possono essere affrontate e superate le problematiche legate al locking o alla presenza di modi spuri; poi la parte non lineare viene affrontata sovrapponendo alla cinematica lineare i moti rigidi recuperati tramite trasformazioni ortogonali.

Questa ricerca propone una metodologia che preserva il vantaggio di poter studiare l'elemento finito in ambito lineare, ma in cui le informazioni non lineari vengono recuperate senza passare attraverso la formulazione di modelli di tipo corotazionale. In particolare, si affronta il problema di sfoltire il tensore delle deformazioni privandolo delle componenti non lineari dovute alle sole deformazioni. Qui, questa operazione, in generale non risolvibile in forma chiusa, è resa possibile dall'individuazione di una grandezza, chiamata invariante deformativo, che non è influenzata dai moti rigidi e che rimane associata unicamente ad un solo modo deformativo.

In questo capitolo sono presentate dapprima le cinematiche di base scelte per l'elemento bidimensionale e per quello tridimensionale. Successivamente è indicata la metodologia per individuare gli invarianti deformativi e per semplificare il tensore delle deformazioni. Infine, sono illustrati alcuni risultati numerici.

3.1 Cinematiche lineari di base: elemento finito bidimensionale a quattro nodi

Dato il sistema di riferimento bidimensionale (ξ, η) , si consideri un elemento finito centrato nell'origine con lunghezze dei lati rispettivamente $2h_\xi$ e $2h_\eta$ (Fig. 3.1).

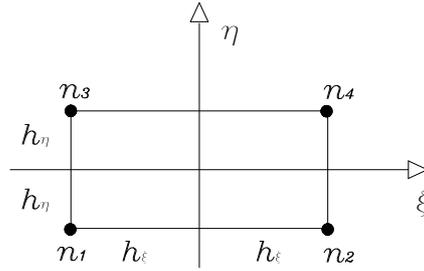


Fig. 3.1: Elemento finito bidimensionale a quattro nodi: definizione.

Usando una classica interpolazione bilineare:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\xi\eta, \\ v(\xi, \eta) &= \beta_0 + \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\xi\eta, \end{aligned}$$

si ottiene la seguente espressione del tensore delle deformazioni:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi\xi} = u_{,\xi}(\xi, \eta) &= \alpha_1 + \alpha_3\eta, \\ \varepsilon_{\eta\eta} = v_{,\eta}(\xi, \eta) &= \beta_2 + \beta_3\xi, \\ \varepsilon_{\xi\eta} = \frac{1}{2} [u_{,\eta}(\xi, \eta) + v_{,\xi}(\xi, \eta)] &= \frac{1}{2} [\alpha_2 + \alpha_3\xi + \beta_1 + \beta_3\eta]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

A questo punto, attraverso un procedimento quasi classico, si esprimono le deformazioni definite in (3.1) nella base dei tre moti rigidi e di cinque modi deformativi associati alle scelte:

$$\begin{aligned} e_1 &= \alpha_1, \\ e_2 &= \beta_2, \\ e_3 &= \alpha_2 + \beta_1, \\ e_4 &= \alpha_3, \\ e_5 &= \beta_3, \end{aligned}$$

ottenendo la relazione:

$$\left\{ \begin{array}{c} u_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ \frac{1}{2}(u_{,\eta} + v_{,\xi}) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\xi & \frac{1}{2}\eta \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \beta_2 \\ \alpha_2 + \beta_1 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{array} \right\}. \quad (3.2)$$

Inoltre, si vincolano i moti rigidi nell'origine O attraverso le condizioni:

$$\begin{aligned} u(0,0) &= \alpha_0 = 0, \\ v(0,0) &= \beta_0 = 0, \\ \omega(0,0) &= \frac{1}{2}(u_{,\eta} - v_{,\xi})\Big|_{(0,0)} = \frac{1}{2}(\alpha_2 - \beta_1) = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

dove $\omega(0,0)$ indica la rotazione dell'elemento attorno ad O .

Per ricavare le cinematiche si pongono $e_i \neq 0$ ed $e_j = 0 \forall j \neq i$, e si risolve il sistema di equazioni differenziali (3.2) così ottenuto con le condizioni di vincolo (3.3). In particolare, scegliendo $e_1 = E_\xi$, il sistema associato è nella forma:

$$\begin{cases} u_{,\xi} = E_\xi \\ v_{,\eta} = 0 \\ \frac{1}{2}[u_{,\eta} + v_{,\xi}] = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

ovvero:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3\eta = E_\xi \\ \beta_2 + \beta_3\xi = 0 \\ \frac{1}{2}[\alpha_2 + \alpha_3\xi + \beta_1 + \beta_3\eta] = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

La quantità E_ξ , qui chiamata parametro deformativo, è una costante arbitraria che indica l'allungamento lineare nella direzione ξ . Il sistema (3.5) è soddisfatto se $\alpha_1 = E_\xi$ e $\alpha_i = 0 \forall i \neq 1$ e $\beta_i = 0 \forall i$. Ne segue che il campo di spostamenti relativo al primo modo deformativo, ovvero all'allungamento in direzione ξ , è dato da:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= E_\xi\xi \\ v(\xi, \eta) &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Per ottenere le definizioni degli altri modi deformativi basta ripetere lo stesso procedimento cambiando le scelte iniziali. Il secondo modo deformativo, l'allungamento in direzione η , caratterizzato dal parametro deformativo E_η , è ottenuto dalla scelta $e_2 = E_\eta$ che conduce al sistema:

$$\begin{cases} u_{,\xi} = 0 \\ v_{,\eta} = E_\eta \\ \frac{1}{2}[u_{,\eta} + v_{,\xi}] = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= 0 \\ v(\xi, \eta) &= E_\eta\eta. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Il terzo modo deformativo, ovvero lo scorrimento, è ottenuto con scelta $e_3 = S$, dove S è il parametro deformativo, e il sistema associato risulta:

$$\begin{cases} u_{,\xi} = 0 \\ v_{,\eta} = 0 \\ \frac{1}{2}[u_{,\eta} + v_{,\xi}] = S \end{cases}$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= S\eta \\ v(\xi, \eta) &= S\xi. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Il quarto e il quinto modo, rispettivamente i modi a clessidra in direzione ξ ed η , caratterizzati dai parametri deformativi H_ξ e H_η , si ottengono scegliendo $e_4 = H_\xi$ e $e_5 = H_\eta$. I sistemi e le relative soluzioni sono indicati di seguito:

$$\begin{cases} u_{,\xi} = H_\xi \eta & v_{,\eta} = 0 \\ \frac{1}{2}[u_{,\eta} + v_{,\xi}] = H_\xi \xi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= H_\xi \xi \eta \\ v(\xi, \eta) &= 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} u_{,\xi} = 0 \\ v_{,\eta} = H_\eta \xi \\ \frac{1}{2}[u_{,\eta} + v_{,\xi}] = H_\eta \eta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= 0 \\ v(\xi, \eta) &= H_\eta \xi \eta. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Una rappresentazione dei modi deformativi appena determinati è data in Fig. 3.2.

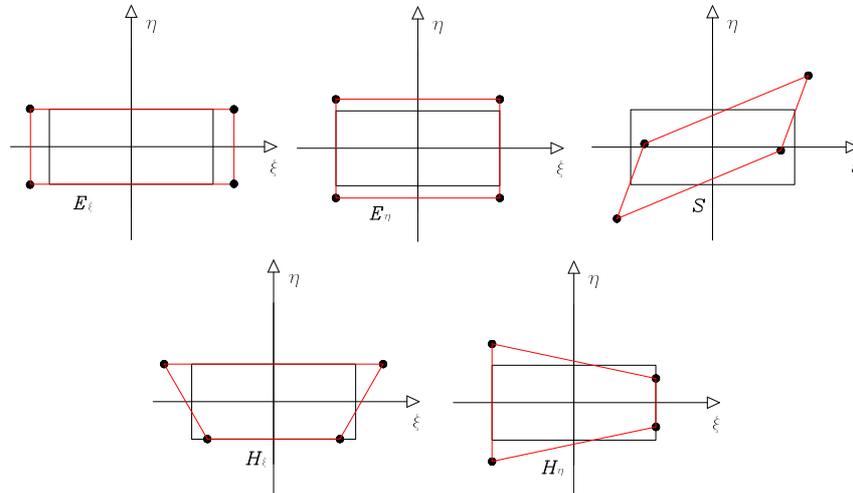


Fig. 3.2: Elemento finito bidimensionale a quattro nodi: rappresentazione dei modi deformativi.

3.2 Cinematiche lineari di base: elemento finito tridimensionale ad otto nodi

Si consideri un classico elemento tridimensionale ad otto nodi, centrato nell'origine $O = (0, 0, 0)$ del sistema di riferimento (ξ, η, ζ) e di dimensioni $2h_\xi$, $2h_\eta$, $2h_\zeta$ (Fig. 3.3). Si utilizzi un' interpolazione trilineare:

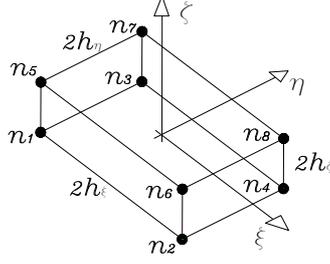


Fig. 3.3: Elemento finito tridimensionale ad otto nodi: definizione.

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta + \alpha_4\xi\eta + \alpha_5\xi\zeta + \alpha_6\eta\zeta + \alpha_7\xi\eta\zeta, \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= \beta_0 + \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta + \beta_4\xi\eta + \beta_5\xi\zeta + \beta_6\eta\zeta + \beta_7\xi\eta\zeta, \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= \gamma_0 + \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta + \gamma_4\xi\eta + \gamma_5\xi\zeta + \gamma_6\eta\zeta + \gamma_7\xi\eta\zeta. \end{aligned}$$

In questo modo le espressioni delle componenti del tensore delle deformazioni risultano:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi\xi} &= u_{,\xi}(\xi, \eta, \zeta) = \alpha_1 + \alpha_4\eta + \alpha_5\zeta + \alpha_7\eta\zeta, \\ \varepsilon_{\xi\eta} &= \frac{1}{2} [u_{,\eta}(\xi, \eta, \zeta) + v_{,\xi}(\xi, \eta, \zeta)] \\ &= \frac{1}{2} [(\alpha_2 + \beta_1) + \alpha_4\xi + \beta_4\eta + (\alpha_6 + \beta_5)\zeta + \alpha_7\xi\zeta + \beta_7\eta\zeta], \\ \varepsilon_{\xi\zeta} &= \frac{1}{2} [u_{,\zeta}(\xi, \eta, \zeta) + w_{,\xi}(\xi, \eta, \zeta)] \\ &= \frac{1}{2} [(\alpha_3 + \gamma_1) + \alpha_5\xi + \gamma_6\zeta + (\gamma_4 + \alpha_6)\eta + \alpha_7\xi\eta + \gamma_7\eta\zeta], \quad (3.11) \\ \varepsilon_{\eta\eta} &= v_{,\eta}(\xi, \eta, \zeta) = \beta_2 + \beta_4\xi + \beta_6\zeta + \beta_7\xi\zeta, \\ \varepsilon_{\eta\zeta} &= \frac{1}{2} [v_{,\zeta}(\xi, \eta, \zeta) + w_{,\eta}(\xi, \eta, \zeta)] \\ &= \frac{1}{2} [(\beta_3 + \gamma_2) + \beta_6\eta + \gamma_6\zeta + (\beta_5 + \gamma_4)\xi + \beta_7\xi\eta + \gamma_7\xi\zeta], \\ \varepsilon_{\zeta\zeta} &= w_{,\zeta}(\xi, \eta, \zeta) = \gamma_3 + \gamma_5\xi + \gamma_6\eta + \gamma_7\xi\eta. \end{aligned}$$

In modo analogo al caso bidimensionale visto nel paragrafo precedente, esprimiamo le deformazioni (3.11) nella base dei sei moti rigidi e di diciotto moti deformativi. Questi ultimi si ottengono ponendo

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{e}, \quad (3.12)$$

dove

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_{\xi\xi}, \varepsilon_{\xi\eta}, \varepsilon_{\xi\zeta}, \varepsilon_{\eta\eta}, \varepsilon_{\eta\zeta}, \varepsilon_{\zeta\zeta}\}, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 & \eta\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\zeta & 0 & 0 & \frac{1}{2}\xi & \frac{1}{2}\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\xi\zeta & \frac{1}{2}\eta\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\eta & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\xi & \frac{1}{2}\zeta & 0 & 0 & \frac{1}{2}\xi\eta & 0 & \frac{1}{2}\eta\zeta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 & \xi\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\eta & \frac{1}{2}\zeta & 0 & \frac{1}{2}\xi\eta & \frac{1}{2}\xi\zeta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & \eta & 0 & 0 & \xi\eta \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

ed

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^T = \{ & \alpha_1, \beta_2, \gamma_3, \alpha_2 + \beta_1, \alpha_3 + \gamma_1, \beta_3 + \gamma_2, \alpha_6 + \beta_5, \gamma_4 + \alpha_6, \beta_5 + \gamma_4, \\ & \alpha_4, \beta_4, \alpha_5, \gamma_5, \beta_6, \gamma_6, \alpha_7, \beta_7, \gamma_7 \}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Si vincolano i moti rigidi del punto centrale O attraverso le condizioni:

$$\begin{aligned} u(0, 0, 0) &= \alpha_0 = 0, \\ v(0, 0, 0) &= \beta_0 = 0, \\ w(0, 0, 0) &= \gamma_0 = 0, \\ \omega_{\xi\eta}(0, 0, 0) &= \frac{1}{2}(u_{,\eta} - v_{,\xi}) \Big|_{(0,0,0)} = \frac{1}{2}(\alpha_2 - \beta_1) = 0, \\ \omega_{\eta\zeta}(0, 0, 0) &= \frac{1}{2}(v_{,\zeta} - w_{,\eta}) \Big|_{(0,0,0)} = \frac{1}{2}(\beta_3 - \gamma_2) = 0, \\ \omega_{\zeta\xi}(0, 0, 0) &= \frac{1}{2}(w_{,\xi} - u_{,\zeta}) \Big|_{(0,0,0)} = \frac{1}{2}(\gamma_1 - \alpha_3) = 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

dove $\omega_{\xi\eta}$, $\omega_{\eta\zeta}$ e $\omega_{\zeta\xi}$ sono, rispettivamente le rotazioni attorno agli assi ζ , ξ e η .

Di seguito sono schematizzati i diciotto modi deformativi dell'elemento tridimensionale: è indicata la scelta del parametro deformativo, il tipo di modo deformativo che si ottiene con tale scelta, il sistema di equazioni differenziali che lo individua e il campo di spostamenti. Inoltre, dopo ogni gruppo di deformazioni dello stesso tipo è data una rappresentazione di esse.

- $e_1 = E_\xi$: allungamento in direzione ξ

– sistema associato

$$\begin{cases} u_{,\xi} = E_\xi \\ \frac{1}{2}[u_{,\eta} + v_{,\xi}] = 0 \\ \frac{1}{2}[u_{,\zeta} + w_{,\xi}] = 0 \\ v_{,\eta} = 0 \\ \frac{1}{2}[v_{,\zeta} + w_{,\eta}] = 0 \\ w_{,\zeta} = 0 \end{cases}$$

– campo di spostamenti

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= E_\xi \xi \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= 0 \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= 0; \end{aligned} \tag{3.17}$$

- $e_2 = E_\eta$: allungamento in direzione η

– sistema associato

$$\left\{ \begin{array}{l} u, \xi = 0 \\ \frac{1}{2} [u, \eta + v, \xi] = 0 \\ \frac{1}{2} [u, \zeta + w, \xi] = 0 \\ v, \eta = E_\eta \\ \frac{1}{2} [v, \zeta + w, \eta] = 0 \\ w, \zeta = 0 \end{array} \right.$$

– campo di spostamenti

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= 0 \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= E_\eta \eta \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= 0; \end{aligned} \tag{3.18}$$

- $e_3 = E_\zeta$: allungamento in direzione ζ

– sistema associato

$$\left\{ \begin{array}{l} u, \xi = 0 \\ \frac{1}{2} [u, \eta + v, \xi] = 0 \\ \frac{1}{2} [u, \zeta + w, \xi] = 0 \\ v, \eta = 0 \\ \frac{1}{2} [v, \zeta + w, \eta] = 0 \\ w, \zeta = E_\zeta \end{array} \right.$$

– campo di spostamenti

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= 0 \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= 0 \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= E_\zeta \zeta; \end{aligned} \tag{3.19}$$

- $e_4 = S_{\xi\eta}$: scorrimento nel piano $\xi\eta$

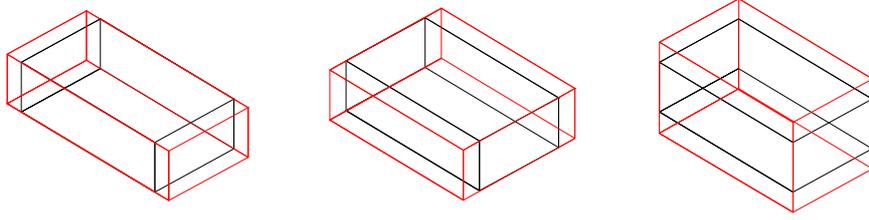


Fig. 3.4: Elemento finito tridimensionale ad otto nodi: rappresentazione degli allungamenti nelle direzioni ξ , η e ζ .

– sistema associato

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{,\xi} = 0 \\ \frac{1}{2} [u_{,\eta} + v_{,\xi}] = S_{\xi\eta} \\ \frac{1}{2} [u_{,\zeta} + w_{,\xi}] = 0 \\ v_{,\eta} = 0 \\ \frac{1}{2} [v_{,\zeta} + w_{,\eta}] = 0 \\ w_{,\zeta} = 0 \end{array} \right.$$

– campo di spostamenti

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2} S_{\xi\eta} \eta \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2} S_{\xi\eta} \xi \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= 0; \end{aligned} \tag{3.20}$$

• $e_5 = S_{\xi\zeta}$: scorrimento nel piano $\xi\zeta$

– sistema associato

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{,\xi} = 0 \\ \frac{1}{2} [u_{,\eta} + v_{,\xi}] = 0 \\ \frac{1}{2} [u_{,\zeta} + w_{,\xi}] = S_{\xi\zeta} \\ v_{,\eta} = 0 \\ \frac{1}{2} [v_{,\zeta} + w_{,\eta}] = 0 \\ w_{,\zeta} = 0 \end{array} \right.$$

– campo di spostamenti

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2} S_{\xi\zeta} \zeta \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= 0 \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2} S_{\xi\zeta} \xi; \end{aligned} \tag{3.21}$$

- $e_6 = S_{\eta\zeta}$: scorrimento nel piano $\eta\zeta$

– sistema associato

$$\begin{cases} u_{,\xi} = 0 \\ \frac{1}{2} [u_{,\eta} + v_{,\xi}] = 0 \\ \frac{1}{2} [u_{,\zeta} + w_{,\xi}] = 0 \\ v_{,\eta} = 0 \\ \frac{1}{2} [v_{,\zeta} + w_{,\eta}] = S_{\eta\zeta} \\ w_{,\zeta} = 0 \end{cases}$$

– campo di spostamenti

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= 0 \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2} S_{\eta\zeta} \zeta \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2} S_{\eta\zeta} \eta; \end{aligned} \quad (3.22)$$

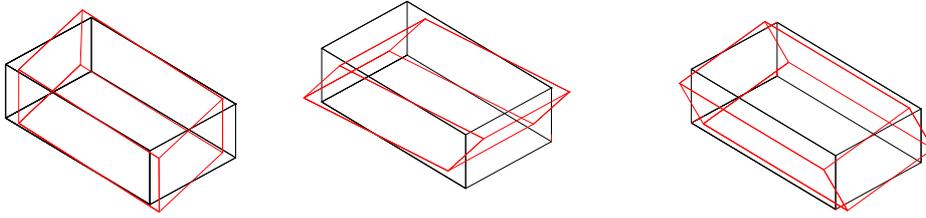


Fig. 3.5: Elemento finito tridimensionale ad otto nodi: rappresentazione degli scorrimenti nei piani $\xi\eta$, $\xi\zeta$ e $\eta\zeta$.

- $e_7 = T_\zeta$: torsione attorno all'asse ζ

– sistema associato

$$\begin{cases} u_{,\xi} = 0 \\ \frac{1}{2} [u_{,\eta} + v_{,\xi}] = \frac{1}{2} T_\zeta \zeta \\ \frac{1}{2} [u_{,\zeta} + w_{,\xi}] = 0 \\ v_{,\eta} = 0 \\ \frac{1}{2} [v_{,\zeta} + w_{,\eta}] = 0 \\ w_{,\zeta} = 0 \end{cases}$$

– campo di spostamenti

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2}T_\zeta\eta\zeta \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2}T_\zeta\xi\zeta \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= -\frac{1}{2}T_\zeta\xi\eta; \end{aligned} \tag{3.23}$$

- $e_8 = T_\eta$: torsione attorno all'asse η

– sistema associato

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{,\xi} = 0 \\ \frac{1}{2}[u_{,\eta} + v_{,\xi}] = 0 \\ \frac{1}{2}[u_{,\zeta} + w_{,\xi}] = \frac{1}{2}T_\eta\eta \\ v_{,\eta} = 0 \\ \frac{1}{2}[v_{,\zeta} + w_{,\eta}] = 0 \\ w_{,\zeta} = 0 \end{array} \right.$$

– campo di spostamenti

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2}T_\eta\eta\zeta \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= -\frac{1}{2}T_\eta\xi\zeta \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2}T_\eta\xi; \end{aligned} \tag{3.24}$$

- $e_9 = T_\xi$: torsione attorno all'asse ξ

– sistema associato

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{,\xi} = 0 \\ \frac{1}{2}[u_{,\eta} + v_{,\xi}] = 0 \\ \frac{1}{2}[u_{,\zeta} + w_{,\xi}] = 0 \\ v_{,\eta} = 0 \\ \frac{1}{2}[v_{,\zeta} + w_{,\eta}] = \frac{1}{2}T_\xi\xi \\ w_{,\zeta} = 0 \end{array} \right.$$

– campo di spostamenti

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= -\frac{1}{2}T_\xi\eta\zeta \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2}T_\xi\xi\zeta \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2}T_\xi\xi\eta; \end{aligned} \tag{3.25}$$

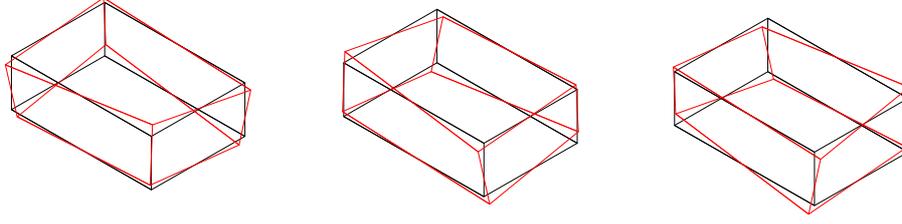


Fig. 3.6: Elemento finito tridimensionale ad otto nodi: rappresentazione delle torsioni attorno agli assi ζ , η e ξ .

- $e_{10} = H_{\xi\eta}$: clessidra nel piano $\xi\eta$ lungo ξ

– sistema associato

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{,\xi} = H_{\xi\eta}\eta \\ \frac{1}{2}[u_{,\eta} + v_{,\xi}] = \frac{1}{2}H_{\xi\eta}\xi \\ \frac{1}{2}[u_{,\zeta} + w_{,\xi}] = 0 \\ v_{,\eta} = 0 \\ \frac{1}{2}[v_{,\zeta} + w_{,\eta}] = 0 \\ w_{,\zeta} = 0 \end{array} \right.$$

– campo di spostamenti

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= H_{\xi\eta}\xi\eta \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= 0 \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= 0; \end{aligned} \tag{3.26}$$

- $e_{11} = H_{\eta\xi}$: clessidra nel piano $\xi\eta$ lungo η

– sistema associato

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{,\xi} = 0 \\ \frac{1}{2}[u_{,\eta} + v_{,\xi}] = \frac{1}{2}H_{\eta\xi}\eta \\ \frac{1}{2}[u_{,\zeta} + w_{,\xi}] = 0 \\ v_{,\eta} = H_{\eta\xi}\xi \\ \frac{1}{2}[v_{,\zeta} + w_{,\eta}] = 0 \\ w_{,\zeta} = 0 \end{array} \right.$$

– campo di spostamenti

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= 0 \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= H_{\eta\xi}\xi\eta \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= 0; \end{aligned} \tag{3.27}$$

- $e_{12} = H_{\xi\zeta}$: clessidra nel piano $\xi\zeta$ lungo ξ

– sistema associato

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{,\xi} = H_{\xi\zeta}\zeta \\ \frac{1}{2} [u_{,\eta} + v_{,\xi}] = 0 \\ \frac{1}{2} [u_{,\zeta} + w_{,\xi}] = \frac{1}{2} H_{\xi\zeta}\xi \\ v_{,\eta} = 0 \\ \frac{1}{2} [v_{,\zeta} + w_{,\eta}] = 0 \\ w_{,\zeta} = 0 \end{array} \right.$$

– campo di spostamenti

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= H_{\xi\zeta}\xi\zeta \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= 0 \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= 0; \end{aligned} \tag{3.28}$$

- $e_{13} = H_{\zeta\xi}$: clessidra nel piano $\xi\zeta$ lungo ζ

– sistema associato

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{,\xi} = 0 \\ \frac{1}{2} [u_{,\eta} + v_{,\xi}] = 0 \\ \frac{1}{2} [u_{,\zeta} + w_{,\xi}] = \frac{1}{2} H_{\zeta\xi}\xi \\ v_{,\eta} = 0 \\ \frac{1}{2} [v_{,\zeta} + w_{,\eta}] = 0 \\ w_{,\zeta} = H_{\zeta\xi}\xi \end{array} \right.$$

– campo di spostamenti

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= 0 \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= 0 \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= H_{\zeta\xi}\xi\zeta; \end{aligned} \tag{3.29}$$

- $e_{14} = H_{\eta\zeta}$: clessidra nel piano $\eta\zeta$ lungo η

– sistema associato

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{,\xi} = 0 \\ \frac{1}{2} [u_{,\eta} + v_{,\xi}] = 0 \\ \frac{1}{2} [u_{,\zeta} + w_{,\xi}] = 0 \\ v_{,\eta} = H_{\eta\zeta}\zeta \\ \frac{1}{2} [v_{,\zeta} + w_{,\eta}] = \frac{1}{2} H_{\eta\zeta}\eta \\ w_{,\zeta} = 0 \end{array} \right.$$

– campo di spostamenti

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= 0 \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= H_{\eta\zeta}\eta\zeta \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= 0; \end{aligned} \quad (3.30)$$

- $e_{15} = H_{\zeta\eta}$: clessidra nel piano $\eta\zeta$ lungo ζ

– sistema associato

$$\begin{cases} u, \xi = 0 \\ \frac{1}{2} [u, \eta + v, \xi] = 0 \\ \frac{1}{2} [u, \zeta + w, \xi] = 0 \\ v, \eta = 0 \\ \frac{1}{2} [v, \zeta + w, \eta] = \frac{1}{2} H_{\zeta\eta}\zeta \\ w, \zeta = H_{\zeta\eta}\eta \end{cases}$$

– campo di spostamenti

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= 0 \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= 0 \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= H_{\zeta\eta}\eta\zeta; \end{aligned} \quad (3.31)$$

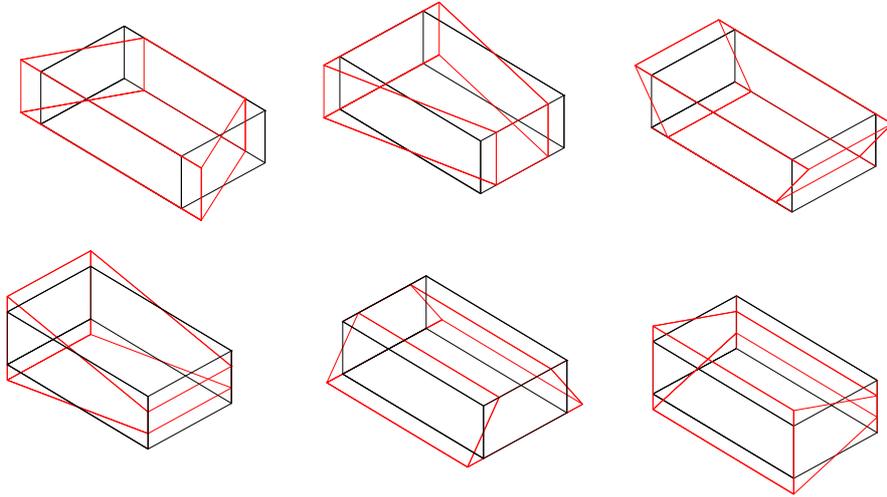


Fig. 3.7: Elemento finito tridimensionale ad otto nodi: rappresentazione delle clessidre.

- $e_{16} = DH_{\xi}$: doppia clessidra attorno all'asse ξ

– sistema associato

$$\begin{cases} u_{,\xi} = DH_{\xi}\eta\zeta \\ \frac{1}{2}[u_{,\eta} + v_{,\xi}] = \frac{1}{2}DH_{\xi}\xi\zeta \\ \frac{1}{2}[u_{,\zeta} + w_{,\xi}] = \frac{1}{2}DH_{\xi}\xi\eta \\ v_{,\eta} = 0 \\ \frac{1}{2}[v_{,\zeta} + w_{,\eta}] = 0 \\ w_{,\zeta} = 0 \end{cases}$$

– campo di spostamenti

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= DH_{\xi}\xi\eta\zeta \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= 0 \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= 0; \end{aligned} \tag{3.32}$$

- $e_{17} = DH_{\eta}$: doppia clessidra attorno all'asse η

– sistema associato

$$\begin{cases} u_{,\xi} = 0 \\ \frac{1}{2}[u_{,\eta} + v_{,\xi}] = \frac{1}{2}DH_{\eta}\eta\zeta \\ \frac{1}{2}[u_{,\zeta} + w_{,\xi}] = 0 \\ v_{,\eta} = DH_{\eta}\xi\zeta \\ \frac{1}{2}[v_{,\zeta} + w_{,\eta}] = \frac{1}{2}DH_{\eta}\xi\eta \\ w_{,\zeta} = 0 \end{cases}$$

– campo di spostamenti

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= 0 \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= DH_{\eta}\xi\eta\zeta \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= 0; \end{aligned} \tag{3.33}$$

- $e_{18} = DH_{\zeta}$: doppia clessidra attorno all'asse ζ

– sistema associato

$$\begin{cases} u_{,\xi} = 0 \\ \frac{1}{2}[u_{,\eta} + v_{,\xi}] = 0 \\ \frac{1}{2}[u_{,\zeta} + w_{,\xi}] = \frac{1}{2}DH_{\zeta}\eta\zeta \\ v_{,\eta} = 0 \\ \frac{1}{2}[v_{,\zeta} + w_{,\eta}] = \frac{1}{2}DH_{\zeta}\xi\zeta \\ w_{,\zeta} = DH_{\zeta}\xi\eta \end{cases}$$

– campo di spostamenti

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= 0 \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= 0 \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= DH_\zeta \xi \eta \zeta; \end{aligned} \quad (3.34)$$

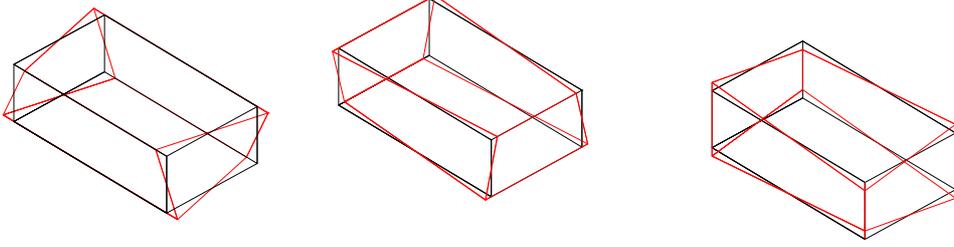


Fig. 3.8: Elemento finito tridimensionale ad otto nodi: rappresentazione delle doppie clessidre.

3.3 Definizione degli invarianti deformativi

Dopo aver indicato le scelte dei modi e aver caratterizzato ognuno di essi attraverso l'individuazione di un parametro deformativo, ora si vogliono determinare delle relazioni che permettano il passaggio dalla rappresentazione cartesiana dell'elemento ad una descrizione tramite i parametri cinematici dell'elemento, senza passare attraverso formulazioni di tipo corotazionale.

Per fare questo, si consideri una generica configurazione deformata dell'elemento. Per ogni modo deformativo si vuole individuare una grandezza avente le seguenti caratteristiche: è diversa da zero se sul corpo agisce il modo deformativo a cui essa rimane associata, mentre è nulla se questo modo non viene attivato, e, inoltre, il suo valore risulta indipendente dalla presenza dei moti rigidi. Così, una siffatta misura risulta univocamente associata ad un modo deformativo e, inoltre, rende i contributi al tensore delle deformazioni fra loro indipendenti e pertanto sommabili.

La misura appena descritta, che sarà chiamata *invariante deformativa*, rappresenta una distanza relativa fra punti nella generica configurazione deformata e risulta dipendente dai parametri cinematici dell'elemento.

Nel seguito ci si riferirà alla distanza euclidea fra i punti p_i, p_j dell'elemento nella configurazione generica con

$$\mathfrak{D}(p_i, p_j) = \sqrt{[\xi_i^p + u_i^p - \xi_j^p - u_j^p]^2 + [\eta_i^p + v_i^p - \eta_j^p - v_j^p]^2 + [\zeta_i^p + w_i^p - \zeta_j^p - w_j^p]^2} \quad (3.35)$$

dove ξ_i^p, η_i^p e ζ_i^p sono, rispettivamente, le coordinate iniziali ξ, η e ζ dei punti p_i e u_i^p, v_i^p e w_i^p sono i rispettivi spostamenti.

3.3.1 Elemento finito bidimensionale a quattro nodi

Si illustrerà ora come è possibile determinare gli invarianti deformativi; per semplicità ci si riferirà al caso, comunque esaustivo, dell'allungamento in direzione ξ .

Si consideri (Fig. 3.9) la distanza $\mathfrak{D}(m_{13}, m_{24})$ tra i punti medi m_{13} e m_{24} dei segmenti congiungenti, rispettivamente, i nodi n_1 e n_3 ed i nodi n_2 e n_4 .

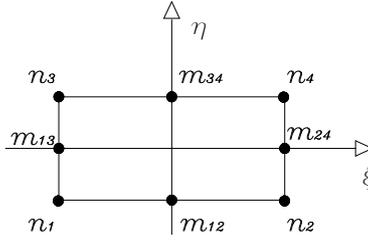


Fig. 3.9: Elemento finito bidimensionale a quattro nodi: definizione dei punti.

Si osserva che questa distanza è invariante, al primo ordine di approssimazione, per i modi deformativi di tipo: allungamento in direzione η , scorrimento S e clessidre in direzione ξ e η come mostrato, rispettivamente, nelle Fig. 3.10(a), Fig. 3.10(b), Fig. 3.10(c) e Fig. 3.10(d). La distanza selezionata $\mathfrak{D}(m_{13}, m_{24})$, di fatto, cambia solo se la configurazione deformata dell'elemento coinvolge anche il modo deformativo di tipo allungamento in direzione ξ (Fig. 3.10(e)).

Si definisce, allora, invariante $\mathfrak{J}E_\xi$ associato al modo deformativo di tipo allungamento in direzione ξ la quantità:

$$\mathfrak{J}E_\xi = \mathfrak{D}(m_{13}, m_{24}) - 2h_\xi. \quad (3.36)$$

Essa soddisfa le due richieste dell'invariante, ovvero è nulla se non viene attivato l'allungamento in direzione ξ , mentre varia se esso viene attivato. Inoltre, essendo per definizione la differenza tra la distanza attuale $\mathfrak{D}(m_{13}, m_{24})$ e quella iniziale $2h_\xi$, non risente della presenza dei moti rigidi ed indica esattamente anche la misura dell'allungamento nella direzione ξ subito dall'elemento, ovvero:

$$\mathfrak{J}E_\xi = 2E_\xi h_\xi. \quad (3.37)$$

Dall'uguaglianza delle due equazioni (3.36) e (3.37) è allora possibile esprimere il parametro deformativo in termini di parametri cinematici dell'elemento.

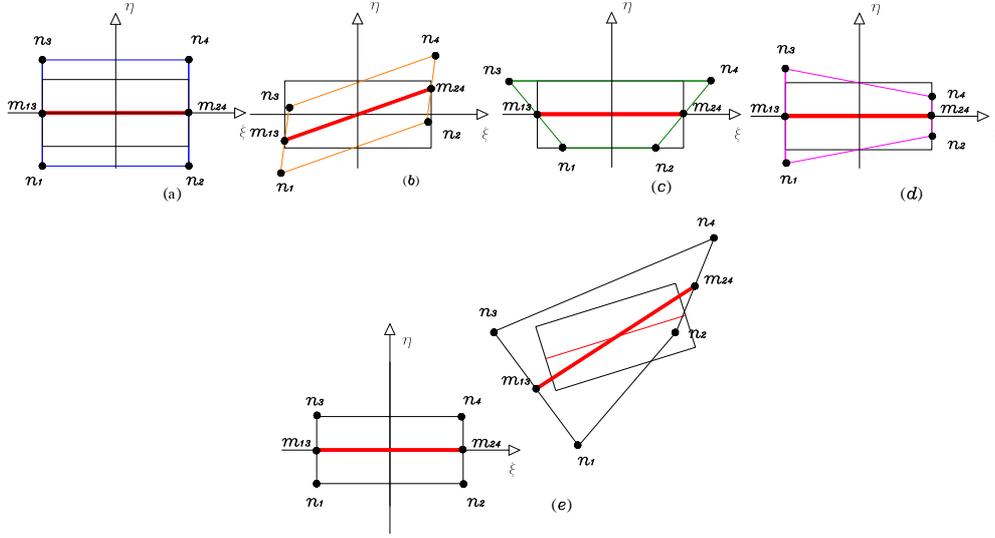


Fig. 3.10: Elemento finito bidimensionale a quattro nodi: costruzione dell'invariante deformativo $\mathfrak{J}E_\xi$.

In modo simile a quanto fatto per il modo di tipo allungamento, anche per gli altri modi deformativi è possibile determinare delle grandezze invarianti. Quello che si è ottenuto è sintetizzato nell'elenco che segue:

- allungamento in direzione ξ :

$$\mathfrak{J}E_\xi = \mathfrak{D}(m_{13}, m_{24}) - 2h_\xi, \quad E_\xi = \frac{\mathfrak{J}E_\xi}{2h_\xi};$$

- allungamento in direzione η :

$$\mathfrak{J}E_\eta = \mathfrak{D}(m_{12}, m_{34}) - 2h_\eta, \quad E_\eta = \frac{\mathfrak{J}E_\eta}{2h_\eta};$$

- scorrimento:

$$\mathfrak{J}S = \mathfrak{D}(n_1, n_4) - \mathfrak{D}(n_2, n_3), \quad S = \frac{\mathfrak{J}S \sqrt{(h_\xi)^2 + (h_\eta)^2}}{8h_\eta h_\xi};$$

- clessidra in direzione ξ :

$$\mathfrak{J}H_\xi = \mathfrak{D}(n_1, n_2) - \mathfrak{D}(n_3, n_4), \quad H_\xi = \frac{\mathfrak{J}H_\xi}{4h_\xi h_\eta};$$

- clessidra in direzione η :

$$\mathfrak{J}H_\eta = \mathfrak{D}(n_1, n_3) - \mathfrak{D}(n_2, n_4), \quad H_\eta = \frac{\mathfrak{J}H_\eta}{4h_\eta h_\xi};$$

3.3.2 Elemento finito tridimensionale ad otto nodi

In questa sezione si estendono, al caso tridimensionale, le definizioni delle grandezze invarianti date nel paragrafo precedente, riferendosi all'elemento finito in cui g_i è il punto centrale dell' i -sima faccia (Fig. 3.11).

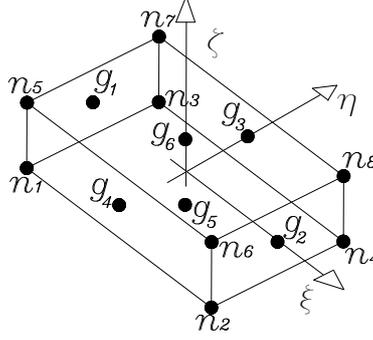


Fig. 3.11: Elemento finito tridimensionale a otto nodi: definizione dei punti.

I parametri deformativi considerati sono quelli definiti nel paragrafo 3.2. Di seguito sono schematizzati per gruppi di deformazione, le definizioni degli invarianti e le espressioni dei parametri deformativi in loro dipendenza.

- Invarianti deformativi associati ai modi deformativi di tipo allungamento:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}E_\xi &= \mathfrak{D}(g_1, g_2) - 2h_\xi, & E_\xi &= \frac{\mathfrak{J}E_\xi}{2h_\xi}; \\ \mathfrak{J}E_\eta &= \mathfrak{D}(g_3, g_4) - 2h_\eta, & E_\eta &= \frac{\mathfrak{J}E_\eta}{2h_\eta}; \\ \mathfrak{J}E_\zeta &= \mathfrak{D}(g_5, g_6) - 2h_\zeta, & E_\zeta &= \frac{\mathfrak{J}E_\zeta}{2h_\zeta}. \end{aligned}$$

- Invarianti deformativi associati ai modi deformativi di tipo scorrimento:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}S_{\xi\eta} &= \mathfrak{D}(n_1, n_4) + \mathfrak{D}(n_5, n_8) - \mathfrak{D}(n_2, n_3) - \mathfrak{D}(n_6, n_7), & S_{\xi\eta} &= \frac{\mathfrak{J}S_{\xi\eta}\sqrt{(h_\xi)^2 + (h_\eta)^2}}{16h_\xi h_\eta}; \\ \mathfrak{J}S_{\xi\zeta} &= \mathfrak{D}(n_1, n_6) + \mathfrak{D}(n_3, n_8) - \mathfrak{D}(n_2, n_5) - \mathfrak{D}(n_4, n_7), & S_{\xi\zeta} &= \frac{\mathfrak{J}S_{\xi\zeta}\sqrt{(h_\xi)^2 + (h_\zeta)^2}}{16h_\xi h_\zeta}; \\ \mathfrak{J}S_{\eta\zeta} &= \mathfrak{D}(n_2, n_8) + \mathfrak{D}(n_1, n_7) - \mathfrak{D}(n_4, n_6) - \mathfrak{D}(n_3, n_5), & S_{\eta\zeta} &= \frac{\mathfrak{J}S_{\eta\zeta}\sqrt{(h_\eta)^2 + (h_\zeta)^2}}{16h_\eta h_\zeta}. \end{aligned}$$

- Invarianti deformativi associati ai modi deformativi di tipo torsione:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}T_\zeta &= \mathfrak{D}(n_2, n_3) + \mathfrak{D}(n_5, n_8) - \mathfrak{D}(n_1, n_4) - \mathfrak{D}(n_6, n_7), & T_\zeta &= \frac{\mathfrak{J}T_\zeta\sqrt{(h_\xi)^2 + (h_\eta)^2}}{16h_\xi h_\eta h_\zeta}; \\ \mathfrak{J}T_\eta &= \mathfrak{D}(n_2, n_5) + \mathfrak{D}(n_3, n_8) - \mathfrak{D}(n_1, n_6) - \mathfrak{D}(n_4, n_7), & T_\eta &= \frac{\mathfrak{J}T_\eta\sqrt{(h_\xi)^2 + (h_\zeta)^2}}{16h_\xi h_\eta h_\zeta}; \\ \mathfrak{J}T_\xi &= \mathfrak{D}(n_2, n_8) + \mathfrak{D}(n_3, n_5) - \mathfrak{D}(n_1, n_7) - \mathfrak{D}(n_4, n_6), & T_\xi &= \frac{\mathfrak{J}T_\xi\sqrt{(h_\eta)^2 + (h_\zeta)^2}}{16h_\xi h_\eta h_\zeta}. \end{aligned}$$

- Invarianti deformativi associati ai modi deformativi di tipo doppia clessidra:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}H_{\xi\eta} &= \mathfrak{D}(n_3, n_4) + \mathfrak{D}(n_7, n_8) - \mathfrak{D}(n_1, n_2) - \mathfrak{D}(n_5, n_6), & H_{\xi\eta} &= \frac{\mathfrak{J}H_{\xi\eta}}{8h_\xi h_\eta}; \\
\mathfrak{J}H_{\eta\xi} &= \mathfrak{D}(n_2, n_4) + \mathfrak{D}(n_6, n_8) - \mathfrak{D}(n_1, n_3) - \mathfrak{D}(n_5, n_7), & H_{\eta\xi} &= \frac{\mathfrak{J}H_{\eta\xi}}{8h_\xi h_\eta}; \\
\mathfrak{J}H_{\xi\zeta} &= \mathfrak{D}(n_5, n_6) + \mathfrak{D}(n_7, n_8) - \mathfrak{D}(n_1, n_2) - \mathfrak{D}(n_3, n_4), & H_{\xi\zeta} &= \frac{\mathfrak{J}H_{\xi\zeta}}{8h_\xi h_\zeta}; \\
\mathfrak{J}H_{\zeta\xi} &= \mathfrak{D}(n_2, n_6) + \mathfrak{D}(n_4, n_8) - \mathfrak{D}(n_1, n_5) - \mathfrak{D}(n_3, n_7), & H_{\zeta\xi} &= \frac{\mathfrak{J}H_{\zeta\xi}}{8h_\xi h_\zeta}; \\
\mathfrak{J}H_{\eta\zeta} &= \mathfrak{D}(n_5, n_7) + \mathfrak{D}(n_6, n_8) - \mathfrak{D}(n_1, n_3) - \mathfrak{D}(n_2, n_4), & H_{\eta\zeta} &= \frac{\mathfrak{J}H_{\eta\zeta}}{8h_\eta h_\zeta}; \\
\mathfrak{J}H_{\zeta\eta} &= \mathfrak{D}(n_3, n_7) + \mathfrak{D}(n_4, n_8) - \mathfrak{D}(n_1, n_5) - \mathfrak{D}(n_2, n_6), & H_{\zeta\eta} &= \frac{\mathfrak{J}H_{\zeta\eta}}{8h_\eta h_\zeta}.
\end{aligned}$$

- Invarianti deformativi associati ai modi deformativi di tipo clessidra:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}DH_\xi &= \mathfrak{D}(n_1, n_2) + \mathfrak{D}(n_7, n_8) - \mathfrak{D}(n_3, n_4) - \mathfrak{D}(n_5, n_6), & DH_\xi &= \frac{\mathfrak{J}DH_\xi}{8h_\xi h_\eta h_\zeta}; \\
\mathfrak{J}DH_\eta &= \mathfrak{D}(n_1, n_3) + \mathfrak{D}(n_6, n_8) - \mathfrak{D}(n_2, n_4) - \mathfrak{D}(n_5, n_7), & DH_\eta &= \frac{\mathfrak{J}DH_\eta}{8h_\xi h_\eta h_\zeta}; \\
\mathfrak{J}DH_\zeta &= \mathfrak{D}(n_1, n_5) + \mathfrak{D}(n_4, n_8) - \mathfrak{D}(n_2, n_6) - \mathfrak{D}(n_3, n_7), & DH_\zeta &= \frac{\mathfrak{J}DH_\zeta}{8h_\xi h_\eta h_\zeta}.
\end{aligned}$$

La definizione degli invarianti per ogni modo deformativo può essere ottenuta dall'analisi di tutte le distanze tra i punti dell'elemento. Tuttavia, un processo inverso può essere comunque percorribile. Infatti, le espressioni degli invarianti possono essere fissate a priori come funzioni degli spostamenti nodali. Per ottenere, poi, il campo di spostamenti per ogni invariante, si definisce un sistema lineare ottenuto richiedendo che per ogni fissato invariante vengano soddisfatte le sue due caratteristiche. In tal senso, l'approccio risulta sistematico ed acquisisce generalità se applicato agli elementi isoparametrici.

3.4 Contributi al tensore delle deformazioni

Dopo aver definito le cinematiche di base ed individuato gli invarianti deformativi che permettono di ritornare alla formulazione dei parametri cinematici, il passo successivo è quello di calcolare il tensore delle deformazioni. Avendo reso i modi deformativi fra loro indipendenti, le componenti del tensore delle deformazioni sono ottenute sommando i contributi di ogni singolo modo deformativo. Inoltre, è possibile limitarsi alla scelta dei soli contributi lineari poiché le componenti non lineari vengono recuperate tramite le definizioni dei parametri deformativi come funzione degli invarianti.

Nel caso bidimensionale l'espressione del tensore delle deformazioni in

funzione dei parametri deformativi, pertanto, risulta:

$$\begin{cases} \varepsilon_{\xi\xi} = E_{\xi} + H_{\xi}\eta \\ \varepsilon_{\xi\eta} = \varepsilon_{\eta\xi} = \frac{1}{2}H_{\xi}\xi + \frac{1}{2}H_{\eta}\eta + S \\ \varepsilon_{\eta\eta} = E_{\eta} + H_{\eta}\xi \end{cases} \quad (3.38)$$

mentre nel caso tridimensionale si ha:

$$\begin{cases} \varepsilon_{\xi\xi} = E_{\xi} + H_{\xi\eta}\eta + H_{\xi\zeta}\zeta + DH_{\xi}\eta\zeta \\ \varepsilon_{\xi\eta} = \varepsilon_{\eta\xi} = \frac{1}{2}H_{\xi\eta}\xi + \frac{1}{2}H_{\eta\xi}\eta + S_{\xi\eta} + \frac{1}{2}DH_{\xi}\xi\zeta + \frac{1}{2}DH_{\eta}\eta\zeta + T_{\zeta}\zeta \\ \varepsilon_{\xi\zeta} = \varepsilon_{\zeta\xi} = \frac{1}{2}H_{\xi\zeta}\xi + \frac{1}{2}H_{\zeta\xi}\zeta + S_{\xi\zeta} + \frac{1}{2}DH_{\xi}\xi\eta + \frac{1}{2}DH_{\zeta}\eta\zeta + T_{\eta}\eta \\ \varepsilon_{\eta\eta} = E_{\eta} + H_{\eta\xi}\xi + H_{\eta\zeta}\zeta + DH_{\eta}\xi\zeta \\ \varepsilon_{\eta\zeta} = \varepsilon_{\zeta\eta} = \frac{1}{2}H_{\eta\zeta}\eta + \frac{1}{2}H_{\zeta\eta}\zeta + S_{\eta\zeta} + \frac{1}{2}DH_{\eta}\xi\eta + \frac{1}{2}DH_{\zeta}\xi\zeta + T_{\xi}\xi \\ \varepsilon_{\zeta\zeta} = E_{\zeta} + H_{\zeta\xi}\xi + H_{\zeta\eta}\eta + DH_{\zeta}\xi\eta. \end{cases} \quad (3.39)$$

Nelle formulazioni (3.38) e (3.39) compaiono in modo esplicito i contributi attivati da ogni deformazione. Questa formulazione risulta molto vantaggiosa poiché rende possibile il controllo degli effetti di locking. In particolare, nelle analisi effettuate, al fine di eliminare questi effetti, si è deciso di omettere i contributi delle clessidre nelle componenti taglianti del tensore delle deformazioni, ottenendo per il caso bidimensionale:

$$\begin{cases} \varepsilon_{\xi\xi} = E_{\xi} + H_{\xi}\eta \\ \varepsilon_{\xi\eta} = \varepsilon_{\eta\xi} = S \\ \varepsilon_{\eta\eta} = E_{\eta} + H_{\eta}\xi \end{cases} \quad (3.40)$$

e per quello tridimensionale:

$$\begin{cases} \varepsilon_{\xi\xi} = E_{\xi} + H_{\xi\eta}\eta + H_{\xi\zeta}\zeta + DH_{\xi}\eta\zeta \\ \varepsilon_{\xi\eta} = \varepsilon_{\eta\xi} = S_{\xi\eta} + \frac{1}{2}DH_{\xi}\xi\zeta + \frac{1}{2}DH_{\eta}\eta\zeta + T_{\zeta}\zeta \\ \varepsilon_{\xi\zeta} = \varepsilon_{\zeta\xi} = S_{\xi\zeta} + \frac{1}{2}DH_{\xi}\xi\eta + \frac{1}{2}DH_{\zeta}\eta\zeta + T_{\eta}\eta \\ \varepsilon_{\eta\eta} = E_{\eta} + H_{\eta\xi}\xi + H_{\eta\zeta}\zeta + DH_{\eta}\xi\zeta \\ \varepsilon_{\eta\zeta} = \varepsilon_{\zeta\eta} = S_{\eta\zeta} + \frac{1}{2}DH_{\eta}\xi\eta + \frac{1}{2}DH_{\zeta}\xi\zeta + T_{\xi}\xi \\ \varepsilon_{\zeta\zeta} = E_{\zeta} + H_{\zeta\xi}\xi + H_{\zeta\eta}\eta + DH_{\zeta}\xi\eta. \end{cases} \quad (3.41)$$

Determinato il nuovo tensore delle deformazioni, (3.40) per il caso bidimensionale e (3.41) per quello tridimensionale, il passo successivo è sostituire le espressioni ottenute nella formulazione dell'energia potenziale. Infine, procedendo con l'analisi dinamica si è osservato che con questa nuova

espressione del tensore delle deformazioni il costo computazionale richiesto, in termini di allocazione di memoria e tempo di calcolo, risulta molto piccolo e ridotto di circa un terzo se confrontato con quello richiesto dalla classica formulazione non lineare completa.

3.5 Risultati numerici

In questo paragrafo sono presentati alcuni test effettuati con la nuova formulazione, sia in ambito bidimensionale che tridimensionale.

3.5.1 L-shaped block

Si ripropone il moto dell' L-shaped block già analizzato nel paragrafo 2.3.1. In questo caso, a differenza di quanto già fatto precedentemente, si è effettuata l'analisi scegliendo due valori del modulo di Young $E = 10^7 N/m^2$ e $E = 10^4 N/m^2$, nel seguito ci si riferirà alla prima scelta indicandola col termine quasi-rigido e alla seconda con il termine morbida.

In Fig. 3.12 è mostrata una sequenza di deformate plottate ogni secondo per il caso quasi-rigido, mentre Fig. 3.13 indica le deformate ottenute nel caso morbido. I risultati ottenuti sono simili a quelli riportati in Betsch e Steinmann [7] e Lopez e Russo [28] ottenuti con formulazioni differenti.

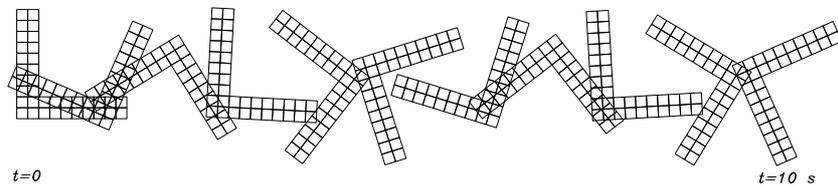


Fig. 3.12: L-shaped block $E = 10^7 N/m^2$: sequenza di deformate nel caso quasi-rigido.

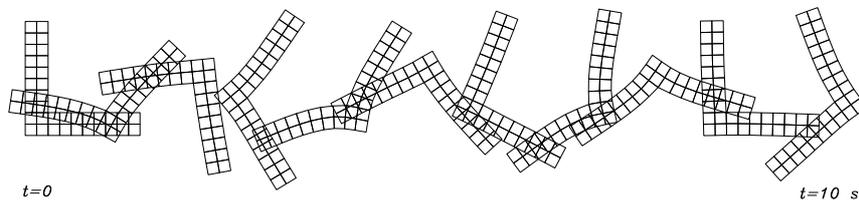


Fig. 3.13: L-shaped block $E = 10^4 N/m^2$: sequenza di deformate nel caso morbido.

3.5.2 Toss rule nel piano

In questa sezione si analizza il moto di una piastrina discretizzata attraverso 30 elementi tridimensionali ad otto nodi. Le costanti materiali utilizzate sono $E = 2.06 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\nu = 0$ e $\rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. La geometria, la posizione e l'andamento dei carichi esterni p sono indicate in Fig. 3.14. In Fig. 3.15 è mostrata una sequenza di deformate plottate nell'intervallo di tempo $[0 \text{ s}, 0.1 \text{ s}]$. I risultati ottenuti sono simili a quelli ottenuti da Kuhl e Ramm [20] utilizzando elementi 8-node shell e da Lopez e Russo [28] utilizzando un elemento piano a sei nodi.

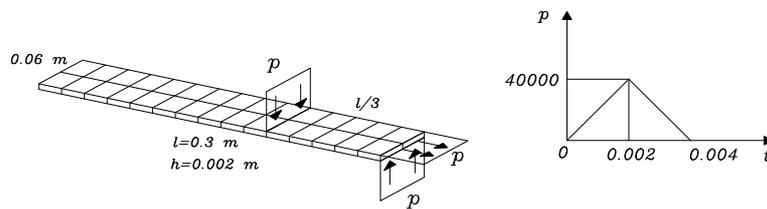


Fig. 3.14: Toss rule nel piano: configurazione iniziale, mesh, andamento dei carichi esterni.

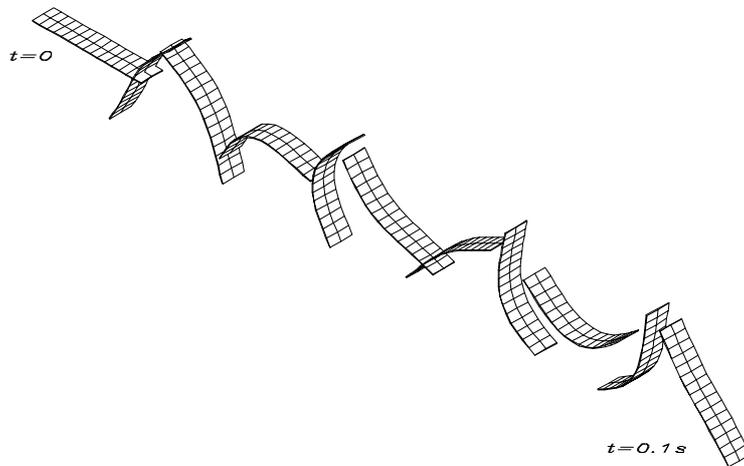


Fig. 3.15: Toss rule nel piano: sequenza di deformate.

3.5.3 Toss rule nello spazio

La stessa piastrina dell'esempio precedente è ora sollecitata in modo da muoversi nello spazio. La posizione dei carichi p e l'andamento sono mostrati in Fig. 3.16. In Fig. 3.17 è mostrata una sequenza di deformate nell'inter-

vallo di tempo $[0 s, 0.4 s]$ ed esse sono confrontabili con quelle riportate da Kuhl e Ramm [20, 21].

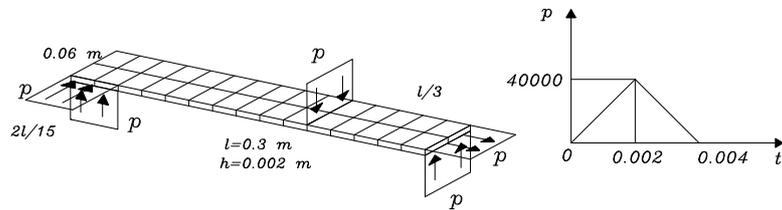


Fig. 3.16: Toss rule nello spazio: configurazione iniziale, mesh, andamento dei carichi esterni.

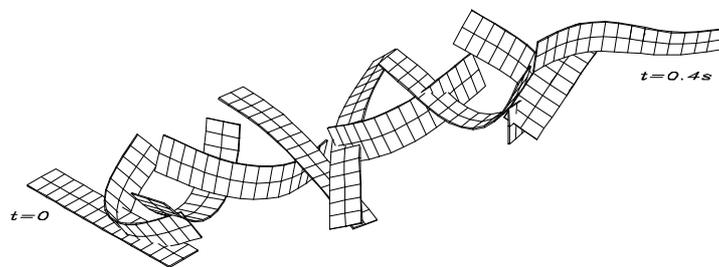


Fig. 3.17: Toss rule nello spazio: sequenza di deformate.

Capitolo 4

Analisi di un modello non lineare di trave alla Timoshenko con il metodo delle scale multiple

La ricerca si riferisce all'analisi di strutture di travi con modellizzazione alla Timoshenko.

In letteratura, nell'ambito delle soluzioni con il metodo delle scale multiple, tale modello non è stato affrontato poiché presenta maggiori difficoltà analitiche e numeriche. Tali difficoltà risiedono, principalmente, nell'introduzione della deformazione tagliante, che implica una risoluzione di due equazioni differenziali alle derivate parziali relative, rispettivamente, allo spostamento trasversale ed alla rotazione della sezione. Chiaramente, la complessità è dovuta alla non linearità geometrica, introdotta dallo sforzo membranale derivante dagli spostamenti assiali. In effetti, soluzioni analitiche e numeriche derivanti dall'applicazione del metodo delle scale multiple risultano più semplici per equazioni (anche se del 4° ordine) comprendenti solo sforzo flessionale. Lo scopo è, dunque, quello di indagare le potenzialità del metodo delle scale multiple in problemi di equazioni accoppiate alle derivate parziali per ottenere in forma analitica la soluzione di un modello di trave alla Timoshenko per grandi spostamenti.

In questo capitolo, dapprima, è data una formulazione non lineare per descrivere il moto piano di una trave. Poi, mediante la tecnica delle scale multiple, sono ottenuti una serie di sistemi delle equazioni del moto, ognuno relativo al generico ordine perturbativo. Infine, è analizzato il caso del sistema al primo ordine.

4.1 Equazioni del moto

Si consideri una trave di materiale iperelastico omogeneo. Si indichino con \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) i vettori unitari ortonormali del sistema di riferimento inerziale nello spazio Euclideo \mathbb{E}^3 . La posizione del punto materiale lungo l'asse della trave è data da: $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1$ dove x indica la coordinata lungo l'asse della trave nella configurazione indeformata \mathcal{C}_0 e varia nel supporto compatto $\mathcal{D} := \{x | x \in [0, L]\}$ con L lunghezza della trave.

La generica sezione nella configurazione di riferimento \mathcal{C}_0 è individuata da una coppia di vettori ortonormali \mathbf{a}_2 ed \mathbf{a}_3 , tali che $\mathbf{a}_1 := \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$ e per cui risulta che la terna $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ è una base ortonormale.

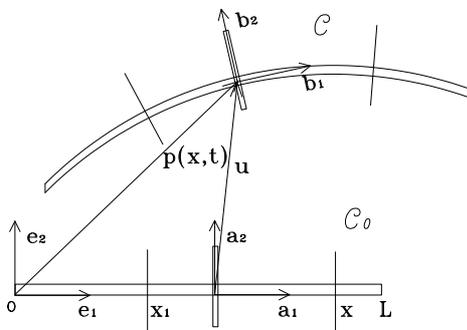


Fig. 4.1: Configurazione indeformata \mathcal{C}_0 e generica \mathcal{C} della trave.

Si indichi con $\mathbf{u} := u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2$ il vettore che individua lo spostamento dalla configurazione di riferimento \mathcal{C}_0 alla configurazione deformata \mathcal{C} . Allora, una generica sezione della configurazione deformata è individuata dal vettore di posizione $\mathbf{p}(x, t) := \mathbf{x} + \mathbf{u}$ e da una coppia di direzioni ortonormali $\mathbf{b}_2(x, t)$ e $\mathbf{b}_3(x, t)$ ($\mathbf{b}_1 := \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3$). Le direzioni \mathbf{b}_i ($i = 1, 2$) sono ottenute da \mathbf{a}_i attraverso rotazioni finite attorno all'asse \mathbf{a}_3 descritte tramite il tensore ortogonale di rotazione $\mathbf{R}(x, t)$, ristretto al piano individuato da \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 . Pertanto \mathbf{b}_i può essere espresso come segue: $\mathbf{b}_i = \mathbf{R}\mathbf{a}_i$, ovvero $\mathbf{R}\mathbf{a}_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta))^T$ e $\mathbf{R}\mathbf{a}_2 = (-\sin(\theta), \cos(\theta))^T$.

Per ottenere il modello meccanico è necessario imporre le condizioni di equilibrio della quantità di moto e del momento della quantità di moto. Pertanto, siano:

$$\begin{cases} \nu := (1 + u_x) \cos \theta + v_x \sin \theta \\ \eta := (1 + u_x)(-\sin \theta) + v_x \cos \theta \\ \mu := \theta_x \end{cases} \quad (4.1)$$

rispettivamente, la dilatazione lineare, lo scorrimento angolare e la curvatu-

ra elastica. Siano, inoltre, $\mathbf{p}_x := (1 + u_x)\mathbf{e}_1 + v_x\mathbf{e}_2$ la derivata del vettore di posizione, $\mathbf{f}(x, t)$ la densità di forze distribuite per unità di lunghezza, $\mathbf{n} := N(x, t)\mathbf{b}_1 + H(x, t)\mathbf{b}_2$ la forza di contatto ed $\mathbf{m} := M(x, t)\mathbf{e}_3$ la coppia, mutuamente esercitate da due sezioni adiacenti, dove N e H indicano rispettivamente lo sforzo assiale e il taglio ed M il momento flettente.

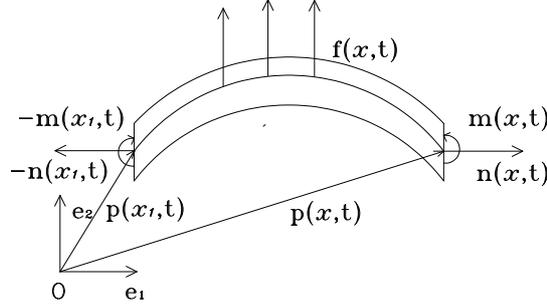


Fig. 4.2:

Utilizzando la prima legge del moto, si procede al bilanciamento della quantità di moto. Si impone, quindi, che la risultante delle forze interne ed esterne sia uguale alla variazione nel tempo della quantità di moto:

$$-\mathbf{n}(x_1, t) + \mathbf{n}(x, t) + \int_{x_1}^x \mathbf{f}(\xi, t) d\xi = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^x \rho A \mathbf{p}_t d\xi.$$

Riscrivendo i primi due addendi sotto forma di integrale si ha:

$$\int_{x_1}^x \frac{d\mathbf{n}}{d\xi} d\xi + \int_{x_1}^x \mathbf{f}(\xi, t) d\xi = \int_{x_1}^x \rho A \mathbf{p}_{tt} d\xi.$$

Poiché tale identità deve essere verificata $\forall [x_1, x] \subset [0, L]$ ne segue che:

$$\frac{d\mathbf{n}}{dx} + \mathbf{f} = \rho A \mathbf{p}_{tt}. \quad (4.2)$$

Si procede, poi, al bilanciamento del momento della quantità di moto. Inizialmente non si considerano gli aspetti legati all'inerzia rotatoria.

La risultante dei momenti delle forze rispetto al polo scelto O è:

$$\mathbf{p}(x_1, t) \times (-\mathbf{n}(x_1, t)) + \mathbf{p}(x, t) \times (-\mathbf{n}(x, t)) - \mathbf{m}(x_1, t) + \mathbf{m}(x, t) + \int_{x_1}^x [\mathbf{p}(\xi, t) \times \mathbf{f}(\xi, t)] d\xi,$$

che può essere riscritta come:

$$\int_{x_1}^x (\mathbf{p} \times \mathbf{n})_\xi d\xi + \int_{x_1}^x \mathbf{m}_\xi d\xi + \int_{x_1}^x \mathbf{p} \times \mathbf{f} d\xi,$$

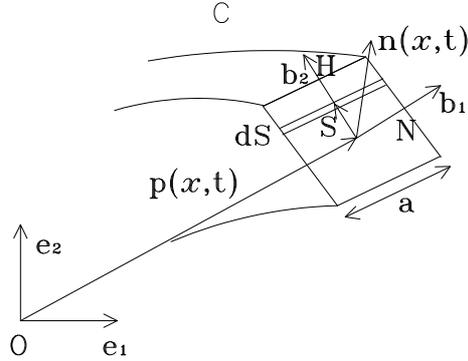


Fig. 4.3: Sezione piana della trave

e ancora:

$$\int_{x_1}^x [\mathbf{p} \times (\mathbf{n}_\xi + \mathbf{f})] d\xi + \int_{x_1}^x [(\mathbf{p}_\xi \times \mathbf{n}) + \mathbf{m}_\xi] d\xi.$$

Utilizzando l'espressione ottenuta nella (4.2) per il primo addendo, si ha:

$$\int_{x_1}^x \mathbf{p} \times (\rho A \mathbf{p}_{tt}) d\xi + \int_{x_1}^x [(\mathbf{p}_\xi \times \mathbf{n}) + \mathbf{m}_\xi] d\xi.$$

Questa risultante deve essere uguale alla variazione nel tempo del momento della quantità di moto, ovvero a:

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{x_1}^x \mathbf{p} \times (\rho A \mathbf{p}_t) d\xi \right].$$

Uguagliando le due espressioni ottenute ne segue che:

$$\int_{x_1}^x \mathbf{p} \times (\rho A \mathbf{p}_{tt}) d\xi + \int_{x_1}^x [(\mathbf{p}_\xi \times \mathbf{n}) + \mathbf{m}_\xi] d\xi = \frac{d}{dt} \left[\int_{x_1}^x \mathbf{p} \times (\rho A \mathbf{p}_t) d\xi \right],$$

da cui:

$$(\mathbf{p}_x \times \mathbf{n}) + \mathbf{m}_x = \mathbf{0}. \quad (4.3)$$

Si considerino ora gli aspetti dell'inerzia rotatoria. La risultante dei momenti rimane invariata, pertanto bisogna calcolare soltanto il momento della quantità di moto di un punto generico.

La posizione di un punto generico sulla trave può essere individuata, come mostra la Fig. 4.1, dal vettore $\mathbf{p}(S, x, t) = \mathbf{p}(x, t) + S\mathbf{b}_2$, quindi il suo momento risultante sarà:

$$\tau = \rho(adS)dx(\mathbf{p}_t + S\mathbf{b}_{2t}).$$

Ricordando che

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_2 &= -\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{b}_{2t} &= -\dot{\theta}\cos\theta\mathbf{e}_1 - \dot{\theta}\sin\theta\mathbf{e}_2 = -\dot{\theta}\mathbf{b}_1, \\ \tau &= \rho adSdx(\mathbf{p}_t - \dot{\theta}S\mathbf{b}_1),\end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(S, x, t) \times \rho adSdx(\mathbf{p}_t - \dot{\theta}S\mathbf{b}_1) &= \rho adSdx[(\mathbf{p} + S\mathbf{b}_2) \times (\mathbf{p}_t - \dot{\theta}S\mathbf{b}_1)] \\ &= \rho adSdx[(\mathbf{p} \times \mathbf{p}_t) - (\mathbf{p} \times \dot{\theta}S\mathbf{b}_1) + (S\mathbf{b}_2 \times \mathbf{p}_t) - (S^2\dot{\theta}\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_1)] \\ &= \rho adSdx[(\mathbf{p} \times \mathbf{p}_t) - \dot{\theta}S(\mathbf{p} \times \mathbf{b}_1) + S(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{p}_t) - S^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3].\end{aligned}$$

Analogamente a quanto fatto in precedenza, si calcola la variazione nel tempo del momento della quantità di moto:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt} \left[\int_{x_1}^x \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{p} \times \rho a(\mathbf{p}_t - \dot{\theta}S\mathbf{b}_1) dS d\xi \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_{x_1}^x \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho a [(\mathbf{p} \times \mathbf{p}_t) - \dot{\theta}S(\mathbf{p} \times \mathbf{b}_1) + S(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{p}_t) - S^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3] dS d\xi \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \int_{x_1}^x \left[\rho A(\mathbf{p} \times \mathbf{p}_t) + \dot{\theta} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} S^2 \rho a dS \mathbf{e}_3 \right] d\xi \\ &= \frac{d}{dt} \int_{x_1}^x [\rho A(\mathbf{p} \times \mathbf{p}_t) + \rho \dot{\theta} J \mathbf{e}_3] d\xi \\ &= \int_{x_1}^x [\rho A(\mathbf{p} \times \mathbf{p}_{tt}) + \rho \dot{\theta}_{tt} J \mathbf{e}_3] d\xi\end{aligned}$$

dove il momento d'inerzia J rispetto ad \mathbf{e}_3 è:

$$J := \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} S^2 a dS.$$

Ricordando quanto ottenuto per la (4.3), ne segue l'equazione di bilanciamento:

$$\mathbf{p}_x \times \mathbf{n} + \mathbf{m}_x = \rho J \dot{\theta}_{tt} \mathbf{e}_3. \quad (4.4)$$

che tiene conto dell'inerzia rotatoria. Riassumendo, le equazioni di equilibrio risultano:

$$\begin{cases} \mathbf{n}_x + \mathbf{f} = \rho A \mathbf{p}_{tt} \\ \mathbf{p}_x \times \mathbf{n} + \mathbf{m}_x = \rho J \dot{\theta}_{tt} \mathbf{e}_3 \end{cases} \quad (4.5)$$

e trascurando, almeno inizialmente, le forze distribuite si ha:

$$\begin{cases} \mathbf{n}_x = \rho A \mathbf{p}_{tt} \\ \mathbf{p}_x \times \mathbf{n} + \mathbf{m}_x = \rho J \dot{\theta}_{tt} \mathbf{e}_3. \end{cases} \quad (4.6)$$

4.2 Analisi asintotica

Per determinare una soluzione approssimata del sistema (4.6) si utilizza il metodo delle scale multiple (ref1.2). Si introducono, allora, due scale temporali $t_0 = t$ e $t_2 = \frac{\varepsilon^2}{2!}t$. Le derivate nel tempo t si trasformano come segue:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= D_0 + \frac{\varepsilon^2}{2!}D_2 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + \varepsilon^2 D_0 D_2 + \dots\end{aligned}$$

dove $D_n = \frac{\partial}{\partial t_n}$. Dalle precedenti ipotesi di riduzione nel tempo si ha:

$$\begin{aligned}\theta_t &= \varepsilon \partial_{t_0} \theta_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!} \partial_{t_0} \theta_2 + \frac{\varepsilon^3}{3!} \partial_{t_0} \theta_3 + \frac{\varepsilon^3}{2!} \partial_{t_2} \theta_1 + O(\varepsilon^4), \\ \theta_{tt} &= \varepsilon \partial_{t_0}^2 \theta_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!} \partial_{t_0}^2 \theta_2 + \frac{\varepsilon^3}{3!} (\partial_{t_0}^2 \theta_3 + 3! \partial_{t_0 t_2}^2 \theta_1) + O(\varepsilon^4), \\ \mathbf{p}_{tt} &= \varepsilon (\partial_{t_0}^2 \mathbf{u}_1) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \partial_{t_0}^2 \mathbf{u}_2 + \frac{\varepsilon^3}{3!} (\partial_{t_0}^2 \mathbf{u}_3 + 3! \partial_{t_0 t_2}^2 \mathbf{u}_1) + O(\varepsilon^4).\end{aligned}$$

Per ottenere una soluzione del sistema (4.6) si considerano le seguenti espansioni:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \varepsilon \mathbf{u}_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!} \mathbf{u}_2 + \frac{\varepsilon^3}{3!} \mathbf{u}_3 + O(\varepsilon^4), \\ \mathbf{n} &= \varepsilon \mathbf{n}_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!} \mathbf{n}_2 + \frac{\varepsilon^3}{3!} \mathbf{n}_3 + O(\varepsilon^4), \\ \mathbf{n}_x &= \varepsilon \mathbf{n}_{1x} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \mathbf{n}_{2x} + \frac{\varepsilon^3}{3!} \mathbf{n}_{3x} + O(\varepsilon^4), \\ \mathbf{m}_x &= M_x \mathbf{e}_3,\end{aligned}$$

dove il pedice i indica $\left. \frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} \right|_{\varepsilon=0}$, ovvero la derivata i -esima rispetto ad ε valutata per $\varepsilon = 0$.

Si calcolano separatamente i termini dell'espansione:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_1 &= \left. \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \mathbf{b}_1 + N \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial H}{\partial \varepsilon} \mathbf{b}_2 + H \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= N_1 \mathbf{a}_1 + H_1 \mathbf{a}_2; \\
\mathbf{n}_2 &= \left. \frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \mathbf{b}_1 + N \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial H}{\partial \varepsilon} \mathbf{b}_2 + H \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial \varepsilon} \right] \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= (N_2 - 2\theta_1 H_1) \mathbf{a}_1 + (2N_1 \theta_1 + H_2) \mathbf{a}_2; \\
\mathbf{n}_3 &= \left. \frac{\partial^3 \mathbf{n}}{\partial \varepsilon^3} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \mathbf{b}_1 + N \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial H}{\partial \varepsilon} \mathbf{b}_2 + H \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial \varepsilon} \right] \right\} \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= (N_3 - 3N_1 \theta_1^2 - 3H_2 \theta_1 - 3H_1 \theta_2) \mathbf{a}_1 + (H_3 + 3N_2 \theta_1 + 3N_1 \theta_2 - 3H_1 \theta_1^2) \mathbf{a}_2; \\
\mathbf{n}_{1x} &= N_{1x} \mathbf{a}_1 + H_{1x} \mathbf{a}_2; \\
\mathbf{n}_{2x} &= (N_{2x} - 2\theta_{1x} H_1 - 2\theta_1 H_{1x}) \mathbf{a}_1 + (2N_{1x} \theta_1 + 2N_1 \theta_{1x} + H_{2x}) \mathbf{a}_2; \\
\mathbf{n}_{3x} &= [N_{3x} - 3(N_{1x} \theta_1^2 + 2N_1 \theta_1 \theta_{1x}) - 3(H_{2x} \theta_1 + H_2 \theta_{1x}) - 3(H_{1x} \theta_2 + H_1 \theta_{2x})] \mathbf{a}_1 + \\
&\quad [H_{3x} + 3(N_{2x} \theta_1 + N_2 \theta_{1x}) + 3(N_{1x} \theta_2 + N_1 \theta_{2x}) - 3(H_{1x} \theta_1^2 + 2H_1 \theta_1 \theta_{1x})] \mathbf{a}_2.
\end{aligned}$$

Scegliendo il legame costitutivo elastico lineare:

$$\begin{aligned}
N &= EA(\nu + 1), \\
H &= GA^* \eta, \\
M &= EJ\mu,
\end{aligned}$$

si determinano le seguenti espressioni, necessarie nell'analisi asintotica, di

$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$:

$$\nu_1 = \left. \frac{\partial \nu}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = u_{1x} \cos(\theta) + u_x - \sin(\theta)\theta_1 + v_{1x} \cos(\theta)\theta_1 \Big|_{\varepsilon=0} = u_{1x};$$

$$\begin{aligned} \nu_2 &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\partial \nu}{\partial \varepsilon} \right] \right|_{\varepsilon=0} = u_{2x} \cos \theta - 2u_{1x} \sin \theta \theta_1 - (1 + u_x) \cos \theta \theta_1^2 - (1 + u_x) \sin \theta \theta_2 \\ &\quad + v_{2x} \sin \theta + 2v_{1x} \cos \theta \theta_1 - v_x \sin \theta \theta_1^2 + v_x \cos \theta \theta_2 \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= u_{2x} - \theta_1^2 + 2v_{1x} \theta_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_3 &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\partial \nu}{\partial \varepsilon} \right] \right\} \right|_{\varepsilon=0} = u_{3x} \cos \theta - 3u_{2x} \sin \theta \theta_1 - 3u_{1x} \cos \theta \theta_1^2 - 3u_{1x} \sin \theta \theta_2 \\ &\quad + \sin \theta \theta_1^3 + u_x \sin \theta \theta_1^3 - 3 \cos \theta \theta_1 \theta_2 - 3u_x \cos \theta \theta_1 \theta_2 - \sin \theta \theta_3 - u_x \sin \theta \theta_3 + v_{3x} \sin \theta \\ &\quad + 3v_{2x} \cos \theta \theta_1 - 3v_{1x} \sin \theta \theta_1^2 + 3v_x \cos \theta \theta_2 - v_x \cos \theta \theta_1^3 - 3v_x \sin \theta \theta_1 \theta_2 + v_x \cos \theta \theta_3 \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= u_{3x} - 3u_{1x} \theta_1^2 - 3\theta_1 \theta_2 + 3v_{2x} \theta_1 + v_{1x} \theta_2; \end{aligned}$$

$$\eta_1 = \left. \frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \cos \theta_1 (1 + u_x) - \sin \theta u_{1x} + v_{1x} \cos \theta - v_x \sin \theta \theta_1 \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= -\theta_1 + v_{1x};$$

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon} \right] \right|_{\varepsilon=0} = \sin \theta \theta_1^2 (1 + u_x) - \cos \theta \theta_2 (1 + u_x) - 2 \cos \theta \theta_1 u_{1x} - \sin \theta u_{2x} + \\ &\quad v_{2x} \cos \theta - v_{1x} \sin \theta \theta_1 - v_{1x} \sin \theta \theta_1 - v_x \cos \theta \theta_1^2 - v_x \sin \theta \theta_2 \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= -\theta_2 - 2\theta_1 u_{1x} + v_{2x}; \end{aligned}$$

$$\eta_3 = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon} \right] \right\} \right|_{\varepsilon=0} = -u_{3x} \sin \theta - 3u_{2x} \cos \theta \theta_1 + 3u_{1x} \sin \theta \theta_1^2 - 3u_{1x} \cos \theta \theta_2$$

$$+ \cos \theta \theta_1^3 + u_x \cos \theta \theta_1^3 + 3 \sin \theta \theta_1 \theta_2 + 3u_x \sin \theta \theta_1 \theta_2 - \cos \theta \theta_3 - u_x \cos \theta \theta_3 + v_{3x} \cos \theta$$

$$- 3v_{2x} \sin \theta \theta_1 - 3v_{1x} \cos \theta \theta_1^2 - 3v_{1x} \sin \theta \theta_2 + v_x \sin \theta \theta_1^3 - 3v_x \cos \theta \theta_1 \theta_2 - v_x \sin \theta \theta_3 \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= -3u_{2x} \theta_1 - 3u_{1x} \theta_2 + \theta_1^3 - \theta_3;$$

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \left. \frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \theta_{1x}; \\ \mu_2 &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon} \right] \right|_{\varepsilon=0} = \theta_{2x}; \\ \mu_3 &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon} \right] \right\} \right|_{\varepsilon=0} = \theta_{3x};\end{aligned}$$

Dopo aver determinato le espressioni precedenti, è possibile calcolare le seguenti quantità:

$$N_1 = \left. \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = EA\nu_1 = EAu_{1x};$$

$$N_2 = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \right] \right|_{\varepsilon=0} = EA\nu_2 = EA(u_{2x} - \theta_1^2 + 2v_{1x}\theta_1);$$

$$N_3 = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \right] \right\} \right|_{\varepsilon=0} = EA\nu_3 = EA(u_{3x} - 3u_{1x}\theta_1^2 - 3\theta_1\theta_2 + 3v_{2x}\theta_1 + 3v_{1x}\theta_2);$$

$$N_{1x} = EAu_{1xx};$$

$$N_{2x} = EA(u_{2xx} - 2\theta_1\theta_{1x} + 2v_{1xx}\theta_1 + 2v_{1x}\theta_{1x});$$

$$N_{3x} = EA(u_{3xx} - 3u_{1xx}\theta_1^2 - 3u_{1x} - 6\theta_1\theta_{1x} - 3\theta_{1x}\theta_2 - 3\theta_1\theta_{2x});$$

$$H_1 = \left. \frac{\partial H}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = GA^*\eta_1 = GA^*(-\theta_1 + v_{1x});$$

$$H_2 = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\partial H}{\partial \varepsilon} \right] \right|_{\varepsilon=0} = GA^*\eta_2 = GA^*(-\theta_2 - 2\theta_1u_{1x} + v_{2x});$$

$$H_3 = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\partial H}{\partial \varepsilon} \right] \right\} \right|_{\varepsilon=0} = GA^*\eta_3 = GA^*(-3u_{2x}\theta_1 - 3u_{1x}\theta_2 + \theta_1^3 - \theta_3);$$

$$H_{1x} = GA^*(-\theta_{1x} + v_{1xx});$$

$$H_{2x} = GA^*(-\theta_{2x} - 2\theta_{1x}u_{1x} - 2\theta_1u_{1xx} + v_{2xx});$$

$$H_{3x} = GA^*(-3u_{2xx}\theta_1 - 3u_{2x}\theta_{1x} - 3u_{1xx}\theta_2 - 3u_{1x}\theta_{2x} + 3\theta_1^2\theta_{1x} - \theta_{3x});$$

e

$$\begin{aligned}
M_1 &= \left. \frac{\partial M}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = EJ\mu_1 = EJ\theta_{1x}; \\
M_2 &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\partial M}{\partial \varepsilon} \right] \right|_{\varepsilon=0} = EJ\mu_2 = EJ\theta_{2x}; \\
M_3 &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\partial M}{\partial \varepsilon} \right] \right\} \right|_{\varepsilon=0} = EJ\mu_3 = EJ\theta_{3x}; \\
M_{1x} &= EJ\theta_{1xx}; \\
M_{2x} &= EJ\theta_{2xx}; \\
M_{3x} &= EJ\theta_{3xx}.
\end{aligned}$$

Attraverso le espressioni precedenti si procede alla determinazione dei prodotti νH ed ηN :

$$\begin{aligned}
\nu H &= \varepsilon H_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!}(2\nu_1 H_1 + H_2) + \frac{\varepsilon^3}{3!}(3\nu_2 H_1 + 3\nu_1 H_2 + H_3), \\
\eta N &= \frac{\varepsilon^2}{2!}2\eta_1 N_1 + \frac{\varepsilon^3}{3!}(+3\eta_2 N_1 + 3\eta_1 N_2).
\end{aligned}$$

In questo modo è possibile riscrivere il sistema delle equazioni del moto come segue:

$$\begin{cases}
\varepsilon \mathbf{n}_{1x} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \mathbf{n}_{2x} + \frac{\varepsilon^3}{3!} \mathbf{n}_{3x} = \rho A \left(\varepsilon (\partial_{t_0}^2 \mathbf{u}_1) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \partial_{t_0}^2 \mathbf{u}_2 + \frac{\varepsilon^3}{3!} (\partial_{t_0}^2 \mathbf{u}_3 + 3! \partial_{t_0 t_2}^2 \mathbf{u}_1) \right) \\
\varepsilon M_{1x} + \frac{\varepsilon^2}{2!} M_{2x} + \frac{\varepsilon^3}{3!} M_{3x} + \varepsilon H_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!} (2\nu_1 H_1 + H_2 - 2\eta_1 N_1) + \\
\frac{\varepsilon^3}{3!} (3\nu_2 H_1 + 3\nu_1 H_2 + H_3 - 3\eta_2 N_1 - 3\eta_1 N_2) = \rho J \left(\varepsilon \partial_{t_0}^2 \theta_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!} \partial_{t_0}^2 \theta_2 + \frac{\varepsilon^3}{3!} (\partial_{t_0}^2 \theta_3 + 3! \partial_{t_0 t_2}^2 \theta_1) \right).
\end{cases}$$

Dal sistema precedente è possibile estrarre le espressioni dei sistemi perturbativi ad ordini diversi. In particolare si ha:

Ordine ε :

$$\begin{cases} \mathbf{n}_{1x} - \rho A \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t_0^2} = 0 \\ M_{1x} + H_1 - \rho J \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t_0^2} = 0 \end{cases}$$

Ordine ε^2 :

$$\begin{cases} \mathbf{n}_{2x} - \rho A \frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial t_0^2} = 0 \\ M_{2x} + H_2 - \rho J \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t_0^2} = -2\nu_1 H_1 + 2\eta_1 N_1 \end{cases}$$

Ordine ε^3 :

$$\begin{cases} \mathbf{n}_{3x} - \rho A \frac{\partial^2 \mathbf{u}_3}{\partial t_0^2} = 3! \rho A \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t_0 \partial t_2} \\ M_{3x} + H_3 - \rho J \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial t_0^2} = -3\nu_2 H_1 - 3\nu_1 H_2 + 3\eta_2 N_1 + 3\eta_1 N_2 + 3! \rho J \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t_0 \partial t_2} \end{cases}$$

4.3 Equazioni del moto al primo ordine

Il sistema perturbativo al primo ordine delle equazioni del moto risulta:

$$\begin{cases} N_{1x} \mathbf{e}_1 + H_{1x} \mathbf{e}_2 - \rho A \frac{\partial^2 (u_1 \mathbf{e}_1 + v_1 \mathbf{e}_2)}{\partial t_0^2} = 0 \\ EJ\theta_{1xx} + H_1 - \rho J \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t_0^2} = 0 \end{cases}$$

ovvero, proiettando le quantità vettoriali lungo le direzioni \mathbf{e}_1 ed \mathbf{e}_2 :

$$\begin{cases} EAu_{1xx} - \rho A \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_0^2} = 0 \\ GA^*(-\theta_{1x} + v_{1xx}) - \rho A \frac{\partial^2 v_1}{\partial t_0^2} = 0 \\ EJ\theta_{1xx} + GA^*(-\theta_1 + v_{1x}) - \rho J \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t_0^2} = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Per rendere le equazioni adimensionali si considerano le variabili, indicate con l'asterisco, seguenti:

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{L}, \quad t^* = \omega_c t,$$

$$\text{con } \omega_c = \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}.$$

Dalle espressioni precedenti si ricava:

$$\mathbf{u}_x = \mathbf{u}_{x^*}^*, \quad \mathbf{u}_{xx} = \frac{1}{L} \mathbf{u}_{x^*x^*}^*, \quad \mathbf{u}_t = L\omega_c \mathbf{u}_{t^*}^*, \quad \mathbf{u}_{tt} = L\omega_c^2 \mathbf{u}_{t^*t^*}^*$$

Il sistema delle equazioni del moto al primo ordine (4.7) diventa quindi:

$$\begin{cases} \frac{EA}{L} u_{1x^*x^*}^* - \rho AL\omega_c^2 \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial t_0^{*2}} = 0 \\ \frac{GA^*}{L} (-\theta_{1x^*} + v_{1x^*x^*}^*) - \rho AL\omega_c^2 \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial t_0^{*2}} = 0 \\ \frac{EJ}{L^2} \theta_{1x^*x^*} + GA^* (-\theta_1 + v_{1x^*}^*) - \rho J\omega_c^2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t_0^{*2}} = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Si dividono le prime due equazioni per la forza caratteristica $\rho AL\omega_c^2$ e la terza per il relativo momento (per unità di lunghezza) $\rho AL^2\omega_c^2$.

$$\begin{cases} \frac{EA}{L\rho AL\omega_c^2} u_{1x^*x^*}^* - \frac{\rho AL\omega_c^2}{\rho AL\omega_c^2} \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial t_0^{*2}} = 0 \\ \frac{GA^*}{L\rho AL\omega_c^2} (-\theta_{1x^*} + v_{1x^*x^*}^*) - \frac{\rho AL\omega_c^2}{\rho AL\omega_c^2} \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial t_0^{*2}} = 0 \\ \frac{EJ}{L^2\rho AL\omega_c^2} \theta_{1x^*x^*} + GA^* \rho AL^2\omega_c^2 (-\theta_1 + v_{1x^*}^*) - \frac{\rho J\omega_c^2}{\rho AL^2\omega_c^2} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t_0^{*2}} = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Inoltre, ponendo:

$$\frac{GA^*}{EA} = \alpha, \quad \frac{J}{EL^2} = \beta,$$

ed eliminando l'asterisco si ha:

$$\begin{cases} u_{1t_0t_0} - u_{1xx} = 0 \\ v_{1t_0t_0} - \alpha(v_{1xx} - \theta_{1x}) = 0 \\ \beta\theta_{1t_0t_0} - \beta\theta_{1xx} - \alpha(v_{1x} - \theta_1) = 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

La prima equazione del sistema (4.10) è disaccoppiata dalle altre due e quindi può essere risolta separatamente. Ricordando che $t_0 = t$, questa si può scrivere come:

$$\begin{cases} u_{1tt} - u_{1xx} = 0 \\ u_1(0, t) = 0 \\ u_1(1, t) = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Si suppone che u_1 sia nella forma:

$$u_1(x, t) = e^{i\omega t} U(x). \quad (4.12)$$

Allora l'equazione diventa:

$$\begin{cases} -U'' - \omega^2 U = 0 \\ U(0) = 0 \\ U(1) = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

L'equazione caratteristica associata alla (4.13) è:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0,$$

da cui segue che

$$\lambda = \pm i\omega,$$

e pertanto la soluzione risulta

$$U(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$

Imponendo poi le condizioni al contorno si ha:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin \omega = 0. \end{cases}$$

Esistono soluzioni non nulle per:

$$\sin \omega = 0,$$

da cui

$$\omega_n = n\pi.$$

A questo punto si ha:

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x),$$

da cui segue

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x) e^{in\pi t} + cc, \quad (4.14)$$

dove cc indica i termini complessi coniugati.

A questo punto si considera il problema agli autovalori relativo allo spostamento trasversale:

$$\begin{cases} v_{1tt} - \alpha(v_{1xx} - \theta_{1x}) = 0 \\ \beta\theta_{1tt} - \beta\theta_{1xx} - \alpha(v_{1x} - \theta_1) = 0 \\ v_1(0, t) = 0 \\ v_1(1, t) = 0 \\ \theta_{1x}(0, t) = 0 \\ \theta_{1x}(1, t) = 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Dalla prima delle (4.15) si ricava

$$\theta_{1x} = -\frac{1}{\alpha}v_{1tt} + v_{1xx},$$

mentre derivando la seconda rispetto ad x si ha:

$$\beta\theta_{1xxt} - \beta\theta_{1xxx} - \alpha v_{1xx} + \alpha\theta_{1x} = 0.$$

Sostituendo la prima nella seconda, si ottiene:

$$\beta \left(-\frac{v_{1tttt}}{\alpha} + v_{1xxtt} \right) - \beta \left(-\frac{v_{1ttxx}}{\alpha} + v_{1xxx} \right) - \alpha v_{1xx} + \alpha \left(-\frac{v_{1tt}}{\alpha} + v_{1xx} \right) = 0,$$

e semplificando:

$$\frac{\beta}{\alpha} v_{1tttt} + \beta v_{1xxx} - \beta \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) v_{1xxtt} + v_{1tt} = 0, \quad (4.16)$$

con condizioni al contorno

$$v_1(0, t) = 0, \quad v_1(1, t) = 0, \quad -\frac{v_{1tt}(0, t)}{\alpha} + v_{1xx}(0) = 0, \quad -\frac{v_{1tt}(1, t)}{\alpha} + v_{1xx}(1) = 0.$$

Si supponga che v_1 sia della forma:

$$v_1(x, t) = e^{i\omega t} V(x).$$

Allora l'equazione (4.16) diventa:

$$\beta V'''' + \beta \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \omega^2 V'' + \omega^2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \omega^2 - 1 \right) V = 0,$$

con equazione caratteristica associata:

$$\beta \lambda^4 + \beta \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \omega^2 \lambda^2 + \omega^2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \omega^2 - 1 \right) = 0. \quad (4.17)$$

Si hanno quindi:

$$\lambda_1 = \sqrt{-\frac{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \omega^2}{2} - \sqrt{\frac{\omega^4}{4} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\beta}}}; \quad (4.18)$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{-\frac{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \omega^2}{2} - \sqrt{\frac{\omega^4}{4} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\beta}}}; \quad (4.19)$$

$$\lambda_3 = \sqrt{-\frac{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \omega^2}{2} + \sqrt{\frac{\omega^4}{4} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\beta}}}; \quad (4.20)$$

$$\lambda_4 = -\sqrt{-\frac{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \omega^2}{2} + \sqrt{\frac{\omega^4}{4} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\beta}}}. \quad (4.21)$$

Mentre $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ λ_3 e λ_4 possono assumere valori reali o complessi. In particolare, si possono distinguere due casi:

1. $0 < \omega < \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ per cui $\lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$;
2. $\omega > \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ per cui $\lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$.

Si analizza dapprima il caso $0 < \omega < \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$. Si pone

$$\lambda^* = \frac{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\omega^2}{2} + \sqrt{\frac{\omega^4}{4} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\beta}},$$

pertanto $\lambda_1 = i\sqrt{\lambda^*}$ e $\lambda_2 = -i\sqrt{\lambda^*}$. Allora la soluzione dell'equazione (4.3) si scrive:

$$V(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda^*}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda^*}x) + C_3 \sinh(\lambda_3 x) + C_4 \cosh(\lambda_4 x). \quad (4.22)$$

Si impongono le condizioni al contorno:

$$V(0) = 0, \quad V(1) = 0, \quad V''(0) = 0, \quad V''(1) = 0,$$

ottenendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_4 = 0 \\ C_1 \cos(\sqrt{\lambda^*}) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda^*}) + C_3 \sinh(\lambda_3) + C_4 \cosh(\lambda_4) = 0 \\ -C_1 \lambda^* + C_4 \lambda_4^2 = 0 \\ -C_1 \lambda^* \cos(\sqrt{\lambda^*}) - C_2 \lambda^* \sin(\sqrt{\lambda^*}) + C_3 \lambda_3^2 \sinh(\lambda_3) + C_4 \lambda_4^2 \cosh(\lambda_4) = 0 \end{cases}$$

che conduce a:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin(\sqrt{\lambda^*}) = 0 \\ C_4 = 0 \\ C_3 = 0. \end{cases}$$

Pertanto, esistono soluzioni non nulle se

$$\lambda^* = n^2 \pi^2, \quad (4.23)$$

da cui

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x), \quad (4.24)$$

e

$$v_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x) e^{i\omega_n t} + cc. \quad (4.25)$$

Il valore di ω_n si ricava dalla (4.23) come

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \omega^2}{2} + \sqrt{\frac{\omega^4}{4} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\beta}} = n^2 \pi^2. \quad (4.26)$$

Quest'ultima equazione fornisce per ogni n al più quattro valori di ω_n .

Si analizza ora il caso $\omega > \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$. Si ponga

$$\lambda^\diamond = \frac{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \omega^2}{2} - \sqrt{\frac{\omega^4}{4} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\beta}}.$$

Pertanto $\lambda_3 = i\sqrt{\lambda^\diamond}$ e $\lambda_4 = -i\sqrt{\lambda^\diamond}$. Allora la soluzione dell'equazione (4.3) si scrive:

$$V(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda^*}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda^*}x) + C_3 \cos(\sqrt{\lambda^\diamond}x) + C_4 \sin(\sqrt{\lambda^\diamond}x).$$

Imponendo le condizioni al contorno:

$$V(0) = 0, \quad V(1) = 0, \quad V''(0) = 0, \quad V''(1) = 0,$$

si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = 0 \\ C_1 \cos(\sqrt{\lambda^*}) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda^*}) + C_3 \cos(\sqrt{\lambda^\diamond}) + C_4 \sin(\sqrt{\lambda^\diamond}) = 0 \\ -C_1 \lambda^* - C_3 \lambda^\diamond = 0 \\ -C_1 \lambda^* \cos(\sqrt{\lambda^*}) - C_2 \lambda^* \sin(\sqrt{\lambda^*}) - C_3 \lambda^\diamond \cos(\sqrt{\lambda^\diamond}) - C_4 \lambda^\diamond \sin(\sqrt{\lambda^\diamond}) = 0 \end{cases}$$

che conduce a due sistemi: il primo

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin(\sqrt{\lambda^*}) = -C_4 \sin(\sqrt{\lambda^\diamond}) \\ C_3 = 0 \\ C_4 = 0 \end{cases}$$

ha soluzione

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin(\sqrt{\lambda^*}) = 0 \\ C_3 = 0 \\ C_4 = 0 \end{cases}$$

che è non nulla se

$$\lambda^* = n^2 \pi^2.$$

Il secondo sistema, invece,

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin(\sqrt{\lambda^*}) = -C_4 \sin(\sqrt{\lambda^\diamond}) \\ C_3 = 0 \\ \sin(\sqrt{\lambda^\diamond}) = 0 \end{cases}$$

ha soluzione:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = 0 \\ \lambda^\diamond = n^2\pi^2. \end{cases}$$

Allora, per entrambi i sistemi la soluzione condurrà ad una forma della V del tipo seguente:

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x)$$

e pertanto

$$v_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x) e^{i\omega_n t} + cc. \quad (4.27)$$

Bisogna tuttavia osservare che se la soluzione è ottenuta scegliendo $C_1 = C_3 = C_4 = 0$ (ovvero dal primo sistema), ω_n si deve ricavare da $\lambda^* = n^2\pi^2$, mentre se essa è ottenuta scegliendo $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ (ovvero dal secondo sistema), ω_n si ricava da $\lambda^\diamond = n^2\pi^2$.

Capitolo 5

Conclusioni

In questo lavoro di tesi sono stati approfonditi e in alcuni casi migliorati risultati e metodi di differenti filoni di ricerca nell'ambito della dinamica non lineare.

Per quel che riguarda la ricerca di un algoritmo di integrazione nel tempo con maggiori margini di stabilità, si è formulato un approccio basato su un cambio di rappresentazione nelle equazioni dinamiche non lineari del moto. La principale caratteristica dell'algoritmo di soluzione proposto risiede nell'effettuare il cambio di rappresentazione solo nelle espressioni delle forze interne. Questa richiesta, che si realizza attraverso l'introduzione di un set di variabili locali aggiuntive, non aumenta i costi computazionali totali. Infatti, la presenza di un numero superiore di variabili è bilanciata dal minor numero di iterazioni interne alla Newton richieste dalla nuova formulazione. Inoltre, i test numerici hanno mostrato che l'algoritmo proposto, oltre ad ottenere margini di stabilità più ampi rispetto al caso classico, conserva l'energia totale del sistema ad ogni passo.

Nell'ambito della ricerca di un modello alternativo per la descrizione cinematica di piccole deformazioni, è data una formulazione basata sulla definizione di sole lunghezze relative ed applicata ad elementi finiti semplici. La tecnica proposta non introduce misure di rotazione e permette, quindi, di istruire l'elemento finito in ambito lineare. In quest'ottica, l'analisi che si ottiene è robusta, non essendo introdotte singolarità dovute alle matrici di rotazione, ed economica, poiché non sono richieste operazioni complesse per poter superare i problemi di non commutatività delle matrici. Inoltre, le componenti delle deformazioni risultano indipendenti dal sistema di riferimento e, pertanto, vengono superati i problemi di locking attraverso una selezione dei contributi al tensore delle deformazioni. I test numerici hanno evidenziato che i costi computazionali richiesti risultano bassi sia in termini di tempo di calcolo che di allocazione della memoria.

Infine, nell'analisi di un modello di trave alla Timoshenko, attraverso il

metodo delle scale multiple, sono state ottenute le formulazioni dei sistemi perturbativi ai diversi ordini. Si è impostato il processo di soluzione del sistema al primo ordine, ottenendo, nello specifico, un sistema formato da tre equazioni a derivate parziali. La prima equazione risulta disaccoppiata dalle precedenti e, pertanto, facilmente risolvibile, mentre la ricerca della soluzione delle due equazioni accoppiate resta un problema aperto.

Bibliografia

- [1] F. Armero, E. Petöcz, Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact/impact problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **158** (1998), 269–300.
- [2] F. Armero, I. Romero, On the formulation of high-frequency dissipative timestepping algorithms for nonlinear dynamics. Part I: low-order methods for model problems and nonlinear elastodynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190** (2001), 2603–2649.
- [3] F. Armero, I. Romero, On the formulation of high-frequency dissipative timestepping algorithms for nonlinear dynamics. Part II: second-order methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190** (2001), 6783–6824.
- [4] T. Belytschko, J. S. J. Ong, W. K. Liu, J. M. Kennedy, Hourglass control in linear and nonlinear problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **43** (1984), 251–276.
- [5] T. Belytschko, D. F. Schoeberle, On the unconditional stability of an implicit algorithm for nonlinear structural dynamics, *Journal of Applied Mechanics*, **42** (1975), 865–869.
- [6] P. Betsch, P. Steinmann, Conservation properties of a time FE method. Part I: time-stepping schemes for N-body problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **49** (2000), 599–638.
- [7] P. Betsch, P. Steinmann, Conservation properties of a time FE method. Part II: time-stepping schemes for non-linear elastodynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **50** (2001), 1931–1955.
- [8] C. Chin, A.H. Nayfeh, Three-to-one internal resonances in hinged-clamped beams, *Nonlinear Dynamics*, **12** (1997), 129–154.

- [9] C. Chin, A.H. Nayfeh, Three-to-one internal resonances in Parametrically excited hinged-clamped beams, *Nonlinear Dynamics*, **20** (1999), 131–158.
- [10] J. Chung, G. J. M. Hulbert, A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The generalized- α method, *Journal of Applied Mechanics*, **60** (1993), 371–375.
- [11] M. A. Crisfield, *Non-linear finite element analysis of solids and structures. Volume 2: advanced topics*, John Wiley & Sons, Chichester, 2003.
- [12] L. A. Duarte Filho, A. M. Awruch, Geometrically nonlinear static and dynamic analysis of shells and plates using the eight-node hexahedral element with one-point quadrature, *Finite Elements in Analysis and Design*, **40** (2004), 1297–1315.
- [13] D. P. Flanagan, T. Belytschko, A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **17** (1983), 679–706.
- [14] H. M. Hilber, T. J. R. Hughes, R. L. Taylor, Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics, *Earthquake Engng Struct. Dyn.*, **5** (1977), 283–292.
- [15] C. Hoff, P. J. Pahl, Development of an implicit method with numerical dissipation for generalized single step algorithm for structural dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **67** (1988), 367–385.
- [16] T. J. R. Hughes, T. K. Caughey, W. K. Liu, Finite-element methods for nonlinear elastodynamics which conserve energy, *Journal of Applied Mechanics*, **45** (1978), 366–370.
- [17] K. T. Kavanagh, S.W. Key, A note on selective and reduced integration techniques in finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **4** (1972), 148–150.
- [18] D. Kosloff, G. A. Frazier, Treatment of hourglass patterns in low order finite element codes, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, **2** (1978), 57–72.
- [19] D. Kuhl, M. A. Crisfield, Energy-conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **45** (1999), 569–599.

- [20] D. Kuhl, E. Ramm, Constraint Energy Momentum Algorithm and its application to non-linear dynamics of shells, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **136** (1996), 293–315.
- [21] D. Kuhl, E. Ramm, Generalized energy-momentum method for non-linear adaptive shell dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **178** (1999), 343–366.
- [22] W. Lacarbonara, H. Yabuno, Refined models of elastic beams undergoing large in-plane motions: theory and experiment, *International Journal of Solid and Structures*, **43** (2006), 5066–5084.
- [23] W. Lacarbonara, H. Yabuno, K. Hayashi, Non-linear cancellation of the parametric resonance in elastic beams: theory and experiment, *International Journal of Solid and Structures*, **44** (2007), 2209–2224.
- [24] K. P. Li, S. Cescotto, An 8-node brick element with mixed formulation for large deformation analyses, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **141** (1997), 157–204.
- [25] W. K. Liu, Y. K. Hu, T. Belytschko, Multiple quadrature unterintegrated finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37** (1994), 3263-3289.
- [26] W. K. Liu, J. S. J. Ong, R. A. Uras, Finite element stabilization matrices-a unification approach, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **53** (1985), 13–46.
- [27] S. Lopez, Improving stability by change of representation in time-stepping analysis of non-linear beams dynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **69** (2007), 822–836
- [28] S. Lopez, K. Russo, Improving stability in the time-stepping analysis of structural nonlinear dynamics, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **8** (2008), 257–270.
- [29] S. Lopez, K. Russo, Statical and dynamical structural analysis by a kinematical description of the small strains involving finite rotations, *Collana Rapporti Interni Laboratorio di Meccanica Computazionale UNICAL*, **52** (2008).
- [30] A.H. Nayfeh, Perturbations Methods, *John Wiley & Sons*, (1973).
- [31] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, Nonlinear Oscillations, *John Wiley & Sons*, (1979).

- [32] A.H. Nayfeh, Introduction to Perturbation Techniques, *John Wiley & Sons*, (1981).
- [33] A.H. Nayfeh, Problems in Perturbation, *John Wiley & Sons*, (1985).
- [34] A.H. Nayfeh, B. Balachandran, Applied Nonlinear Dynamics, *John Wiley & Sons*, (1995).
- [35] A.H. Nayfeh, Nonlinear Interactions. Analytical, Computational, and Experimental Methods, *John Wiley & Sons*, (2000).
- [36] A.H. Nayfeh, P.F. Pai, Linear and Nonlinear Structural Mechanics, *John Wiley & Sons*, (2004).
- [37] A.H. Nayfeh, W. Lacarbonara, C. Chin, Nonlinear normal modes of buckled beams: three-to-one and one-to-one internal resonances, *Nonlinear Dynamics*, **18** (1999), 253–273.
- [38] N. M. Newmark, A method of computation for structural dynamics *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, **85** (1959), 67–94.
- [39] T. T. Nguyen, G.R. Liu, K.Y. Dai, K.Y. Lam, Selective Smoothed Finite Element Method *Tsinghua Science and technology*, **12** (2007), 497–508.
- [40] J. C. Simo, N. Tarnow, The discrete energy-momentum method. Conserving algorithms for nonlinear elastodynamics, *Zeitschrift fuer angewandte Mathematik und Physik*, **43** (1992), 757–792.
- [41] J. C. Simo, N. Tarnow, A new energy and momentum conserving algorithm for the nonlinear dynamics of shells, *International Journal for Numerical Method in Engeering*, **37** (1994), 2527–2549.
- [42] Y. Y. Zhu, S. Cescotto, Unified and mixed formulation of the 8-node hexahedral elements by assumed strain method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **129** (1996), 177–209.
- [43] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, J. M. Too, Reduced integration technique in general analysis af plates and shells, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **3** (1971), 275–290.