Università della Calabria

Dottorato di Ricerca in

Psicologia della Programmazione e Intelligenza Artificiale

XX Ciclo

Settore scientifico-disciplinare MAT/07

Tesi di Dottorato

PROGETTAZIONE E REALIZZAZIONE DI OGGETTI MULTIMEDIALI FINALIZZATI AD UN PIÙ FACILE APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA A LIVELLO DI SCUOLA ELEMENTARE

Il Candidato

Dott.ssa Caterina Senatore

Il Tutor

Prof. Mauro Francaviglia

Il Coordinatore

Prof.ssa Eleonora Bilotta

A.A. 2006-2007

Indice

Introduzione

Questo lavoro di tesi consta principalmente di una serie di lezioni sotto forma di video didattici riguardanti alcuni specifici argomenti di Matematica elementare (Geometria Euclidea del Piano), indirizzati a ragazzi in età scolare tra i 6 e i 10 anni. Allo scopo di rendere interessanti e accattivanti agli occhi dei bambini i concetti base della Matematica, abbiamo scelto di spiegarli in maniera semplice e divertente, in modo da superare quel difficile approccio che solitamente caratterizza il primo apprendimento di questa disciplina.

La Tesi è ripartita essenzialmente in tre parti. In una appendice si riporta infine, per completezza, l'intera sceneggiatura del ciclo di lezioni.

Il primo capitolo intende fungere da breve introduzione alle problematiche generali riguardanti l'insegnamento dei concetti elementari della Matematica nella prima infanzia, fino alle età scolari della scuola elementare. Dopo una breve introduzione di tipo "storico" e "pedagogico generale" (che esamina velocemente Comenius, Pestalozzi e Montessori, sino a giungere a Piaget), si enucleano sinteticamente i principali problemi di natura didattica, legati alla necessità di introdurre i concetti di numero e di misura in modo sintetico – attivo – deduttivo, sfruttando la potenza dell'approccio geometrico e l'uso moderno del concetto di trasformazione. Si segue da vicino la trattazione del Professore F. Arzarello (http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2001/matematica2001.html). Queste considerazioni di natura generale costituiscono, di fatto, la base "filosofica" sulla quale si imposta il lavoro oggetto principale di questa Tesi.

Questo capitolo, inoltre, ci permette di comprendere come un moderno insegnamento della Matematica a livello elementare non possa, da un lato, prescindere dall'uso didattico della Geometria Euclidea piana come geometria delle figure e delle loro trasformazioni, e dall'altro prescindere dall'uso di nuove tecnologie, più adatte ad attirare l'attenzione dei bambini: proprio in questo spirito e con queste finalità parte il lavoro di presentazione multimediale da noi svolto.

Il secondo capitolo, anch'esso di natura introduttiva, riguarda il contesto di utilizzo delle nuove tecnologie per la Visualizzazione, la Comunicazione Scientifica e la Didattica attraverso gli Agenti Virtuali: all'interno di questo capitolo viene tra l'altro introdotto sinteticamente il concetto di "Agente Virtuale" ed il suo uso per rendere più attraenti i prodotti per la Comunicazione della Scienza.

Nel terzo capitolo si parla dell'uso che noi abbiamo fatto di queste nuove tecnologie, e di come abbiamo tenuto presenti, per la realizzazione dei nostri video, sia le strategie di Divulgazione Scientifica discusse nel capitolo precedente, sia i metodi di Didattica della Matematica di cui si parla nel primo capitolo: questa terza parte riguarda, infatti, la progettazione e la realizzazione dei video didattici da noi prodotti. Per quanto riguardala stesura dei capitoli due e tre ringraziamo la Dott.ssa Marcella Giulia Lorenzi per l'aiuto fornitoci con consigli, suggerimenti e indicazioni bibliografiche.

Le lezioni – in numero di quattordici - riguardano specifici argomenti scelti all'interno dell'Aritmetica Pitagorica e le basi della Geometria Euclidea. Il percorso da noi seguito si basa, principalmente, sulla "uguaglianza di figure" (intendendo con questo, in particolare, i criteri di congruenza ed equivalenza, i movimenti rigidi ed i criteri di similitudine dei triangoli). Contemporaneamente, vengono spiegate le frazioni, le proporzioni, i poligoni regolari e i concetti di circonferenza e di distanza tra due punti; i bambini impareranno così anche ad eseguire le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione. Lo scopo è di mostrare ai bambini come tutti questi fondamentali concetti base della Matematica non siano a sé stanti, ma profondamente correlati tra loro; e come, in particolare, la Geometria fornisca sempre un approccio più legato all'intuizione per introdurre in modo più semplice e visivo concetti astratti successivamente esprimibili attraverso formule algebriche o analitiche.

A nostro parere Agenti e Tecnologie Multimediali possono essere convenientemente utilizzati al fine di spiegare e visualizzare concetti astratti di Matematica in maniera semplice e facilmente comprensibile, offrendo, allo stesso tempo, sia un certo rigore sia un prodotto che risulti essere accattivante e divertente. Grazie ai progressi nella Computer Graphics, le applicazioni relative alla cosiddetta "Human Computer Interface" sono state avvantaggiate dalla realizzazione di agenti sintetici visivamente piacevoli, basati sia su video reali, sia su disegni di cartoni animati o anche su modelli di grafica 3D che sembrano vivere sullo schermo. Essi assumono convincentemente i ruoli di presentatori virtuali, di attori sintetici, di compagni di squadra o di tutors. Una delle applicazioni di maggior successo di questa tecnologia, che fornisce personaggi simili a quelli reali, è rappresentata dagli ”ambienti di apprendimento basati sul computer”, dove gli agenti immessi possono assumere diversi ruoli in relazione allo studente, specialmente come figure di tutori o insegnanti. Questi agenti possono costituire l’interfaccia Uomo-Computer, migliorando in questo modo le scarse abilità comunicative tipiche dei sistemi computazionali tradizionali.

Per raggiungere risultati di visualizzazione che risultino essere in linea con la voluta compresenza di rigore e di efficacia comunicativa è a nostro parere necessario far uso di metodologie grafiche e audiovisive altamente specializzate e totalmente coerenti, che facciano affidamento sulle più moderne tecniche di arte digitale (Balzola A., Monteverdi A.M., 2004; Drioli A., 2004), in maniera da poter coniugare prodotti di ottima qualità grafica con una struttura tecnico-scientifica rigorosa (per quanto riguarda i singoli contenuti scientifici). Con questo intendiamo presentazioni moderne e gradevoli che non eccedano in esemplificazioni drastiche e che non ricorrano ad approssimazione scientifica (come sfortunatamente avviene in alcune delle attuali strategie multimediali di divulgazione della Fisica e della Matematica, dove la qualità scientifica può essere sottovalutata o, al contrario, dove una perfetta struttura scientifica può essere accompagnata da una grafica di scarsa qualità, incapace di stimolare la fantasia dei fruitori).

Per il nostro progetto l’obiettivo principale è, come detto sopra, coniugare il rigore dei contenuti, proposti ad un livello elementare, con una grafica attraente e divertente. Per questo motivo abbiamo creato due simpatici personaggi che, attraverso gag e situazioni divertenti, accompagnano i bambini nel loro percorso didattico e rendono le lezioni divertenti, in modo tale da attirarne l’interesse. La scelta per quanto riguarda la rappresentazione grafica di questi due personaggi è ricaduta su due strumenti simbolo della Geometria Euclidea: sono infatti un Compasso ed una Squadretta a spiegare concetti fondamentali come i movimenti rigidi ed il Teorema di Pitagora.

Questi agenti sono stati creati e animati usando tecniche di grafica 3D, successivamente integrate con elementi di grafica bi-dimensionale per le parti di spiegazione matematica, per ottenere un buon impatto visivo e, soprattutto, per rendere le spiegazioni più chiare ed efficaci, il tutto evitando di appesantire troppo le dimensioni dei filmati (Francaviglia M., Lorenzi M.G., Senatore C., Talarico A., 2007; Francaviglia M., Lorenzi M.G., Senatore C., 2008 in corso di stampa). Il percorso didattico è completo e viene qui presentato integralmente. Si sono per ora prodotte due lezioni sotto forma di video definitivo e le restanti saranno prodotte in seguito. Il tutto verrà integrato da un testo di accompagnamento per l'uso da parte dei docenti.

Per quanto riguarda le scelte più propriamente narrative abbiamo cercato di rendere le quattordici lezioni non come a se stanti ma, nel svilupparle, le abbiamo costruite come un'unica storia; questo innanzitutto per mostrare ai bambini come questi argomenti siano collegati tra loro, e poi per creare una struttura narrativa omogenea con una storia da seguire e personaggi per cui "tifare". Noi speriamo che gli spettatori/bambini arrivino a chiedersi: cosa succederà ora? Sarà Compasso ad avere la meglio, o sarà Squadretta? O, invece, scopriranno che solo collaborando "da buoni amici" riusciranno a portare a termine il loro importante compito?

Capitolo 1
Problemi di insegnamento e apprendimento della Matematica

Questo primo capitolo intende fungere da breve introduzione alle problematiche generali riguardanti l'insegnamento dei concetti elementari della Matematica nella prima infanzia, fino alle età scolari della scuola elementare. Dopo una breve introduzione di tipo "storico" e "pedagogico generale" (che esamina velocemente Comenius, Pestalozzi e Montessori, sino a giungere a Piaget), si enucleano sinteticamente i principali problemi di natura didattica, legati alla necessità di introdurre i concetti di numero e di misura in modo sintetico – attivo – deduttivo, sfruttando la potenza dell'approccio geometrico e l'uso moderno del concetto di trasformazione. Si segue da vicino la trattazione del Professore F. Arzarello (http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2001/matematica2001.html) Queste considerazioni di natura generale costituiscono, di fatto, la base "filosofica" sulla quale si imposta il lavoro oggetto principale di questa Tesi, ovvero un percorso didattico sulla Geometria Euclidea realizzato attraverso una serie di video, volti a rendere più "leggero" l'apprendimento della disciplina (purchè integrati da successivo sforzo didattico e di approfondimento da parte degli insegnanti).

1.1 Una didattica a cicli

"Sebbene queste scuole siano differenti – la scuola della prima infanzia, la scuola dell'infanzia, quella dell'adolescenza e quella della giovinezza - , non vogliamo però che vi si facciano *apprendere cose differenti, ma le medesime cose in maniera differente. Intendo dire tutte le cose che possono rendere gli uomini veramente uomini, gli scienziati veramente scienziati, apprese secondo l'età e il livello di preparazione anteriore che deve sempre tendere ad elevarsi ulteriormente, gradualmente"* (Comenius J. A., ried. 1960).

Queste sono le parole del boemo Jan Amos Komenski, latinamente Comenius, riportate nella sua opera *Didactica Magna.* Nella sua progettazione di una scuola per tutti Comenius distingueva tanti stadi, a seconda dell'età, e a ciascuno di questi attribuiva un determinato programma di istruzione. Non si trattava però di cambiare argomento, ma piuttosto di trattare i medesimi argomenti in modi diversi, a seconda, appunto, delle possibilità di comprensione degli allievi; lo stesso argomento, dunque, considerato da punti di vista sempre più larghi; così si formerà la cultura *"in modo tale che* - dice sempre Comenius – *quello che è appreso oggi venga a rinforzare quello che è stato appreso ieri ed apra la via a quello che sarà appreso domani"*. Oggi, in termini moderni, si dice che un'istruzione che segue questa metodologia avviene "per cicli". In Italia, molte materie sono sviluppate con metodo ciclico. Infatti, nello studio della Storia, uno stesso argomento viene trattato già nella scuola elementare, dove sono lumeggiate solo alcune figure più importanti più che i fatti; si riprende poi nella scuola media inferiore, dove se ne studiano anche gli aspetti politici; al liceo, poi, l'argomento viene approfondito ulteriormente e se ne studiano anche le cause economiche e sociali. Si tratta dunque di un continuo allargamento, di una ripresa del tema. In Italia anche l'insegnamento della Geometria è svolto con metodo ciclico: le nozioni apprese per via sperimentale nella scuola elementare vengono riorganizzate e sviluppate nel corso di Geometria Intuitiva; queste stesse nozioni, poi, sono riprese nel corso secondario superiore e inquadrate in un sistema ipotetico-deduttivo.

"I fanciulli istruivano i fanciulli. Essi cercavano di realizzare ciò che io dicevo essi dovevano fare e giungevano in tal modo a scoprire essi stessi, per vie diverse, i mezzi più convenienti. Questa attività personale, sviluppantesi liberamente in vari sensi sul principio dell'istruzione, mi persuase sempre più che un'istruzione è vera ed educativa *solo quando proviene dall'attività stessa dei fanciulli…esercitando, come io allora cominciai a fare, i fanciulli a tracciare linee, angoli e cerchi, si da precisione all'intuizione di ogni oggetto e si genera nel fanciullo un'energia fattiva che gioverà a render più chiaro tutto ciò che rientrerà nella cerchia delle sue esperienze"* (Pestalozzi E., ried. 1963). Queste sono considerazioni esposte da Enrico Pestalozzi nella sua opera *Come Geltrude istruisce i suoi figli:* in questo scritto si parla di attività, di energia fattiva e di intuizione. Ascoltiamo ancora una volta Comenius: *"la conoscenza deve necessariamente cominciare attraverso i sensi (se è vero che niente può essere*

oggetto di comprensione se non è prima stato oggetto di sensazione). Perché dunque cominciare l'insegnamento con un'esposizione verbale delle cose e non con una osservazione reale di queste cose? È solamente quando questa osservazione delle cose sarà stata fatta che la parola potrà intervenire per spiegarla con efficacia". Non è diverso quanto sostiene Pestalozzi: *"ogni studio scientifico le cui definizioni sono state evocate nell'anima dei fanciulli come un deus ex machina o gli sono state soffiate nelle orecchie come un suggeritore di teatro, non ha maggior valore dello studio destinato a produrre dei miseri commedianti. Quando le forze fondamentali dello spirito umano sono addormentate e sul loro sonno non sono versate che vuote parole, non si possono formare che dei sognatori, i quali sognano ombre tanto più vane quanto più erano grandi e pretenziose le parole che furono versate sulla miseria e sulla noia dell'anima loro…le descrizioni devono precedere la definizioni. Se qualcosa è chiaro per me, ciò non significa che io lo possa definire, ma solo che io lo posso descrivere; io posso cioè dire con precisione come è fatto ma non che cosa è"*. Non bisogna mettere il bambino in condizioni d'inferiorità, cioè schiacciarlo con una didattica cattedratica, con un insegnamento verbale, altrimenti il suo apprendimento sarà passivo. È dalla sua diretta esperienza, dalla sua attività, dal suo rendersi conto da solo, attraverso i sensi, delle cose e delle operazioni sulle cose, che nascerà il concetto, prima vago e appena abbozzato, poi sempre più preciso, consistente, chiaro e universale. Uomini di epoche diverse – Comenius e Pestalozzi –, uomini di ambienti e ideologie diverse, appartenenti a mondi e a storie diverse, sentirono entrambi con la stessa forza quali dovevano essere i principi fondamentali di ogni educazione, e ne fecero il problema della loro vita. Questi principi si riassumono oggi in due parole: scuola attiva; scuola attiva che poggia su due idee fondamentali, espresse con chiarezza, per la prima volta, dai due grandi dell'educazione: metodo d'insegnamento per cicli e metodo intuitivo–costruttivo.

1.2 Volterra, Enriques e Castelnuovo

Fino agli inizi del secolo scorso, dei vari fattori che intervengono nell'insegnamento della Matematica – questioni pedagogiche e psicologiche, programmi, metodi – veniva considerato come essenziale solo il secondo: quello relativo ai programmi. Gli argomenti indicati nei programmi dovevano essere tali da "informare", sulla scienza matematica, e, nello stesso tempo, da "formare" le giovani menti. Secondo grandi matematici della seconda metà dell'ottocento come Cremona, Betti e Brioschi, la Matematica doveva avere un intento formativo, educativo, ma la formazione della mente era considerata solo come fine del programma e non, anche, come funzione moderatrice e ispiratrice del programma stesso. Partendo da questo presupposto si comprende quale minima importanza avesse, nell'insegnamento, il seguire questa o quella metodologia. Da queste idee fu dominato tutto l'insegnamento della Matematica nelle scuole primarie e secondarie italiane di qualunque ordine e grado fino ai primi decenni del '900: è infatti in questo periodo che matematici quali Volterra, Enriques e Castelnuovo iniziano finalmente a sentire, e a prevedere, quali scopi deve proporsi l'insegnamento della Matematica per formare nuove generazioni di uomini completi. In particolare, Federigo Enriques scaglia una severa critica alle metodologie in uso in quegli anni in una conferenza del 1906 rivolta ai professori di scienze: *"Se le matematiche* – dice – *vengono spesso riguardate come inutile peso per gli allievi, dipende in parte almeno dal carattere troppo formale che tende a prendere quell'insegnamento, da un falso concetto del rigore tutto intento a soddisfare certe minute esigenze di parole, da una critica analitica eccessiva e fuori posto, della quale invero basterebbe ritenere il risultato sintetico che pone nell'esperimento la base della geometria. Ma queste tendenze si riattaccano ad una causa più generale; cioè al fatto che le matematiche siano state studiate come un organismo a sé, riguardandone piuttosto la sistemazione astratta conseguita dopo uno sviluppo secolare, che non l'intima ragione storica. Si dimenticano per tal modo i problemi concreti che conferiscono interesse alle teorie, e sotto la formula o lo sviluppo del ragionamento non si vedono più i fatti ormai da lungo tempo acquisiti, ma soltanto la concatenazione in cui noi artificialmente li abbiamo stretti"*(Enriques F., 1906).

Nella stessa relazione Enriques *accenna* ad una nuova scienza allora agli albori della sistematizzazione – la Psicologia – ed auspica che tali studi possano un giorno aiutare nella loro professione le nuove generazioni di insegnanti: *"Noi non* *abbiamo ancora penetrato il segreto psicologico di questa pedagogia formativa dell'intelligenza, e se da taluno lodevolmente si fa qualcosa in questo senso, è d'uopo confessare che l'istruzione non sviluppa di regole, come dovrebbe, lo spirito d'iniziativa degli allievi".* Per Guido Castelnuovo è invece il mondo esterno, il mondo dell'industria, che dovrebbe catturare l'attenzione di chi compila i programmi di Matematica per un moderno insegnamento (Castelnuovo G., 1962).

Sono i primi anni del secolo scorso: i matematici che abbiamo citato erano lontani da un insegnamento diretto ai giovani delle scuole primarie e secondarie. Ma le sempre più vaste conquiste scientifiche e il progresso della tecnica facevano loro comprendere come i programmi di Cremona dovessero essere superati in una visione più attuale della scuola. Questi erano uomini che non erano mai entrati in una scuola e poco al corrente dei nuovi studi pedagogici che proprio in quegli anni apportavano idee feconde per l'insegnamento del calcolo e della misura nella scuola materna ed elementare (Montessori e Decroly), ma sentivano che era loro dovere non estraniarsi dai problemi della scuola.

1.3 Montessori e Decroly

I metodi di questi due educatori segnarono, agli inizi del '900, una linea d'azione particolarmente indicativa per l'insegnamento delle materie scientifiche. In quanto medici, essi furono entrambi condotti allo studio dei bambini intellettualmente o psichicamente anormali; per questi era evidente che si doveva far leva non sulle difficoltà intellettuali ma piuttosto sulla rispondenza dei sensi; si doveva cioè partire dal concreto. Furono perciò studiati, fin nei dettagli, i tipi di materiale e di esperienze che potevano esercitare un'azione sui sensi e, di riflesso, un'azione sulla mente. Le correlazioni *sensi-mente*, cioè *concreto-astratto*, erano, dati i soggetti, o rallentate o anormalmente accelerate. Comunque, una via d'indagine scientifica per giungere all'intelligenza era attraverso lo studio e questa via, opportunamente modificata, poteva applicarsi anche per i bambini normali, allo scopo di accelerare e di rendere più chiaro un processo d'acquisizione che, spesso, era lungo e tedioso. Il problema medico, psichiatrico, si trasforma in entrambi in problema pedagogico: da medici diventano pedagogisti.

La loro attenzione si rivolge in maniera particolare all'età pre-elementare e a quella elementare. Diamo un cenno delle due metodologie su un esempio particolare: l'acquisizione del concetto di Numero, dei primi numeri interi. Il bimbo d'oggi, così abituato alle ultime scoperte fatte nel mondo della tecnica che egli considera come patrimonio naturale, si trova, per quanto riguarda il Numero, come si trovavano i bambini di millenni di anni fa, come si trovano oggi i bambini dei popoli primitivi.

"Da uno a due e da due a tre": nelle metodologie precedenti quelle della Montessori e di Decroly, pur appoggiandosi sull'aiuto dei sensi, non si poneva l'accento sul passaggio da numero a numero, ma piuttosto si insisteva sulla percezione "diretta" di un determinato numero: non c'è *"da uno a due e da due a tre"*, ma piuttosto *"uno o due o tre"*. Non vi era, infatti, passaggio da numero a numero, non si insisteva cioè sulle operazioni, all'inizio ovviamente manuali, che si dovevano fare per passare da un numero ad un altro; si trattava, quindi, di una didattica basata su tante percezioni di immagini nella loro staticità, di cose, di oggetti, ma non su percezioni di trasformazioni, di operazioni. Ci si ispirava, dunque, al concetto di intuizione come contemplazione, non come costruzione attiva. Il metodo utilizzato dalla Montessori è detto, invece, *attivo-sintetico*: sintetico, perché costruttivo; cioè, dall'elemento si passa all'insieme degli elementi, al globale (Montessori M., 1952).

Il metodo del belga Decroly, pur avvicinandosi a quello della Montessori perché anch'esso di tipo operativo, ne differisce sostanzialmente per gli ideali e i mezzi d'attuazione. Il presupposto di Decroly è il seguente: la mente del bambino non è attratta dal dettaglio, dall'elemento, ma da una veduta d'insieme, del globale. Decroly non dà perciò in mano al bambino un materiale per costruire, ma suggerisce degli spunti da trarsi per lo più da fenomeni naturali in modo da condurre il bambino a delle osservazioni analitiche. Così, la crescita di una pianta o la quantità di acqua piovana raccolta in un recipiente in un dato tempo, condurranno a misurare e a contare. Decroly, in pratica, suggerisce al bambino quel tipo di analisi che di solito fanno i naturalisti; dall'osservazione globale si è condotti alla scomposizione del fenomeno, cioè all'analisi. Dal complesso si passa al semplice: il metodo di Decroly è, dunque, di tipo *attivo-analitico* (Decroly O., 1959).

Il merito della Montessori e di Decroly è comunque quello di essersi ispirati alla concezione pestalozziana dell'intuizione, e di averla sviluppata per la didattica di ogni disciplina, e in particolare per la Matematica (Castelnuovo E., 1964).

1.4 La didattica psicologica: Jean Piaget

Abbiamo brevemente visto come i metodi Montessori e Decroly seguivano vie didattiche opposte seppur entrambe “attive”: il primo è infatti un metodo sintetico, il secondo è analitico. Tali metodi sono entrambi criticati dalla Psicologia moderna. I materiali e gli espedienti che vengono offerti al bambino dalla Montessori e da Decroly hanno infatti per scopo il facilitare il passaggio dal quantitativo al qualitativo; manipolando il qualitativo si introducono a poco a poco il metrico ed il numerico: misura e Numero sono dunque “attaccati” a quel determinato concreto. Il bambino è quindi obbligato a seguire certi passaggi che gli vengono suggeriti se non dal maestro, dal materiale stesso con cui lavora.

Questa pedagogia non è, dunque, libera. È appunto la libertà nella costruzione matematica che vuol raggiungere la metodologia, basata su esperienze psicologiche, dello svizzero Jean Piaget. La concezione che ha Piaget del materiale, o meglio del ricorso all'oggetto e all'azione, è notevolmente diversa da quella dei due pedagogisti di cui già abbiamo parlato; anzi, l'evoluzione del significato di base concreta che troviamo in Piaget è essenzialmente dovuta ad una critica fatta alle due metodologie precedenti. Il materiale non deve, per Piaget, servire da spunto per far sentire la necessità del Numero o della misura, ma deve servire a sviluppare certe leggi che poi saranno necessarie per l'acquisizione di un concetto matematico, per esempio per la formazione del numero; certe leggi che spesso, erroneamente, si considerano come patrimonio del bambino fin dalla più tenera età. Piaget organizzò quindi una serie esperienze su migliaia di bambini e, da queste, scaturirono una serie di difficoltà e incomprensioni da parte dei bambini per quelle leggi senza le quali è impossibile costruire l'edificio matematico.

- *L'esperienza della conservazione degli insiemi*: si presentano al bambino due recipienti cilindrici di vetro, uguali, contenenti l'uno acqua rossa e l'altro acqua blu fino allo stesso livello. L'acqua del secondo recipiente si travasa in un terzo recipiente, sempre di vetro, molto più alto e più stretto, e si domanda al bambino se il primo e il terzo vaso contengono la stessa quantità di liquido. Risposta negativa fino ai 5 anni. I bimbi dicono *"ne contiene di più il terzo perché l'acqua arriva più in su"*. Anche se l'acqua del secondo recipiente viene travasata in due o tre vasi più piccoli, vi diranno ancora che questi vasi ne contengono di più *"perché ora sono tanti"*. È solo verso i 6 anni che si ha la conservazione dell'insieme: infatti, è solo a partire da questa età che il bambino inizia a possedere il concetto di *reversibilità*. Da questo genere di esperienze risulta che non è possibile che il bambino afferri il concetto di Numero fino a che gli manca la legge di conservazione degli insiemi, cioè la legge d'invarianza del numero stesso.
- *L'esperienza dell'ordinamento in serie*: per costruire il Numero è necessaria anche una condizione d'ordine. Infatti il bambino deve essere in grado di poter ordinare in serie degli elementi, e questo non si ottiene fino ai 5-6 anni. L'esperienza è la seguente: si dà al bambino un certo numero di regoli (a forma di parallelepipedo di uguale base), che differiscono di poco l'uno dall'altro, e gli si dice di disporli in ordine di altezza. Questa è un'operazione difficilissima per un bambino. Infatti, i più piccoli riescono a confrontare solo due regoli; quelli un po' più grandi sanno fare raggruppamenti di pochi regoli. È solo verso i 5-6 anni che il bambino trova il metodo: inizia, cioè, a scegliere il più piccolo e lo confronta con tutti gli altri. È chiaro a questo punto come sia necessario possedere questa legge di seriazione per poter costruire il Numero: infatti il 2 è compreso nel 3, il 3 nel 4, ecc.
- *L'esperienza sulla corrispondenza biunivoca*: si sostiene, generalmente, che il bambino "possiede" se ha compreso la legge di corrispondenza biunivoca. Piaget prova con un'esperienza, diventata ormai classica, che ciò non è vero: la corrispondenza può rappresentare solo un fatto

percettivo per il bambino. L'esperienza è la seguente: vengono utilizzate due serie di gettoni di uguale grandezza, alcuni di colore rosso e altri di colore blu. Si dispongono su un tavolo sei gettoni rossi allineati, ad una certa distanza uno dall'altro; si chiede al bambino di disporne altrettanti di colore blu. Si osservano allora tre stadi nella comprensione del fanciullo: i più piccoli, fino a verso i quattro anni e mezzo, giudicheranno semplicemente la quantità dallo spazio occupato; essi disporranno dei gettoni blu vicini gli uni agli altri, senza corrispondenza, ma in mdo che si formi la stessa lunghezza realizzata da quelli rossi. Questo stadio è presto sorpassato da una corrispondenza propriamente detta: il bambino metterà un gettone blu in corrispondenza di ogni gettone rosso. A questo punto siamo portati a dire che il bambino possiede la corrispondenza biunivoca, e dunque il Numero, almeno allo stadio di manipolazione operatoria. Ma se si distanziano i gettoni di *una* serie uno dall'altro, insistendo però sul fatto che non si toglie né si aggiunge nulla, il bambino vi dirà che ora i gettoni blu non sono più tanti quanti i rossi. La corrispondenza non era altro che una forma percettiva: infatti, nel momento in cui è venuta a mancare la corrispondenza visiva non vi è stata più equivalenza per il bambino. È solo verso i 5-6 anni che il bimbo ammetterà che l'equivalenza dura qualunque sia la figura geometrica formata dai gettoni.

Piaget dimostra dunque, con indagini psicologiche, che la costruzione del Numero da parte del fanciullo non può farsi se prima non si sono costruite certe leggi, e, da esperienze condotte su larghissima scala, risulta che queste leggi, e quindi il Numero, non si formano fino ad una certa età.

"Se poi si vuole arrivare - dice Piaget - *al concetto di misura, si sarà colpiti ancora di più dalla natura del tutto primitiva qualitativa delle nozioni primitive"*. Cominciamo col riferire delle esperienze condotte su bambini in tenera età (dai 2 ai 3 anni), che possono sembrare strane dal punto di vista matematico. Sono esperienze che si mettono in evidenza facendo copiare dei disegni: il quadrato, il cerchio, il triangolo o il rettangolo sono tutti copiati dal bambino come dei tondi. Si dirà: è la difficoltà manuale che non permette al bimbo di disegnare in maniere diverse queste figure! Ma ci si accorge subito che il bambino copia in modo

diverso una croce, ad esempio. Cioè il bambino è colpito dalle forme chiuse e dalle forme aperte. Così se sono disegnati due cerchi uno dentro l'altro, o uno fuori dell'altro, o secanti, il bambino copierà con scrupolosa esattezza la reciproca posizione. Sono dunque le forme topologiche che colpiscono prima di tutto la sua attenzione; la percezione euclidea viene dopo, solamente verso i 4 anni. Esponiamo ora le leggi che conducono alla misura e facciamo due esperienze: una mette in evidenza la non conservazione delle lunghezze, l'altra la non conservazione delle superfici.

- Si dispongono su un tavolo due pupazzetti a una certa distanza l'uno dall'altro; poi si mette uno spesso cartone fra i due, e si domanda al bambino se i pupazzetti sono sempre alla stessa distanza di prima. I bimbi in tenera età vi diranno che ora la distanza è cambiata, che ora i pupazzetti sono più vicini. E se nel cartone aprite una finestrella, vi diranno che quando si apre la finestra lo spazio è lo stesso, quando si chiude è di meno. L'errore potrebbe essere forse spiegato pensando al senso che i bambini danno alla parola "spazio". Spazio per i bambini è spazio vuoto; è una regione dove ci si può distendere. Se io metto un cartone, lo spazio vuoto diminuisce. È interessante osservare che questo concetto che il bimbo si fà dello spazio corrisponde al significato etimologico della parola a cui molti glottologi attribuiscono il significato originario di "distesa".
- Dello stesso genere è l'interessante esperienza sulla non conservazione della superficie. Si ripresentano al bambino due quadrati uguali in cartone verde; questi rappresentano due prati; ci si mettono sopra due mucche, e si domanda: *"le mucche hanno la stessa quantità d'erba da mangiare?"*. Tutti i bimbi rispondono affermativamente. Poi, sul primo di questi cartoni, e precisamente nel centro, si dispone un cartoncino marrone e si dice che questo rappresenta una casa. Si chiede al bambino: "*adesso le mucche hanno la stessa quantità di erba da mangiare?*". Tutti i bambini sono d'accordo sul fatto che la mucca del primo prato ha meno da mangiare perché c'è lo spazio occupato dalla casa. Ma se anche sul secondo cartone si mette un cartoncino marrone uguale a quello di prima, e lo si dispone in un angolo, invece che nel centro, i bambini cominceranno

a confondersi e risponderanno che ora lo spazio libero a disposizione delle mucche non è lo stesso, perché quando la casa è nell'angolo la mucca ha più spazio, ha da mangiare di più. Errori di questo genere sono da attribuirsi sia al significato che si dà comunemente alla parola "spazio", sia alla confusione che il bambino fà fra la nozione di superficie e quella di perimetro; sia ancora, e forse soprattutto, al fatto che per arrivare alla conclusione che le mucche hanno la stessa quantità di erba da mangiare occorre capire che i due prati sono equivalenti, in quanto sono differenze di poligoni a due a due uguali, il che esige opportune facoltà di astrazione. Si conclude che non è possibile costruire il concetto di misura fino a che non esistono le leggi di conservazione, e di queste leggi il bimbo non si impadronisce fino a verso i 6 anni.

Da queste esperienze si comprende quale sia il senso che Piaget attribuisce al materiale. La funzione del materiale è, per Piaget, esclusivamente operativa: sono le trasformazioni da configurazione a configurazione su cui devono fissarsi l'attenzione e l'attività del bambino; e non le configurazioni stesse, da cui, anzi, egli deve liberarsi a poco a poco. Dalle indagini condotte su migliaia di bimbi, Piaget deduce che nel bambino nascono prima le strutture topologiche, poi, quasi contemporaneamente, quelle di tipo algebrico e quelle dell'ordine (Piaget J., Szeminska A., 1968; Piaget J., Inhelder B., Szeminska A., 1948) Ora, a parte l'interesse psicologico, il fatto veramente notevole è che tali strutture corrispondono a quelle su cui, secondo la scuola di Bourbaki, è basato tutto l'edificio matematico. Questa corrispondenza fra la nascita dei primi concetti matematici nella mente del fanciullo e le fondamenta della Matematica moderna, che pone a base dell'edificio matematico un sistema operatorio, fa pensare e deve avere i suoi riflessi nella didattica. Le esperienze di cui abbiamo parlato si riferiscono all'età pre-elementare; ma i lavori di Piaget si estendono anche al periodo elementare e pre-adolescenziale (Piaget J., Inhelder B., 1955)

Alle idee di Piaget si ispirarono vari lavori della Scuola di Ginevra e, fra gli altri, i libri di Louis Johannot *(Le raisonnement mathèmatique de l'adolescent)* e di Hans Aebli *(Didactique psychologique. Application à la didactique de la psychologie de Jean Piaget)*, libri che riguardano, in particolare, l'età della preadolescenza. Questa scuola di "didattica psicologica", basata, cioè, su studi di psicologia infantile, viene identificata con il nome di "didattica genetica", perché non si limita a studiare le reazioni di un periodo isolato dell'infanzia, ma analizza, fin dal suo nascere, la formazione dei concetti e delle operazioni nelle mente del fanciullo. Ciò è estremamente importante ai fini dell'insegnamento: *"una didattica generale* – dice Aebli nell'introduzione del suo libro – *studia i caratteri fondamentali dei processi formatori e ne deduce i principi metodologici sui quali deve basarsi l'insegnamento"* (Aebli H., 1957). L'idea fondamentale di questa scuola è che l'interesse del bambino non è attirato dall'oggetto materiale in sé o dall'ente matematico, ma piuttosto dalle operazioni su oggetti o su enti; operazioni che, naturalmente, saranno, prima, di carattere manipolatorio, per poi interiorizzarsi in un tempo successivo, passando così dal concreto all'astratto. *"Il ricorso all'azione* – dice Piaget nella prefazione scritta al libro di Michel Margot – *non conduce affatto a un semplice empirismo ma, al contrario, prepara l'ulteriore deduzione formale, purché si tenga presente che l'azione, ben condotta, può già essere operatoria, e che la formalizzazione la più spinta è anche operatoria"*. Il primato dell'operazione nello sviluppo delle strutture mentali porta, dunque, alla necessità di una pedagogia nuova, ad un insegnamento attivo basato sull'operazione. È però bene ribadire ancora una volta che le esperienze di Piaget si riferiscono, in particolare, ai bambini piccoli: è soprattutto per l'età pre-elementare ed elementare che queste esperienze sono state organizzate su larghissima scala, e, pur non essendo esenti da critiche, ci danno una valida base per una didattica psicologica della Matematica per quella età.

1.5 Quale Matematica insegnare

Fin dall'antichità, la Matematica è progredita non solo accumulando risultati, ma anche rivedendo i suoi *fondamenti* e ristrutturandosi nel suo complesso. Nel corso di questa evoluzione secolare, essa ha prodotto concetti che permettono di affrontare sempre più efficacemente un numero crescente di fenomeni matematici. Molti di questi concetti, ma non tutti, si collocano assai lontano dal pensiero comune, e sono di difficile accesso (R. Bkouche, B. Charlot, N. Rouche, 1991). Si può anche dire che il divario tra il pensiero comune e la matematica viva, quella dei ricercatori, cresce col passare del tempo. Si pone allora il difficile problema di sapere che cosa possa significare insegnare ai bambini d'oggi la Matematica di oggi. Poiché è evidente che i bambini, e poi gli adolescenti, non possono accedere immediatamente alla Matematica contemporanea. La Matematica deve partire dal terreno degli allievi e dal loro linguaggio, anche se è vero che non ci si può accampare su questo terreno. Dunque in che cosa la Matematica d'oggi può e deve intervenire nell'insegnamento elementare?

Se è vero che la Matematica ha prodotto nel corso dei secoli concetti difficilmente accessibili, è altrettanto vero che essa ha anche prodotto, talvolta, dei concetti essenziali, tanto semplici e utili da essere entrati nel pensiero comune ed essere divenuti strumenti indispensabili nella maggior parte delle attività umane: ad esempio, i concetti di "numero decimale con virgola", le "frazioni" o i "grafici" sono concetti dei quali già si servivano i matematici ed i fisici nel XV secolo, ma dei quali ancora ci serviamo a tutt'oggi e che, in quanto semplici e utili, vengono ancora insegnati nelle scuole. Ma anche la Matematica più recente ha prodotto alcuni concetti semplici e utili, che sono diventati strumenti di pensiero quotidiani e oggetti di insegnamento elementare: ad esempio, il concetto di "trasformazione", legato al concetto algebrico di "gruppo". A livello di ricerca, le trasformazioni hanno tratto origine dal riordino dei fondamenti della Geometria (Klein F., 1974), attraverso il cosiddetto "Programma di Erlangen". Nel quotidiano, le trasformazioni rinviano ai movimenti elementari (traslazioni, rotazioni e ribaltamenti di oggetti piani), a piegature, riflessioni negli specchi, ingrandimenti fotografici, rappresentazioni in scala, oggetti che presentano varie simmetrie. Esiste una miriade di supporti intuitivi che contribuiscono a rendere familiari queste nozioni, benché la loro maturazione matematica nel corso dei secoli non sia stata affatto banale. Inoltre, due trasformazioni particolari, fra loro imparentate, la traslazione e l'omotetia, hanno un legame profondo con le due operazioni fondamentali sui numeri reali, cioè l'addizione e la moltiplicazione (Artin E., 1978). Un altro esempio potrebbe essere quello di "algoritmo". Un algoritmo è una successione di istruzioni che conducono alla risoluzione di un problema. Da sempre la Matematica ha prodotto algoritmi: uno dei più noti risale infatti a Euclide. Ma i progressi dell'Informatica, uniti alla diffusione delle macchine calcolatrici programmabili e dei computers, hanno fatto si che gli algoritmi siano oggi d'uso comune nelle attività umane e che sempre più persone ne producano e se ne servano. Gli algoritmi sono quindi il canale principale attraverso il quale la Matematica si applica alla realtà tecnica, economica e sociale.

Come abbiamo detto all'inizio del paragrafo, nel corso dei secoli la Matematica ha riordinato i suoi fondamenti e si è ristrutturata nel suo insieme; questo comporta che alcuni argomenti elementari o siano completamente scomparsi dalla Matematica costituita, o siano stati assorbiti in un capitolo più generale e più astratto. Ad esempio le "grandezze", che si possono confrontare, addizionare e dividere in parti anche prima di ogni idea di misurarle, sono sostanzialmente scomparse dalla Matematica del XX secolo. Ora, invece, è proprio grazie a loro, insieme ad altri argomenti, che tutti i bambini, a partire dalla scuola materna, apprendono i rudimenti della Matematica. Le manipolazioni di grandezze costituiscono infatti, e in modo essenziale, alla costruzione della Matematica in ciascuna mente. Un altro fenomeno analogo riguarda la misura delle aree e dei volumi, che un tempo costituiva l'argomento più vasto della Geometria tradizionale, e che in tempi più recenti è stato invece, e purtroppo, assorbito completamente nel capitolo della Matematica detto Analisi. Ora, l'Analisi apparirà come una grossa macchina incomprensibile a coloro che, dalla scuola primaria, non avranno imparato a misurare inizialmente oggetti semplici come i rettangoli, i poligoni, poi oggetti meno elementari come i cerchi o le piramidi. La problematica delle aree deve quindi essere vissuta per tappe, durante tutte le età della giovinezza e fino all'apprendimento dell'Analisi.

1.6 L'educazione matematica oggi

Negli ultimi anni si sta quindi facendo strada l'idea che l'educazione matematica deve contribuire a una formazione culturale del cittadino, in modo da consentirgli di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica. Le competenze del cittadino, al cui raggiungimento concorre l'educazione matematica, sono per esempio: esprimere adeguatamente informazioni, intuire e immaginare, risolvere e porsi problemi, progettare e costruire modelli di situazioni reali, operare scelte in condizioni di incertezza. Infatti, la conoscenza dei linguaggi scientifici, e tra essi in primo luogo di quello matematico, si rivela sempre più essenziale per l'acquisizione di una corretta capacità di giudizio. Per questo la Matematica concorre, insieme con le scienze sperimentali, alla formazione di una dimensione culturale scientifica. In particolare, l'insegnamento della Matematica deve avviare gradualmente, a partire da campi di esperienza ricchi per l'allievo, all'uso del linguaggio e del ragionamento matematico, come strumenti per l'interpretazione del reale, non unicamente come bagaglio astratto di nozioni. La formazione del curriculum scolastico non può prescindere dal considerare sia la funzione strumentale, sia quella culturale della Matematica: strumento essenziale per una comprensione quantitativa della realtà da un lato, e dall'altro forma di sapere logicamente coerente e sistematica, caratterizzata da una forte unità culturale. Entrambe sono essenziali per una formazione equilibrata degli studenti: priva del suo carattere strumentale, la Matematica sarebbe un puro gioco di segni senza significato; senza una visione globale, essa diventerebbe quindi una serie di ricette prive di metodo e di giustificazione. I due aspetti si intrecciano, ed è necessario che l'insegnante li introduca entrambi in modo equilibrato fin dai primi anni della scuola elementare. Dentro a competenze strumentali come contare, eseguire semplici operazioni aritmetiche (sia mentalmente che per iscritto), saper leggere dati rappresentati con una tabella, un istogramma, un diagramma a torta, o un grafico, misurare una grandezza, calcolare una probabilità, è infatti sempre presente un aspetto culturale, che collega tali competenze alla storia della nostra civiltà e alla complessa realtà in cui viviamo. D'altra parte, l'aspetto culturale, che fa riferimento a una serie di conoscenze teoriche, storiche ed epistemologiche - quali la padronanza delle idee fondamentali di una teoria, la capacità di situarle in un processo evolutivo, di riflettere sui principi e sui metodi impiegati - non ha senso senza i riferimenti ai calcoli, al gioco delle ipotesi, ai tentativi ed errori per validarle, ecc., che costituiscono il terreno concreto e vivo da cui le conoscenze teoriche della Matematica traggono alimento. Per questo, entrambi i tipi di competenze costituiscono obiettivi di lungo termine, alcuni dei quali potranno essere conseguiti compiutamente nella scuola superiore; la loro costruzione si deve però iniziare già nella scuola elementare e nella scuola media, realizzando una didattica di tipo "elicoidale", che riprenda cioè gli argomenti approfondendoli di volta in volta. Il nesso profondo tra aspetti strumentali e culturali potrà, in particolare, essere colto dagli alunni, proponendo loro opportune riflessioni storiche, introdotte gradualmente, senza forzature e anticipazioni. Essendo per sua natura di carattere critico, la riflessione storica dovrà infatti attendere che i concetti relativi si siano consolidati, in modo da non generare confusione e quindi incertezza negli scolari. D'altra parte, è importante che non si operino delle forzature, o peggio si inventi una storia inesistente, per adattare le problematiche storiche alle conoscenze degli alunni: la narrazione storica potrà e dovrà essere semplificata, ma non falsata.

Con riferimento alla doppia modalità introdotta sopra, si individuano alcuni nuclei essenziali su cui costruire le competenze matematiche dell'allievo; quattro sono nuclei tematici e caratterizzano i contenuti dell'educazione matematica nella scuola elementare e media: il numero, lo spazio e le figure, le relazioni, i dati e le previsioni. L'insegnante dovrà cercare di svilupparli in modo coordinato, cogliendo ogni occasione di collegamenti interni e con altre discipline. Vi sono poi tre nuclei trasversali, centrati sui processi degli allievi: misurare, argomentare e congetturare, risolvere e porsi problemi. Il primo consente un approccio corporeo ed esperienziale alle grandezze, in collegamento con le Scienze, per ricavare relazioni tra le grandezze esperite e costruire modelli di fenomeni studiati. Il secondo caratterizza le attività che favoriscono il passaggio dalle nozioni intuitive e dai livelli operativi a forme di pensiero più avanzate che, nella scuola superiore, saranno coinvolte nella dimostrazione matematica, nel calcolo algebrico, nell'uso di modelli matematici in contesti vari. Il terzo offre occasioni importanti agli allievi per costruire nuovi concetti e abilità, per arricchire di significati concetti già appresi e per verificare l'operatività degli apprendimenti realizzati in precedenza.

1.7 Attività didattiche specifiche nell’apprendimento della Matematica

Come ben evidenziato dall’UMI (Unione Matematica Italiana: http://umi.dm.unibo.it), sin dal primo anno della scuola elementare è opportuno sviluppare i concetti matematici in attività didattiche significative, in cui l’alunno possa essere attivamente coinvolto e motivato ad affrontare e risolvere problemi. Un’attività didattica può essere considerata significativa se consente l’introduzione motivata di strumenti culturali della Matematica per studiare fatti e fenomeni attraverso un approccio quantitativo, se contribuisce alla costruzione dei loro significati e se dà senso al lavoro riflessivo su di essi. Lo sviluppo in classe di attività didattiche con tali caratteristiche dovrebbe avere come fine la costruzione delle capacità di esercitare un controllo sulla realtà secondo i modelli della razionalità scientifica.

Lo sviluppo del concetto di numero naturale va stimolato valorizzando le precedenti esperienze degli alunni nel contare e nel riconoscere e usare simboli numerici, fatte in contesti di gioco e di vita familiare e sociale. Nella costruzione del numero naturale concorrono diversi punti di vista (ordinalità, cardinalità, misura, ecc.); l’attività didattica deve quindi consentire agli alunni di appropriarsi di tali punti di vista, offrendo loro una varietà di modi rappresentativi per operare con i numeri naturali in contesti diversi.

Come esempio di attività didattica possiamo considerare l'uso del calendario (lineare) che consente di annotare le esperienze degli alunni, di ordinarle (usando inizialmente i numeri dei giorni del mese) e di visualizzarne la distanza nel tempo. Sul calendario si possono porre e risolvere problemi inerenti la misura di intervalli temporali, favorendo la costruzione di strategie risolutive via via più articolate e complesse (come nel caso di durate con estremi in mesi diversi). Altri esempi di attività possono riguardare la costruzione/lettura di istogrammi a crocette per analizzare quantitativamente situazioni familiari ai bambini e l’uso di monete del sistema monetario dell’Euro (o di loro rappresentazioni iconiche) in attività di compravendita reali o simulate. In particolare, tale uso può facilitare la comprensione del funzionamento del sistema di scrittura decimale-posizionale dei numeri.

Un modello rappresentativo che assume grande importanza nella costruzione delle competenze numeriche dei bambini è la linea dei numeri. Essa permette di evidenziare la struttura di base dei numeri naturali e costituisce un valido strumento per l'esecuzione di calcoli e per la percezione di alcune relazioni numeriche (8 è più vicino a 10 che a 5, 7 dista 3 da 10…). La linea dei numeri è uno dei primi contesti significativi per lo studio di regolarità numeriche e per lo sviluppo della riflessione sui numeri; in altre parole, per porre e risolvere i primi problemi interni alla Matematica.

Tra gli obiettivi che si collocano verso il termine della scuola media possiamo considerare la costruzione a lungo termine del modello matematico della proporzionalità diretta. Tale costruzione può essere realizzata attraverso una successione di situazioni problematiche relative ad ambiti esperienziali diversi (ad esempio: relazione tra perimetro e lato di un poligono regolare; relazione tra altezza di un oggetto e lunghezza dell'ombra di tale oggetto proiettata dal sole sul terreno; allungamento di una molla, in funzione del peso; ecc.), che consentano via via di evidenziare una struttura matematica comune adatta a descriverle e a trattarle quantitativamente.

A questo stesso livello scolare il passaggio dai numeri naturali ai numeri razionali crea, in generale, molti problemi sul piano dell'apprendimento. Le situazioni didattiche progettate e gestite dagli insegnanti dovranno essere in grado di favorire il passaggio da un uso operativo delle frazioni in contesti significativi, alla esplorazione e riflessione sulle proprietà che caratterizzano le frazioni in quanto oggetto di studio, con il fine di costruire gradualmente un'idea appropriata dell'insieme numerico dei numeri razionali che esse rappresentano.

Durante la scuola elementare e la scuola media gli alunni devono operare con la misura per affrontare problemi in contesti diversi, quantificando aspetti della realtà fisica (lunghezze, masse, ecc.) o aspetti della realtà economica e sociale. Un itinerario di lavoro per la misura dovrebbe quindi comprendere il confronto diretto, il confronto indiretto con campioni arbitrari e il confronto indiretto con le unità del sistema convenzionale. Le attività di misura contribuiscono a costruire il significato dei numeri decimali. Ad esempio una notazione come "2,15 m" può essere il punto di arrivo di un itinerario didattico a partire da espressioni come "2 m e 15 cm" e "215 cm", introdotte sulla base del loro significato concreto. Le attività di misura consentono, inoltre, di introdurre in un contesto controllabile dall'alunno altri tipi di notazione, la notazione esponenziale e quella frazionaria, per esprimere relazioni all'interno dello stesso sistema di misura (2 km =2*10^3 m; 100 g =1/10 kg; 250 g=1/4kg).

Sia nella scuola elementare che nella scuola media, particolare cura e attenzione deve essere posta allo sviluppo di competenze coinvolte nella raccolta sistematica di informazioni quantitative, nella loro rappresentazione, sintesi e interpretazione; tutto ciò con il fine di descrivere fenomeni collettivi, o per cogliere nessi che li legano o per studiare e modellizzare la distribuzione dei dati, fino al confronto tra previsioni a priori (probabilità) e frequenze registrate.

Nella soluzione dei problemi aritmetici, particolare attenzione deve essere posta alla costruzione della capacità di verbalizzare la strategia risolutiva e al passaggio alla sua formalizzazione mediante l'uso dei simboli "+, -, x, :", avendo cura di superare positivamente le eventuali contraddizioni che possono emergere tra la formalizzazione e la strategia risolutiva spontanea del bambino. Ad esempio, nella soluzione di problemi di struttura additiva il passaggio da una strategia spontanea di completamento ad una formalizzazione tramite una espressione del tipo "27-12=15" non è immediato e richiede opportune mediazioni da parte dell'insegnante.

Le attività didattiche dovrebbero sviluppare la capacità di produrre ipotesi in modo argomentato (con l'uso di strumenti matematici appropriati) facendo riferimento all'esperienza e alle informazioni quantitative disponibili. La verifica delle ipotesi prodotte deve utilizzare adeguati mezzi linguistici e matematici ed essere condotta con metodi diversi (fino alla costruzione di collegamenti di tipo deduttivo tra "premesse" certe e "conseguenze" ricavabili da esse e al confronto tra "modelli" e "realtà"). Come accennato prima, la costruzione di tali competenze prepara il terreno allo sviluppo del pensiero teorico in Matematica, che sarà pienamente raggiunto nella scuola secondaria superiore (dimostrazione matematica, calcolo algebrico, modelli matematici).

Conformemente con lo spirito di questi orientamenti, l'insegnamento della Geometria ha un ruolo cruciale nel costruire progressivamente una visione della

Matematica come sistema di strumenti e di metodi conoscitivi rivolti sia verso l'esterno (problemi e fenomeni della realtà fisica, tecnologica, ecc...) sia verso l'interno della Matematica stessa (individuazione di regolarità e formulazione e verifica di congetture, fino alle soglie della dimostrazione; riflessione su problemi di rappresentazione, ecc…). In particolare, il disegno, il riconoscimento e la localizzazione di oggetti e forme e lo studio delle principali figure geometriche piane e solide, e delle loro trasformazioni elementari, dovrebbero essere collegate a situazioni problematiche in cui realizzare attività via via più impegnative di modellizzazione geometrica nel piano o nello spazio (a titolo esemplificativo, si possono considerare la rappresentazione piana di situazioni spaziali o lo studio del fenomeno delle ombre del sole, o situazioni di interesse tecnologico: meccanismi articolati, ecc…). Tali situazioni consentono agli alunni di compiere esplorazioni e di osservare e scoprire regolarità, con il fine di giungere a produrre e verificare ipotesi (scritte sotto forma di enunciati) per l'interpretazione e la soluzione con strumenti geometrici del problema affrontato.

In generale, le attività didattiche possono essere caratterizzate metodologicamente dalla pratica della verbalizzazione, dalla produzione e dalla verifica di ipotesi argomentate (vedi indicazioni precedenti) e dal ruolo di mediazione dell'insegnante in tutte le fasi dell'attività. L'insegnante eserciterà il suo ruolo di mediazione sia in modo diretto, attraverso l'introduzione degli strumenti matematici necessari in relazione alle diverse situazioni didattiche, sia in modo indiretto, utilizzando le produzioni individuali degli alunni (da confrontare e discutere in classe) e attraverso la valorizzazione dei contributi degli alunni durante le discussione in classe e il lavoro di gruppo.

È consigliabile sviluppare attività nell'ambito di progetti didattici di medio-lungo periodo. I tempi medio-lunghi costituiscono la condizione che può garantire a tutti i bambini di compiere il consolidamento tecnico, l'approfondimento operativo e la riflessione necessari per giungere ad una piena padronanza delle competenze matematiche coinvolte nell'attività. L'insegnante cercherà di trovare un equilibrio tra le attività più costruttive e formative e quelle di consolidamento tecnico e operativo, tenendo conto delle necessità della classe in cui opera.

1.8 Contenuti didattici e contesti di apprendimento della Matematica

Nella scuola elementare e media la costruzione di competenze matematiche va perseguita in contesti culturalmente ricchi e motivanti, che permettano agli allievi esperienze cognitive significative e consonanti con quelle condotte in altri ambiti: scientifici, linguistici, motori, figurativi, ecc.

All’inizio della scuola elementare, infatti, il bambino ha già fatto una serie di esperienze di carattere matematico – nella scuola dell’infanzia, in contesti di gioco e di vita familiare e sociale – e ha già consolidato alcune fondamentali competenze logico-matematiche. Più precisamente, verso i sei anni egli ha maturato esperienze significative relativamente alle seguenti competenze: contare oggetti e valutarne la quantità sul piano concreto; eseguire semplici operazioni sempre sul piano concreto; confrontare, ordinare, classificare, porre in relazione oggetti in rapporto a diverse proprietà (estensione, lunghezza, altezza, forma, colore,…), ricorrendo a modi più o meno sistematici; utilizzare concretamente semplici strumenti di misura; usare simboli per la registrazione; risolvere semplici problemi tratti dalla vita quotidiana e di interesse immediato; orientarsi nello spazio (sopra/sotto, avanti/indietro,…) e nel tempo (prima/dopo); localizzare persone e oggetti nello spazio; rappresentare percorsi ed eseguirli anche dietro semplici indicazioni verbali. Infine, il bambino comincia a formulare semplici ipotesi in ordine a fatti di vita quotidiana.

Occorre comunque avere ben presente che il percorso per il raggiungimento dei concetti matematici e della loro formalizzazione non è lineare, ma passa necessariamente per momenti cruciali che costituiscono salti cognitivi in quanto affrontano concetti che possono costituire ostacoli per l'apprendimento o essere fonte di fraintendimenti e misconcetti. Un tipico esempio è l'introduzione dei decimali o delle frazioni. Ad esempio, nell'introdurre le moltiplicazioni con i numeri decimali gli allievi si scontrano con l’ostacolo, indotto dal modello dei numeri naturali, che non sempre il prodotto fra due numeri decimali è maggiore dei due fattori. Analogamente, nel confronto fra numeri decimali, è bene evidenziare, per esempio, che 0,45 è minore di 0,6 (e non viceversa come alcuni allievi credono sulla base che 6 è minore di 45). Per le frazioni, il modello forte dei naturali anche qui può essere fonte di ostacoli; occorrono interventi didattici opportuni per porvi rimedio. Ad esempio, si sconsiglia di introdurre la procedura di addizione di due numeri razionali rappresentati sotto forma di frazione che fa uso della scomposizione in fattori dei denominatori: è invece opportuno insistere sul concetto più “geometrico” di frazioni equivalenti, e far notare che, per addizionare due numeri razionali rappresentati sotto forma di frazioni, è sufficiente trasformare le due frazioni date in frazioni equivalenti, ma aventi lo stesso denominatore.

In tutti questi casi, è comunque fondamentale l'attivazione di esplorazioni cognitivamente ricche in campi di esperienza significativi per l'allievo, in sinergia con esperienze parallele condotte nei vari ambiti disciplinari; in tali attività sarà essenziale la mediazione del linguaggio naturale, sia parlato che scritto. La trasposizione didattica della Matematica va infatti effettuata dall'insegnante nel concreto della sua classe, tenendo conto che la Matematica deve essere strutturata opportunamente in campi di problemi, che hanno sia uno statuto epistemologico che cognitivo. Ad esempio, i problemi moltiplicativi fanno riferimento, da un lato, a un complesso di situazioni concrete in cui gli allievi compiono esperienze cognitive varie; dall'altro, corrispondono a concetti matematicamente rilevanti che gli allievi appunto, costruiscono imparando a sintetizzare quanto esperito col linguaggio aritmetico. Gli aspetti ludici possono parimenti favorire situazioni di apprendimento significative per gli allievi e contribuire all'immagine di una Matematica dal volto umano.

L'esperienza e la verbalizzazione col linguaggio naturale dovranno precedere la formalizzazione e la riflessione sui sistemi di notazione simbolica propri della Matematica. Per esempio, prima di imparare a formalizzare una strategia risolutiva per mezzo dei segni dell’Aritmetica, i bambini dovranno esplorare e operare in campi di esperienza in cui attuare attività di quantificazione, utilizzando strumenti e sistemi di rappresentazione che sono caratteristici del campo stesso (il calendario lineare per risolvere problemi legati al tempo; monete o loro rappresentazioni per risolvere problemi di compravendita di beni). Analogamente, per le conoscenze legate allo spazio e alle figure sarà essenziale l'esplorazione dinamica in contesti vari, supportata eventualmente da opportuni software di Geometria dinamica, e l'uso del linguaggio naturale su cui fondare la transizione dalle esperienze alle notazioni matematiche. In alcuni contesti, l'esposizione al linguaggio simbolico potrà anche precedere l'attività di verbalizzazione, purché essa sia funzionale alla possibilità di provocare negli alunni processi interpretativi fruttuosi in relazione alle problematiche del contesto. In entrambi i casi l'acquisizione di un linguaggio rigoroso deve essere un obiettivo da raggiungere nel lungo periodo e una conquista cui gli allievi giungono, col supporto dell'insegnante, a partire dalle loro concrete produzione verbali, messe a confronto e opportunamente discusse nella classe.

È quindi necessario che l'insegnante progetti e realizzi ambienti di apprendimento adeguati nei vari campi di esperienza: in tali ambienti saranno privilegiate l'attività di costruzione e di soluzione di problemi, nonché quella di matematizzazione e di modellizzazione. In questo contesto è opportuno distinguere tra esercizi, problemi, situazioni da modellizzare. I primi richiedono solo l'applicazione di regole e procedure note e codificate; nei problemi la scelta delle strategie risolutive è lasciata al solutore ed esige un pizzico di fantasia e di inventiva; nella situazione da modellizzare non è nemmeno esplicitata la formulazione delle domande per le quali si intenderebbe cercare una risposta (si parla in questo caso anche di "problema aperto"). La distinzione è naturalmente relativa al bagaglio di conoscenze degli allievi: ciò che è problema a una data età può diventare esercizio in età successiva. Proporre problemi e situazioni da modellizzare è un'attività indispensabile fin dai primi anni di scolarità; naturalmente si dovranno alternare momenti di posizione e di risoluzione di problemi con fasi di sistemazione e consolidamento delle conoscenze, dove anche gli esercizi hanno un ruolo importante per l'acquisizione e il consolidamento dei principali automatismi di calcolo e di ragionamento. È comunque cruciale che l'insegnante utilizzi problemi e situazioni da modellizzare al fine di mobilitare le risorse intellettuali degli allievi, anche al di fuori delle competenze strettamente matematiche, contribuendo in tal modo alla loro formazione generale.

Grande importanza come mediatori nei processi di acquisizione di conoscenza e nel supporto alla comprensione del nesso tra idee matematiche e cultura, assumono i contesti ludici e gli strumenti, dai più semplici, come i materiali manipolabili (ad es., il compasso o il righello), fino agli strumenti tecnologici più complessi (tipicamente il computer o le calcolatrici numeriche e simboliche, ma anche le 'macchine', nel senso più ampio del termine, dagli orologi al distributore di bibite, ecc.).

Varie ricerche suggeriscono l'importanza di software che, nella loro interfaccia, rendono disponibili oggetti computazionali con i quali l'alunno può interagire per esplorare un dominio di conoscenza matematico o la matematica che caratterizza un campo di conoscenza extramatematico.

Il conseguimento delle competenze e conoscenze sopra elencate richiede, ovviamente, tempo e partecipazione attiva degli allievi al progetto formativo. I ritmi dell'azione di insegnamento-apprendimento devono essere adeguati alle reali esigenze degli allievi e non possono essere dettati da programmi caratterizzati da un'eccessiva segmentazione dei contenuti o da moduli che presuppongano improbabili percorsi quasi indipendenti fra loro. In altri termini, la progettazione dell'insegnante va condotta secondo una logica di una didattica lunga, attenta a garantire agli allievi possibilità di costruzioni di significato per gli oggetti di insegnamento-apprendimento.

Una cura particolare va quindi posta alla scelta dei contesti in cui situare l'attività di esplorazione, di costruzione e di soluzione di problemi, di produzione di congetture ecc. La ricerca didattica in Italia e all'estero ha identificato e analizzato potenzialità e limiti di alcuni contesti (o campi di esperienza) presi da settori extramatematici in cui esercitare l'attività di matematizzazione e di modellizzazione (relativi, ad esempio, a fenomeni naturali o sociali o a prodotti della tecnologia) o da settori intramatematici (relativi, ad esempio, ai numeri o alle figure). E' opportuno che il curricolo contenga casi dei vari tipi con rimandi espliciti, per sottolineare in modo dialettico la doppia natura dei concetti e dei processi tipici della Matematica, come strumenti di modellizzazione e come oggetti di riflessione. Vi sono campi di esperienza che fanno riferimento ad esperienze extrascolastiche già fortemente matematizzate nella vita di tutti i giorni. Tra questi possiamo citare:

a) il campo di esperienza degli scambi economici: attività imitative legate al banco della compravendita e attività reali di esplorazione di un supermercato finalizzate alla realizzazione di un certo progetto (ad esempio la festa della scuola), con competenze relative all'uso del sistema monetario, al confronto di prezzi, pesi e ingredienti di prodotti e all'interpretazione di testi di uso comune (le campagne pubblicitarie, gli scontrini);

b) Il campo di esperienza della temporalità esterna: riconoscimento dei periodi della giornata, dei giorni della settimana, dei mesi, delle stagioni e uso consapevole di strumenti di misura del tempo, quali orologi e calendari;
c) Il campo di esperienza della rappresentazione dello spazio: mappe, disegni illusionistici, schemi di collegamento;
d) Il campo di esperienza delle ricette di cucina: esecuzione guidata e quantificazione degli ingredienti necessari alla realizzazione, con competenze legate alla misura (pesi, volumi) e alla risoluzione di problemi di proporzionalità;
e) Il campo di esperienza dei giochi tradizionali (gioco dell'oca, settimana, girotondi,…) con competenze relative ai numeri e allo spazio.
f) Il campo di esperienza delle 'macchine': ingranaggi, meccanismi, arnesi del bricolage, e oggetti dinamici della vita di tutti i giorni, che includono anche un controllo digitale, con competenze relative all'ordine in cui si verificano certi eventi (es. il distributore di bevande; il lettore dei biglietti dell'autobus), alla forma, collegata alla funzione (es. la bilancia a due piatti, le pinze, il cavatappi, il frullatore a mano, la centrifuga scola-insalata, la bicicletta), a relazioni tra numeri (i numeri di giri nel cambio della bicicletta, le composizioni di pesi nella bilancia a due piatti).

In questi casi la modellizzazione matematica svolta a scuola si pone in continuità con l'esperienza extrascolastica. L'insegnante guida la transizione da pratiche quotidiane che si svolgono prevalentemente per imitazione e con il ricorso (al più) ad una verbalizzazione orale (come, ad esempio, nel caso degli scambi economici) a pratiche di rappresentazione scritta, che consentano la soluzione di problemi anche solo evocati e lo sviluppo di modi di soluzione (es. calcolo algebrico).

In altri casi, invece, le attività in campi di esperienza extramatematici conducono a modellizzazioni che si oppongono a concezioni diffuse. Possiamo citare ad esempio:

a) Il campo di esperienza delle ombre solari, fino alla modellizzazione dell'ombra come sezione di un 'cilindro' d'ombra costituito da raggi paralleli: le ombre dei corpi umani non conservano le proporzioni;
b) Il campo di esperienza della genetica, fino allo studio dei caratteri ereditari;
c) Il campo di esperienza delle estrazioni (lotto e lotterie varie).

Ad esempio, per l'ombra, il modello produce ombre dei corpi umani che non conservano le proporzioni o i comportamenti a cui siamo abituati; per i caratteri ereditari, si ottengono risultati che vanno contro certe visioni fatalistiche delle malattie genetiche; per le lotterie si sfidano i preconcetti relativi ai ritardi nelle estrazioni. In questi casi, il ruolo dell'insegnante è molto più delicato, in quanto l'insegnante deve essere portatore di un atteggiamento positivo nei confronti della scienza e della razionalità.

Vi sono infine campi di esperienza intramatematici, che, per la scuola elementare e media, comprendono i numeri e le operazioni, le figure e le loro trasformazioni, il piano cartesiano, i micromondi dei software di geometria dinamica. Anche se l'approccio è inizialmente sviluppato a partire da una molteplicità di esperienze e problemi extramatematici, molto presto, già dalla prima classe, gli oggetti introdotti (numeri, operazioni, figure, trasformazioni, ecc…) divengono essi stessi oggetto di riflessione e di studio. Ad esempio, si può riflettere sulla scrittura dei numeri adottata nella vita quotidiana, ricostruendo le regole della notazione posizionale; si possono cercare numeri o costruire di figure che soddisfano a condizioni date. Grande importanza come mediatori nei processi di acquisizione di conoscenza assumono gli strumenti, dai più semplici, come i materiali manipolabili, l'abaco, il compasso, il righello, fino agli strumenti tecnologici più complessi (il computer o le calcolatrici numeriche). Varie ricerche suggeriscono l'importanza di software che, nella loro interfaccia, rendano disponibili oggetti computazionali con i quali l'alunno può interagire per esplorare un dominio di conoscenza matematico o la matematica che caratterizza un campo di conoscenza extramatematico. Si terrà comunque presente che, nessuno strumento, per quanto raffinato, è trasparente per i concetti matematici in esso incorporati: in altre parole, la costruzione dei significati matematici dipende dalle pratiche sociali nelle quali avviene l'uso, pianificate e messe in opera nella classe dall'insegnante.

Sarà utile, nei vari contesti (e soprattutto in quelli intramatematici, dove è particolarmente importante recuperare il significato sociale della disciplina) introdurre gradualmente la dimensione storica, come indicato più sopra.

1.9 Le nuove tecnologie nelle attività di insegnamento-apprendimento della Matematica

Vi sono due aspetti legati all'uso delle nuove tecnologie che sono importanti per la prospettiva didattica: il primo riguarda l'alfabetizzazione informatica, ossia la possibilità di offrire agli studenti le conoscenze e le competenze che l'attuale società esige nell'uso delle nuove tecnologie; il secondo riguarda il ruolo che esse possono assumere nel favorire il conseguimento di obiettivi di insegnamento-apprendimento disciplinari.

Si tratta, in entrambi i casi, di aspetti delicati e importanti, dei quali la scuola, in quanto istituzione atta a garantire la formazione del futuro cittadino, deve farsi carico. L'alfabetizzazione informatica, comunque, non può gravare unicamente su una materia di studio, ma dovrebbe essere un obiettivo cui concorrano in misura adeguata tutti gli insegnamenti. Proprio per il fatto che l'alfabetizzazione informatica è trasversale a tutti gli insegnamenti, focalizzeremo qui l'attenzione sul ruolo che le tecnologie possono assumere per favorire il conseguimento di obiettivi di insegnamento-apprendimento di importanza strategica in campo matematico.

Gli esempi d'uso delle nuove tecnologie, cui accenneremo brevemente, sono ispirati a quadri di riferimento pedagogici che prestano particolare attenzione all'interazione sociale in classe e al ruolo di mediazione offerta dagli strumenti nei processi di insegnamento-apprendimento; tali esempi orientano verso un uso delle nuove tecnologie in cui gli studenti possano essere protagonisti nel processo di costruzione della conoscenza e i docenti siano in grado di assumere, a seconda delle esigenze, ruoli diversi (progettare l'azione didattica, garantire la condivisione del sapere in classe, suggerire linee di ricerca o strategie risolutive, coordinare le discussioni in classe, osservare il lavoro nei piccoli gruppi, aiutare lo studente nella ricerca delle informazioni, valutare il lavoro degli studenti, ….). Le indicazioni e i suggerimenti qui presenti sono necessariamente generali e non devono essere considerati prescrittivi, in quanto il dibattito sulla materia in oggetto è ancora molto aperto e i risultati delle sperimentazioni fino ad ora compiute potrebbero dipendere fortemente dal contesto in cui si è operato, in particolare dalle competenze e dalla storia personale degli insegnanti che le hanno realizzate.

L'uso delle nuove tecnologie per scopi didattici si inserisce in una tradizione consolidata come quella legata all'uso di strumenti mediatori dell'attività di insegnamento-apprendimento per meglio comprendere gli oggetti di studio (per esempio, è ampiamente riconosciuto che l'uso del compasso aiuta nell'evidenziare il ruolo strategico del centro e del raggio nella definizione della circonferenza come luogo geometrico dei punti equidistanti dal centro). D'altra parte il loro uso richiede competenze sia di carattere tecnico-operativo, sia di carattere pedagogico, che non sempre fanno parte della formazione degli insegnanti o della loro formazione in servizio. La scuola dell'autonomia dovrebbe pertanto favorire negli insegnanti una crescita di professionalità nell'uso consapevole delle tecnologie attraverso percorsi di formazione specifici.

Molti insegnanti manifestano perplessità relativamente all'uso delle nuove tecnologie nella didattica: alcuni, per esempio, dichiarano la preoccupazione che tale uso possa comportare una graduale e inevitabile disattenzione alla relazione sociale e una spersonalizzazione dell'insegnamento. Le varie sperimentazioni che hanno fatto uso delle nuove tecnologie per conseguire specifici obiettivi di apprendimento-insegnamento hanno però rilevato proprio l'opposto: usando le nuove tecnologie, gli studenti sono maggiormente inclini a condividere osservazioni, esplorazioni, strategie risolutive di un problema, produzione di congetture e successiva discussione della loro validità. Naturalmente, affinché vengano minimizzati gli innegabili rischi, sempre possibili, di un uso scorretto, inadeguato o improprio delle nuove tecnologie, è necessario l'intervento costante e mirato dell'insegnante. Lungi pertanto dal prefigurarne la marginalità del ruolo, l'uso delle nuove tecnologie richiede per l'insegnante un impegno ancor maggiore che in passato e un ruolo ancora più strategico di quello tradizionale.

A tale riguardo è importante precisare che l'uso di un determinato sistema non comporta necessariamente un'innovazione o un miglioramento dell'azione didattica: perché ciò avvenga è necessaria un'attenta progettazione dell'ambiente di apprendimento che coinvolge anche competenze di carattere disciplinare, storico-epistemologico e cognitivo. I cambiamenti che si possono realizzare nell'apprendimento individuale attraverso l'uso di una tecnologia sono in realtà il risultato di un mutamento più generale che l'intero ambiente di apprendimento subisce come conseguenza di tale uso dentro un'attività. Ciò enfatizza la natura sociale dello sviluppo cognitivo e della costruzione del significato e, al tempo stesso, sottolinea la necessità di considerare le relazioni che si stabiliscono nell'attività didattica tra studenti, strumenti mediatori e insegnanti. In questo quadro l'uso della tecnologia deve essere considerato in relazione all'attività di insegnamento-apprendimento nel suo complesso e non solo per lo sviluppo di specifiche abilità o per lo svolgimento di specifici compiti. Più in particolare deve essere privilegiato un uso a supporto di processi di insegnamento-apprendimento che si realizzano sul lungo periodo, quali quelli necessari per lo sviluppo di conoscenze complesse e articolate come quelle coinvolte nella risoluzione di problemi, nello sviluppo di congetture e dimostrazioni, nelle attività di modellizzazione.

Osserviamo, inoltre, che i sistemi informatici oggi disponibili per l'attività didattica in campo matematico potranno evolversi in tempi brevi anche profondamente e nuovi sistemi, caratterizzati da funzionalità e livelli di interattività oggi non immaginabili, potranno essere progettati e resi disponibili sul mercato. Ciò impone agli insegnanti un compito costante di studio e aggiornamento sulle tecnologie di volta in volta disponibili, volto all'esame critico delle sue caratteristiche funzionali e alla identificazione e valutazione di possibili gestioni nel contesto d'uso della classe, in grado di sfruttare efficacemente tali caratteristiche ai fini didattici. I risultati delle ricerche e delle sperimentazioni realizzate in questo campo, pubblicate sulle riviste specializzate, potranno costituire un utile riferimento per lo sviluppo di tale compito.

È importante, infine, osservare che le nuove tecnologie possono essere di grande aiuto nella progettazione di percorsi didattici destinati ad alunni che presentano difficoltà di apprendimento.

Per questi casi si ritiene opportuno il superamento di un approccio che vede l'alunno con difficoltà o con un ritardo di apprendimento come un alunno a cui "manca" qualcosa. Tale visione ha portato, negli anni passati, a concepire un uso della tecnologia principalmente orientato a cercare di porre rimedio a tale mancanza attraverso un approccio di tipo trasmissivo di abilità e competenze e una esercitazione assistita meccanica e ripetitiva. La ricerca moderna suggerisce che, anche in questi casi, la tecnologia può essere utilizzata in modo più proficuo secondo il quadro generale delineato, prestando particolare attenzione all'assistenza che l'insegnante può fornire all'alunno in difficoltà avvalendosi degli strumenti resi disponibili dalla tecnologia in uso.

Sulla base dei risultati più recenti della ricerca didattica e di molte sperimentazioni condotte nelle scuole ai diversi livelli scolastici, possiamo individuare tre tipiche modalità d'uso delle nuove tecnologie, che appaiono particolarmente appropriate per l'attività di insegnamento-apprendimento in campo matematico:

1. Uso di strumenti di calcolo e di software specifici come strumenti mediatori nella progettazione e realizzazione di ambienti di apprendimento efficaci per lo sviluppo di conoscenze articolate in campo matematico.
2. Uso delle risorse informative disponibili sulla rete Internet o su software ipermediali per lo sviluppo di ricerche specifiche su contenuti oggetto di studio o per eventuali complementi e approfondimenti degli stessi. Costruzione di prodotti ipermediali su particolari argomenti oggetto di studio.
3. Uso di risorse comunicative di rete per favorire l'interazione con compagni ed insegnanti per scopi di confronto, riflessione e condivisione di conoscenze matematiche e per lo sviluppo di una pratica didattica basata su attività di tipo collaborativo o cooperativo.

Prima di prendere in considerazione le singole modalità sopra individuate, notiamo che una stessa attività didattica può anche essere caratterizzata da un uso integrato delle tre modalità.

a) *Uso di strumenti di calcolo automatico e di software didattici specifici*

La ricerca suggerisce che l'uso di strumenti di calcolo automatico e di software didattici specifici nell'attività di insegnamento-apprendimento può:

- rendere possibili nuovi modi di dare significato ai concetti matematici oggetto di apprendimento;
- strutturare nuove possibilità di interazione tra il sapere istituzionalizzato e l'esperienza e le conoscenze che spesso gli alunni possiedono su un determinato argomento oggetto di studio;
- modificare le interazioni che si realizzano in classe fra insegnante e allievi e fra gli stessi allievi, in relazione al sapere in gioco nell'attività di insegnamento-apprendimento.

È bene ricordare che l'uso di tali software nell'attività di insegnamento-apprendimento, sebbene possa produrre indubbi vantaggi, comporta anche nuovi compiti e responsabilità sul piano culturale e didattico per gli insegnanti.

In particolare, sul piano didattico, è stata dimostrata l'importanza di sistemi che nella loro interfaccia rendono disponibili oggetti computazionali con i quali l'alunno può interagire per esplorare un dominio di conoscenza matematico o la matematica che caratterizza un campo di conoscenza extramatematico. L'uso di questi sistemi può contribuire alla costruzione di ambienti di apprendimento in grado di offrire nuove possibilità per dare significato ai concetti matematici oggetto di studio e per sviluppare capacità nella esplorazione e risoluzione di problemi relativi al dominio di conoscenza in esame. Attualmente sono disponibili e sono stati sperimentati nella scuola di base sistemi volti allo sviluppo di competenze in diversi ambiti matematici (aritmetico, geometrico, statistico….). Gli esempi che seguono vogliono solo offrire qualche spunto per evidenziare alcune possibilità offerte da questi sistemi e non hanno alcuna pretesa di essere esaustivi. Un primo esempio è costituito dall'uso delle calcolatrici numeriche. Già a partire dai primi anni della scuola elementare tali strumenti possono essere utilizzati per esplorare regolarità numeriche, per controllare calcoli o stime di calcoli effettuati a mente. Non è vero, come molti pensano, che l'uso delle calcolatrici porti necessariamente all'impoverimento delle capacità di calcolo: esso può consentire di aumentare l'esperienza numerica e soprattutto abituare alle approssimazioni e alle stime. Attraverso un uso appropriato e intelligente in classe di tali strumenti, può essere potenziato il calcolo mentale, come mezzo di controllo dell'attendibilità dei risultati, particolarmente utile nella costruzione di strategie risolutive di problemi; al tempo stesso può essere posta meno attenzione ad attività di tipo meccanico ripetitivo, oggi di scarso valore formativo, come le "operazioni in colonna" e il calcolo di espressioni complicate.

Un secondo esempio è costituito dall'uso dei fogli elettronici, sistemi di rappresentazione ed elaborazione dati che possono essere utilizzati nella scuola media anche per potenziare le possibilità di esplorazione, di osservazione e di individuazione di regolarità numeriche. Grazie ai vari ambienti che mettono a disposizione (piano dei numeri, delle formule, ambienti grafici), i fogli elettronici si rivelano anche utili per affrontare (e risolvere) problemi sotto diversi punti di vista: aritmetico, algebrico, grafico. Inoltre, i fogli elettronici, rendendo disponibili funzioni per la rappresentazione e l'elaborazione automatica di vari tipi di dati, possono essere proficuamente utilizzati per esplorare le relazioni quantitative che caratterizzano situazioni relative a campi di conoscenza diversi (fisico, biologico, economico, statistico, matematico, della vita quotidiana…) ai fini di una loro modellizzazione.

Un altro esempio è costituito dai sistemi di geometria dinamica, che consentono di utilizzare, con estrema facilità, il movimento nell'insegnamento-apprendimento della Geometria Euclidea; ciò consente di portare sotto il controllo della percezione l'insieme delle relazioni che definiscono una figura, potendo osservare, per esempio, le proprietà che si conservano quando gli oggetti base della figura vengono trascinati con il mouse. Tali sistemi si sono rivelati particolarmente adatti a progettare attività che favoriscono esplorazioni, osservazioni e produzione di congetture: essi possono essere utilizzati già a partire dagli ultimi anni della scuola dell'obbligo. Particolare cautela occorre invece nel loro impiego con alunni dei primi anni di scuola. Per essi, infatti, sembrano più adatte attività di manipolazione e costruzione diretta (ritagli, piegamenti, manipolazione di modelli concreti, …) di figure geometriche del piano e dello spazio.

Infine, notiamo che la tecnologia, unitamente ad altre attività che portino il bambino ad affrontare con logica e sequenzialità i problemi proposti, a seguire e a comunicare istruzioni, può essere utilizzata anche per potenziare l'aspetto algoritmico, essenziale in Matematica. A tale fine può risultare utile l'uso di linguaggi di programmazione specifici, con una sintassi semplice e naturale, che consenta ai bambini di comunicare con l'elaboratore impartendogli istruzioni per eseguire azioni, realizzare disegni e costruire semplici ambienti.

b) *Costruzione e uso di documenti ipermediali*

Le risorse informative disponibili sulla rete internet e attraverso prodotti multimediali specifici offrono la possibilità di accedere a conoscenze strutturate che possono essere utilizzate dagli insegnanti sia per gestire in classe, con gli alunni, attività di riflessione, approfondimento e consolidamento, sia per attività finalizzate alla propria formazione e all'auto-formazione.

È possibile individuare almeno tre modalità per gestire la costruzione e l'uso in classe di documenti ipermediali per scopi didattici.

La prima prevede di far costruire documenti ipermediali agli studenti senza dar loro alcun materiale.

Questo tipo di attività è finalizzata ad acquisire informazioni su come gli studenti sono in grado di organizzare le conoscenze oggetto di studio e la rete di relazioni che caratterizza i concetti appresi.

La seconda modalità richiede agli studenti la costruzione di documenti ipermediali fornendo loro molto materiale o il riferimento a dove reperirlo o fornendo loro assistenza mentre usano motori di ricerca per accedere alle risorse informative della rete. Con questo tipo di attività è possibile studiare la capacità degli studenti di muoversi in un sistema complesso di informazioni e conoscenze e di organizzarle in strutture adeguate, in riferimento allo scopo definito dall'insegnante o negoziato durante l'attività.

La terza modalità è relativa all'utilizzo diretto in classe da parte dell'insegnante delle risorse informative disponibili sia sulla rete sia su prodotti ipermediali specifici. In questo caso si tratta di usare tali risorse per favorire e potenziare la comunicazione didattica.

L'uso di documenti ipermediali, nelle diverse modalità, può essere avviato già a partire dalla scuola di base. Le risorse informative disponibili sulla rete internet possono essere anche utilizzate dagli insegnanti per attività di formazione e auto-formazione, che possono essere costruite e realizzate sulla base di modelli profondamente diversi da quello trasmissivo, attualmente ancora dominante nella scuola italiana.

Le tecnologie telematiche possono infatti essere utilizzate a supporto di processi di formazione basati sulla documentazione e rielaborazione della propria esperienza o di esperienze realizzate da altri insegnanti e comunque accessibili tramite la rete. Le esperienze più recenti condotte dal Ministero dell'Istruzione nel campo della formazione a distanza degli insegnanti costituiscono un riferimento importante per coloro che sono interessati a utilizzare la rete come strumento di accrescimento della propria professionalità.

c) Uso di risorse comunicative di rete

L'uso di risorse comunicative di rete consente di inserire l'attività di risoluzione di problemi all'interno di una pratica sociale che può modificare profondamente l'atteggiamento complessivo degli alunni verso il problema, le strategie risolutive che essi impiegano e il modo in cui validano il processo risolutivo attuato.

L'attività didattica mediata dalla comunicazione di rete contribuisce infatti a uno spostamento dell'attenzione dal "fare" al "fare per comunicare", favorendo l'assunzione di nuovi criteri quali la chiarezza e la leggibilità nella realizzazione del proprio prodotto risolutivo. In questo quadro lo studente costruisce una risoluzione che deve essere negoziata e condivisa dai propri compagni e non solo valutata dall'insegnante. La verifica sociale, a cui processo e prodotto risolutivi vengono sottoposti tramite la comunicazione di rete, offre la possibilità di mettere in discussione le strategie adottate e di modificarle in relazione ai feedback ricevuti dai propri interlocutori.

Le risorse comunicative di rete possono essere utilizzate a supporto dello sviluppo di differenti pratiche collaborative durante lo svolgimento di compiti. Tali pratiche possono essere, per esempio, lo scambio e il confronto delle risoluzioni realizzate, il commento, la critica, le osservazioni sulle soluzioni realizzate da un compagno, la collaborazione nella risoluzione di compiti complessi.

Osserviamo, infine, che le risorse comunicative di rete possono essere proficuamente impiegate negli scambi comunicativi tra insegnante e alunni (per esprimere dubbi, sollevare problemi, richiedere chiarimenti da parte dell'alunno e per offrire spiegazioni, indicazioni e suggerimenti da parte dell'insegnante), in attività collaborative tra classi di scuole diverse, nello stabilire relazioni con esperti e, più in generale, nella partecipazione a liste di discussione; si tratta di attività che con gradualità e attenzione, possono essere avviate già a partire dalla scuola dell'obbligo.

1.10 Conclusioni

Ci sembra che quanto fin qui premesso, permetta di comprendere come un moderno insegnamento della Matematica a livello elementare non possa, da un lato, prescindere dall'uso didattico della Geometria Euclidea piana come geometria delle figure e delle loro trasformazioni, e dall'altro prescindere dall'uso di nuove tecnologie, più adatte ad attirare l'attenzione dei bambini. Proprio in questo spirito e con queste finalità ha preso le mosse il lavoro di presentazione multimediale da noi svolto attraverso la realizzazione di un percorso di lezioni animate su video di breve durata, che costituiscono il principale prodotto di questa Tesi (che verrà discusso nel Capitolo 3). Nel prossimo capitolo accenneremo brevemente al contesto di utilizzo delle nuove tecnologie per la visualizzazione, la Comunicazione Scientifica e la Didattica attraverso gli Agenti Virtuali.

Capitolo 2
Didattica e Apprendimento: un aiuto dalle nuove tecnologie

In questo capitolo, anch'esso di natura introduttiva, discuteremo brevemente del ruolo che le moderne tecnologie multimediali possono avere nei confronti della Comunicazione, della Visualizzazione, della Divulgazione e della Didattica delle Scienze (in generale), e della Matematica (in particolare). Si introdurranno sinteticamente il concetto di "Agente Virtuale" ed il suo uso per rendere più attraenti i prodotti per la Comunicazione della Scienza.

2.1 Divulgazione scientifica e nuove tecnologie

La nostra vita è intrisa di Matematica; anche se non molti hanno familiarità con le grandi scoperte teoriche di questa disciplina, quasi tutti hanno occasione di entrare in contatto con le sue applicazioni tecnologiche che pervadono la vita quotidiana (computer, telefonini, navigatori satellitari), le scelte strategiche dei Paesi (missioni spaziali, investimento in energia nucleare) e la nostra immaginazione (macchine del tempo, teletrasporto). Si tratta, in questo senso, di un settore, potenzialmente fertile di applicazione, del cosiddetto *Public Understanding of Science* (PUS). L'espressione individua un'area di studi interdisciplinari che si occupa della percezione, della comprensione e degli atteggiamenti dei pubblici non specialistici nei confronti della Scienza e della Tecnologia, nonché delle pratiche attraverso cui l'expertise scientifica è utilizzata, rielaborata o ignorata in contesti non specialistici. Il termine è non di rado utilizzato anche per indicare iniziative e attività pratiche promosse per stimolare l'interesse dei suddetti pubblici nei confronti della Scienza o per promuovere l'immagine di particolari discipline o istituzioni scientifiche.

Infine, seppur forse impropriamente, il riferimento è talvolta esteso allo studio dei processi di comunicazione che si instaurano tra esperti e non esperti, più correttamente designati dall'espressione *Public Communication of Science* (Wynne, 1995; Bucchi, 2003).

Come sottolinea anche la Commissione Europea, la Scienza e la Tecnologia influenzano in maniera crescente la Società: *«ogni giorno il progresso scientifico e tecnologico fornisce innovazioni essenziali alla nostra qualità di vita. Le nuove scoperte nelle scienze, nella tecnologia dell'informazione, così come nel mondo della fisica, stanno influenzando fortemente le strutture sociali, economiche, politiche e etiche a cui siamo abituati»* (Commissione Europea, 2005). I cittadini europei risultano in parte interessati alle attività e ai risultati della Scienza, ma nello stesso tempo percepiscono di avere una preparazione non sempre adeguata a comprenderli. Questo divario è stato solo in parte colmato attraverso le azioni sviluppate nel corso degli ultimi due decenni.

Prenderemo in considerazione alcune delle più significative analisi su potenzialità e impatto della Comunicazione Pubblica della Scienza attraverso strumenti multimediali, con particolare riferimento a internet. Da almeno vent'anni lo sviluppo di un rapporto più solido tra ricerca scientifica e cittadini è al centro del dibattito pubblico e coinvolge ormai le scelte politiche ed economiche di tutti i Paesi industrializzati.

In quella che John Ziman ha definito "l'era post-accademica della Scienza" non è più concepibile un ruolo dello scienziato avulso dalla società, che contribuisce con le sue ricerche a rimodellare e ridefinire dentro nuovi contesti culturali, sociali ed economici.

È in questo quadro che il nostro studio vuole presentare una rassegna di alcune attività e iniziative significative che mettono in contatto la comunità scientifica con quella della comunicazione multimediale e digitale, per sfruttare quello che oggi si presenta come il più potente strumento di comunicazione scientifica e tecnologica: il **Web**.

Lo sviluppo del *Public Understanding of Science* ha sollecitato i ricercatori a compiere sforzi in prima persona per comunicare con il pubblico nella prospettiva di renderlo più consapevole e incline al sostegno della Scienza. Tuttavia, alcuni studi mettono in guardia sul fatto che l'esito di quest'attività può essere non tanto l'avvicinamento del vasto pubblico ai contenuti e ai protagonisti della ricerca, quanto l'innalzamento dell'autorità cognitiva di questi ultimi.

Questo aspetto emerge soprattutto nel momento in cui si considerano non solo tradizionali indicatori dell'immagine della Scienza e di settori di ricerca quali i media a carattere informativo, ma anche i libri di divulgazione e la stessa fiction. La Comunicazione Pubblica della Scienza attraverso libri di carattere divulgativo è probabilmente uno dei generi con una più lunga tradizione storica, anche nel nostro Paese (Bucchi, 1998), (Govoni, 2002). Sulla base di uno studio dell'immagine della Fisica e, più in generale, della Scienza che emerge in particolare dai libri di divulgazione della Fisica, Mellor ha argomentato ad esempio che nel momento in cui si incaricano di spiegare la Scienza ad un'audience passiva, questi testi rivendicano la facoltà di tracciare i confini tra la scienza e la non-Scienza (Mellor, 2003). In particolare, i libri di divulgazione della Fisica utilizzano non di rado elementi legati all'immaginazione e alla fiction per illustrare teorie e risultati in modo più accessibile.

Per esempio, la possibilità o meno di viaggiare nel tempo è divenuta un concetto meno astratto e di pubblica discussione scientifica grazie ai libri e ai film che hanno costruito delle storie romanzate attorno a una possibile applicazione o superamento della teoria della Relatività di Einstein, attraverso svariate versioni di macchine del tempo. L'azione di questi strumenti nel plasmare la percezione pubblica della Fisica va tuttavia messa in relazione con le immagini contenute in altri testi e spazi mediali (Mellor, 2003). *«I libri popolari di scienza non si mantengono in piedi come testi isolati. Includono riferimenti e allusioni ad altri testi e, più importante, diventano i catalizzatori per discussioni sulla scienza attraverso una gamma di media»*, attraverso i richiami televisivi, sui quotidiani, sulle riviste, nella radio e in altri libri (Mellor, 2003). Questo garantisce la percezione di una Scienza "stabile", perché le tematiche sono presenti stabilmente in una rete intertestuale che ha una persistenza molto maggiore rispetto a un singolo libro o a un solo autore. Questa immagine della Fisica è piuttosto diversa - e potenzialmente contraddittoria - rispetto agli aspetti più conflittuali e controversi che emergono non di rado dalla copertura mediale nell'ambito della cronaca e dell'informazione (Mellor, 2003).

I libri divulgativi di Matematica e di Fisica permettono alla Scienza di superare i propri limiti, attraverso lo spazio che viene dato all'immaginazione.

Questo libera la Fisica e la Matematica dalle catene impropriamente imposte dalla Tecnologia: non sempre la tecnologia attualmente disponibile permette di verificare le teorie, ma la tecnologia romanzata fornisce alla Scienza il supporto necessario. Questa Fisica fantasiosa, diversa da quella pratica e imperniata sui fatti dei libri scolastici, penetra nella cultura popolare, vi circola liberamente e acquisisce confidenza con la gente, senza per questo venire contagiata dalla mondanità della vita quotidiana, perché permette di scoprire cosa si cela sotto l'apparenza della realtà comune (A. Bertagnolli, M. Bucchi, 2006). L'approssimarsi della Fisica alla fiction e alla vita di tutti i giorni, purchè divulgate in modo corretto e non approssimativo o, peggio, errato o parzialmente errato, seppure per voler semplificare, non sminuisce il suo carattere scientifico, che viene ribadito sottolineando i confini esistenti tra queste discipline e rivendicando nuove tematiche sotto il dominio della Fisica stessa.

Storicamente, la Fisica e la Matematica hanno fornito all'uomo degli strumenti straordinari, come i computer e l'energia nucleare, e ne forniranno altri in futuro, che la fiction rende già visibili: questo ribadisce la sua posizione sovraordinata rispetto agli altri modi di conoscere (Mellor, 2003). È anche di questo tipo di immagine, secondo Mellor, che bisogna tener conto nel momento in cui si indaga la percezione pubblica di queste discipline.

Per i non esperti un altro modo di rapportarsi alle discipline scientifiche è offerto dagli strumenti multimediali.

Queste nuove possibilità possono essere sfruttate non solo per diffondere la Fisica e, più in generale, tutta la scienza, tramite i computer, ma in particolare attraverso il materiale che può essere fornito via internet.

2.2 Comunicazione scientifica e internet

Internet si è imposto rapidamente come strumento adatto alla comunicazione tra scienziati, permettendo di ampliarla e di renderla più veloce. Mentre a lungo le risorse tecnologiche e le conoscenze richieste per l'utilizzo di questi strumenti non erano accessibili alla maggioranza della popolazione, la penetrazione di Internet nelle pratiche di comunicazione tra esperti è stata talmente massiccia che ora risulta persino difficoltoso immaginare le modalità di lavoro precedenti (Trench, 2006).

La comunicazione attraverso Internet ha dato luogo a un processo potenzialmente ancora più rivoluzionario, permettendo la disseminazione di conoscenza oltre i confini ristretti della comunicazione tra specialisti, ampliando le possibilità di accesso ai contenuti delle ricerche a tutti coloro che sono interessati e hanno gli strumenti per accedervi (Trench, 2006).

Perché le comunicazioni scientifiche possano essere accessibili al grande pubblico, è necessario che quest'ultimo possieda gli strumenti tecnologici, gli interessi e le conoscenze per poter usufruire di questa opportunità.

I soggetti che utilizzano Internet per cercare notizie o informazioni scientifiche mostrano delle caratteristiche connesse con il possesso e l'accesso a queste nuove tecnologie: l'alfabetizzazione scientifica e il livello di educazione formale. *«Questo risultato indica che gli individui che cercano informazioni scientifiche o legate alla salute sul web hanno già un livello di conoscenza superiore alla media e sembra che cerchino o informazioni più recenti o informazioni più avanzate riguardo ad alcuni temi. Proprio come le librerie attraggono i cittadini più alfabetizzati e i musei della scienza attirano sproporzionatamente* un *largo numero di cittadini più competenti e interessati in materia di scienza, questo risultato suggerisce che possa essere necessario un certo livello di conoscenza o di comprensione per concettualizzare e eseguire una ricerca di informazioni sul web»* (Miller, 2001).

Internet risulta particolarmente congeniale ai soggetti più scolarizzati, così come è accaduto a tutte le tecnologie di nuova introduzione nel passato: i primi libri stampati furono utilizzati inizialmente dall'elite europea, l'unica che era in grado di leggerli, così come i primi televisori e i primi computer furono acquistati dai cittadini con una maggiore educazione. Questi esempi *«enfatizzano il ruolo storico e continuo dell'educazione nel creare e usare le nuove tecnologie […] è probabile che l'assenza di conoscenza sia la barriera principale a un significativo accesso al web e alle tecnologie collegate»* (Miller, 2001).

L'accesso esteso a Internet ha spalancato le porte della Comunicazione Scientifica anche ai non addetti, erodendo quella separazione tra comunicazione tra esperti e comunicazione rivolta al pubblico che ha sempre caratterizzato la Scienza e ha contribuito a legittimare il suo ruolo sociale e la sua autorità cognitiva. Il pubblico diviene in grado di accedere agli aspetti della produzione della conoscenza che gli sono sempre stati preclusi, nascosti e svelati solo sporadicamente (Trench, 2006).

L'accesso al "retroscena della Scienza" (come nel caso di un'accesa controversia a livello specialistico) e la possibilità di condividere le nuove scoperte, rappresenta da un certo punto di vista una realizzazione dell'ideale mertoniano del "comunitarismo", ovvero dell'aperta messa in comune dei risultati che secondo Merton caratterizzava la scienza come istituzione (Merton, 1973).

Ora Internet, per la prima volta, *«offre la possibilità di costruire una rappresentazione globale e interattiva della conoscenza umana, che includa il patrimonio culturale e la garanzia di un accesso a livello mondiale»* (Dichiarazione di Berlino, 2003, in Trench, 2006). Nel febbraio 2006, centoquarantasei fra Università e Istituti di Ricerca europei hanno già sottoscritto l'intento della dichiarazione di promuovere lo sviluppo di Internet come mezzo per formare una conoscenza scientifica di base a livello globale (Trench, 2006).

L'accesso a molte pubblicazioni di siti scientifici è resa molto più semplice rispetto al passato, attraverso la creazione di pagine di *news* che, ricalcando la forma dei siti giornalistici, rendono immediato l'indirizzo verso le nuove scoperte sia agli esperti che ai non esperti. L'apertura non deve essere sopravvalutata: talvolta, anche se l'accesso è fisicamente possibile, il sito si rivolge principalmente alla promozione dell'istituzione che ne è proprietaria nei confronti di un pubblico professionale o economicamente interessato (Trench, 2006).

L'apertura al pubblico generale della Comunicazione Scientifica comporta due problemi: in primo luogo gli scienziati non sono più in grado di assicurare il controllo e la convalida da parte dei pari sui documenti che vengono presentati al pubblico; in secondo luogo, gli utenti non sono sempre in grado di valutare l'attendibilità delle informazioni che trovano.

Un ipotetico strumento per distinguere le fonti non professionali credibili da quelle meno affidabili incontrerebbe molti problemi, a causa del continuo rinnovarsi e ampliarsi del web e alla possibile disomogeneità dei documenti presenti nello stesso sito. Internet, inoltre, è un mondo in cui proliferano svariate fonti di informazione, poste a livelli diversi ma non sempre chiaramente distinguibili. Un utente può accedere a informazioni fornite da riviste scientifiche, da giornalisti, da gruppi di interesse, da aziende che fanno promozione, da studiosi più o meno accreditati: talvolta è difficile valutare correttamente le fonti e questo può comportare dei problemi.

Secondo alcuni studiosi, Internet rappresenta quindi uno strumento di primaria importanza per divulgare i risultati delle ricerche scientifiche e per dare risalto e pubblicità alle maggiori questioni controverse, favorendo lo sviluppo di una coscienza critica nei cittadini. Queste opportunità sono essenziali per l'obiettivo dell'Unione Europea di superare il divario che divide la Scienza e la Società, in linea con i cambiamenti che sono avvenuti a livello teorico, con il superamento del "deficit model" e la proposta di modificare la già citata dicitura PUS (*Public Understanding of Science*) in PEST (*Public Engagement with Science and Technology*), cioè impegno pubblico verso la Scienza e la Tecnologia.

In questo senso, la comunicazione pubblica della Scienza attraverso l'utilizzo di siti web può essere particolarmente adatta ad argomenti di grande attualità o in continua trasformazione. Esistono diversi vantaggi rispetto alle fonti tradizionali di diffusione delle informazioni: è possibile introdurre spesso aggiornamenti che riflettano il variare delle posizioni nel settore scientifico e le nuove scoperte; il formato multimediale mette a disposizione strumenti che permettono di comprendere meglio i concetti che vengono esposti (foto, diagrammi, video); risulta più semplice unire in un solo spazio prospettive differenti e informazioni dettagliate a chi presenta un interesse maggiore per le tecnologie proposte. Perché tutto questo sia possibile, è necessario che il sito sia percepito come una fonte affidabile e neutrale di informazioni.

Internet permette inoltre di raggiungere un pubblico molto ampio e distribuito geograficamente in tutto il mondo, obiettivo difficilmente raggiungibile, se non a costi molto elevati, attraverso gli altri media (Byrne et al, 2002).

La comunicazione attraverso i siti web presenta anche dei limiti. Il primo è di tipo strutturale, poiché è possibile parlare soltanto a chi possiede un computer e una connessione Internet, possibilmente veloce, per non frustrare l'utente nel rapporto con un materiale multimediale graficamente pesante.

Come si è visto in precedenza, non tutti i cittadini soddisfano questa condizione di partenza. Il secondo svantaggio si riferisce a un potenziale aggravamento del divario tra esperti e non esperti, ottenuto paradossalmente anche con lo strumento che si propone di combatterlo: la comunicazione attraverso Internet, soprattutto nel caso di siti web, è gestita perlopiù in modo unidirezionale e non prevede interazioni tra lo scienziato che la propone e il destinatario.

Anche se i siti presentano in genere delle sezioni e-mail per contattare la fonte, le possibilità di interazione sono scarse e ben lontane dal dialogo e dallo scambio di informazioni tra "pari" (Byrne et al, 2002, p. 302).

Valutare l'impatto di un sito sulla percezione della Scienza risulta molto difficoltoso: esistono delle statistiche per determinare il numero di visitatori e la loro origine, per sapere quali sono le informazioni che vengono cercate più frequentemente all'interno del motore di ricerca del sito, ma tutto ciò non permette di valutare il livello di soddisfazione degli utenti riguardo al servizio
(Byrne et al, 2002).

Fin dai suoi albori, il mondo scientifico ha utilizzato Internet come veicolo di conoscenza e disseminazione culturale di particolare efficacia, sperimentandone la portata formativa e l'impatto pedagogico. Secondo una ricerca effettuata nel 2005 sul motore di ricerca Google, il web scientifico ammonta oggi a oltre due miliardi di pagine che in varia misura trattano di contenuti e notizie di carattere scientifico. Una mole informativa di sapere scientifico condiviso e un luogo virtuale di "intelligenza collettiva" in cui è necessario fissare alcuni parametri terminologici e concettuali. Nell'ambito della Comunicazione Scientifica sul web è sembrato opportuno (Izzo F., 2006) distinguere sei macrosettori o aree di contenuto:

- *il settore* dell'informazione *scientifica*: riviste scientifiche generaliste o settoriali, newsletter di enti e istituzioni, pagine scientifiche dei quotidiani on line e tutte quelle modalità comunicative sui temi più diversi dell'attualità scientifica;
- *il settore delle pubblicazioni scientifiche legate prevalentemente al movimento dell'open access*: questi archivi offrono la consultazione delle

pubblicazioni rese disponibili, a titolo gratuito, dai propri autori e rappresentano il circuito alternativo. Evidente la contrapposizione polemica con quello delle grandi riviste commerciali come *Science* e *Nature*;

- *il settore delle metarisorse o raccolta di link*: portali Internet che raccolgono una serie numerosa di collegamenti ipertestuali a siti di Istituzioni, Università, riviste e pubblicazioni on line di argomento afferente a un determinato ambito scientifico (per condurre la nostra ricerca, ad esempio, abbiamo utilizzato spesso il portale *Physicsweb*, ricco di aggiornamenti, notizie e link sul mondo della Fisica);
- *il settore della didattica scientifica*: siti Internet di Università, pagine personali di docenti universitari, *ipertesti* scritti in collaborazione tra più docenti che si occupano di fornire strumenti di approfondimento per le lezioni frontali o in sostituzione di esse;
- *il settore della Visualizzazione e della multimedialità scientifica*: tecniche di Comunicazione Scientifica che utilizzano un'ampia convergenza di linguaggi e approcci per spiegare argomenti spesso molto complessi. La componente audiovisiva risulta essere la qualità decisiva di questi siti web molto dinamici, che sfruttano l'efficacia semantica dei linguaggi iconici e figurativi;
- *il settore delle comunità scientifiche*: siti di web community professionali che rappresentano un luogo d'incontro virtuale, dove i ricercatori e gli esperti di determinate discipline scientifiche scambiano nuove competenze e si aggiornano sulle ultime ricerche e opportunità professionali.

L'offerta del web scientifico è davvero molto ampia e orientata a differenti stili comunicativi che rispecchiano, in parte, le competenze e la professionalità degli autori, ma anche i difetti della comunità scientifica in questo ambito: autoreferenzialità, difficoltà di approccio, progettazione della comunicazione poco centrata sull'utente finale.

Negli ultimi anni si è andata però sempre più affermando una nuova forma di comunicazione della scienza e di formalizzazione del sapere, molto più accessibile al pubblico dei non esperti e vicina alle capacità cognitive del cosiddetto "uomo della strada".

Una piccola rivoluzione copernicana nel mondo della comunicazione digitale che è il frutto, per quello che risulta dalla nostra esperienza e come del resto si evince dai risultati dei lavori presentati al premio Pirelli ("Pirelli Relativity Challenge" http://www.pirelliaward.com) della collaborazione sempre più stretta e redditizia tra i professionisti della comunicazione multimediale (animatori in flash, web e graphic designer, programmatori, webmaster, illustratori, appassionati di nuove tecnologie) ed esponenti del mondo scientifico (ricercatori, divulgatori scientifici, *sciencewriter*, studenti di facoltà scientifiche). Si tratta spesso di gruppi di lavoro molto eterogenei, nei quali si combinano diverse caratteristiche che vanno dalla competenza scientifico-tecnologica alla creatività, alla padronanza delle tecniche comunicative, alla capacità di semplificare senza banalizzare gli argomenti trattati. Ultimamente si è andata inoltre affermando, accanto alle qualità professionali e culturali degli autori "professionisti" della Comunicazione Scientifica, una grande duttilità degli standard tecnologici di visualizzazione e animazione scientifica, che hanno permesso anche a singoli autori con conoscenze scientifiche e competenze tecnologiche modeste, purchè adeguatamente supportati o affiancati da esperti di Scienza con mente "aperta" al multimediale, di realizzare prodotti multimediali degni di nota e contribuire, anche in piccola parte, alla diffusione delle conoscenze scientifiche.

2.3 Le diverse figure professionali legate alla comunicazione scientifica su Internet

Negli ultimi anni la proliferazione di progetti on-line destinati alla Comunicazione della Scienza ha determinato una serie di nuovi fenomeni: l'emergere di nuove figure professionali, l'aggregazione di questi soggetti con figure più tradizionali, la creazione di una massa critica di consumatori di Comunicazione Scientifica, e, infine, l'affermarsi di quella che possiamo definire una codificazione di linguaggi, stili e generi di questa originale forma di comunicazione.

Nelle prossime pagine proveremo a elencare i principali autori della Comunicazione della Scienza sul web, nonché le modalità comunicative con cui essi approcciano il contenuto scientifico.

Scienziati con insufficienti o poche competenze tecnologiche: viene privilegiata la scelta di un linguaggio settoriale, che poco si discosta da quello dei corsi universitari, caratterizzato da un modello di comunicazione verbale lineare, e dalla scelta dei formati di pubblicazione tradizionali (ipertesti su pagine *html*).

Elementi provenienti dal settore della *web creativity* (web designer, animatori, grafici e programmatori) con poche o insufficienti competenze scientifiche: scelta di un linguaggio informale, come quello del fumetto o del disegno animato, con il rischio frequente di una semplificazione eccessiva del discorso scientifico. Si tratta, comunque, di progetti interessanti per l'innovatività dello stile comunicativo.

Differenti forme di collaborazione tra i primi due profili: caratterizzato da un maggiore collegamento tra le esigenze della comunicazione audiovisiva e dalla scelta degli argomenti più adeguati ai tempi e alle tecniche della visualizzazione scientifica.

Figure miste: provenienti dal mondo della formazione e della didattica, profili emergenti che, attraverso i blog e le community professionali, si aggiornano costantemente sulle nuove forme di comunicazione audiovisiva di carattere scientifico.

Staff composti da profili professionali diversi: *media group* collegati a centri universitari o *dotcom* indipendenti che accolgono varie figure e differenti competenze (programmatori, grafici-illustratori, *web designer*, consulenti scientifici, divulgatori, tecnici del suono), spesso utilizzati per la progettazione e realizzazione di strumenti di e-learning.

Divulgatori scientifici: provenienti dal settore giornalistico e dalla letteratura divulgativa approcciano saltuariamente il *web* con propri progetti, spesso versioni digitali dei loro libri di maggior successo.

Animatori professionisti: provenienti dal settore dei fumetti e dell'animazione cinematografica, approdano di tanto in tanto a Internet con uno stile originale e disincantato.

Enti di Ricerca pubblica e Università: realizzano spesso lavori di equipe formate da docenti e studenti. Sono lavori orientati alla visualizzazione e simulazione scientifica, caratterizzati, naturalmente, da una forte componente didattica ed educativa.

Editori commerciali: specialmente nei paesi di cultura anglosassone, vengono realizzati progetti di divulgazione scientifica frutto della commistione di linguaggio *web oriented* e di quello di matrice televisiva (Bbc, Pbs, Abc) e giornalistica.

M**usei della** Scienza **e Science Centres**: le Istituzioni che più recentemente si sono affacciate sul web realizzando progetti interattivi molto efficaci, che corrispondono alla versione virtuale degli exhibit.

Con questo elenco non vogliamo certamente esaurire il discorso sugli autori della Comunicazione Scientifica sul web, ma soltanto dare un quadro di riferimento e una panoramica della situazione odierna, frutto di una stratificazione linguistica e tecnologica di almeno dieci anni.

La stessa natura "aperta" del web lascia spazio ai contributi più originali e alla creazione di generi sempre nuovi nella formazione di sapere scientifico libero e condiviso.

2.4 Quali sono le difficoltà che si incontrano nella comunicazione di argomenti scientifici

Naturalmente, la Scienza spesso è difficile di per sé e non è detto che la si possa sempre rendere facile o scorrevole, ma si può fare moltissimo a patto di sapere quali sono le ragioni delle difficoltà che si possono incontrare nella comunicazione di questa al grande pubblico. Di seguito sono riportati alcuni fra i più comuni ostacoli da superare in questo processo.

Il linguaggio. La Scienza vive di linguaggi specifici, dalla Matematica alle varie terminologie specialistiche, nelle quali molti vocaboli non hanno neppure una traduzione diretta, ma rimandano a concetti o ad interi processi: la Comunicazione richiede invece l'uso di linguaggi condivisi. Occorre quindi evitare i termini tecnici e, quando non si può fare a meno di citarne qualcuno, ne va sempre spiegato il significato.

La mappa. La Scienza è una rete di conoscenze fra loro collegate su più livelli di complessità, ed è quindi difficile capire un argomento senza conoscerne le premesse: lo scienziato possiede la mappa della propria disciplina, il suo pubblico no (Carrada G., 2005).

La mancanza di significato. La Scienza si occupa spesso di oggetti e fenomeni lontanissimi dall'esperienza quotidiana, o che almeno sembrano tali. Prima di spiegarli, essi vanno ricontestualizzati, mettendo in luce i legami con l'esperienza e le motivazioni del pubblico.

La natura "innaturale" della Scienza. Nonostante il fatto che praticandola possa sembrare la cosa più naturale del mondo, in realtà la Scienza è un modo di conoscere profondamente innaturale. La nostra mente infatti è aristotelica, non galileiana: per questo diventare scienziati richiede un addestramento a un diverso modo di pensare, non solo la semplice acquisizione di conoscenze.

Identificare le difficoltà dell'interlocutore. Per spiegare qualcosa è necessario prima capire le difficoltà che l'interlocutore può incontrare. Il buon comunicatore non dà nulla per scontato e risparmia ai lettori, spettatori o ascoltatori le difficoltà che lui stesso ha già incontrato: lo scienziato deve dunque fare uno sforzo in più per diventare un osservatore del proprio tema dall'esterno.

Dopodiché si passa alla fase di progettazione: di seguito sono riportate la varie fasi attraverso cui dovrebbero passare le idee e le esigenze iniziali nel processo di comunicazione di argomenti scientifici.

1. *Chiarire l'obiettivo*. Definire i propri obiettivi vuol dire decidere a quale categoria di persone ci si vuole rivolgere e quale tipo di cambiamento si vuole ottenere in loro.
2. *Conoscere il proprio pubblico*. Conoscere le persone cui ci si rivolge è una delle prime regole della Comunicazione. Non esiste infatti il discorso chiaro o convincente in assoluto, ma esistono solo discorsi comprensibili o convincenti per un certo pubblico, del quale occorre avere un modello attendibile. Una volta individuato il proprio pubblico bisogna inoltre saper rispondere alle seguenti tre domande: chi è, che cosa sa già sull'argomento e che cosa ne pensa.

3. *Valutare i* vincoli *e le opportunità*. Qualsiasi argomento di cui vogliamo parlare presenta vincoli di cui tener conto e opportunità da sfruttare:
   - *Tempestività o attualità*: tutto ciò che è nuovo ha un suo intrinseco appeal, come anche tutto ciò che ha a che fare con i temi del momento.
   - *Fascino*: la popolarizzazione della Scienza ha sempre fatto leva sul fascino e sulla sorpresa; basti pensare al peso che hanno, rispetto agli altri, argomenti come: spazio, dinosauri, evoluzione umana, etologia dei grandi animali, ecc.
   - *Dimensioni del pubblico naturale*: i temi di “nicchia” sono sempre più difficili da far passare rispetto a quelli che toccano un grande numero di persone.
   - *Importanza*: più un risultato è in grado di influire sul nostro modo di vivere, più desta interesse.
   - *Aspettative*: ogni scoperta o nuova applicazione apre uno scenario inedito, e l’interesse sarà tanto maggiore quanto più importanti sono le aspettative, positive o negative, a esse legate.
   - *Contestualizzazione*: molti studi di tipo psicologico hanno dimostrato come il nostro interesse per le cose sia tanto più forte quanti sono i punti di contatto con il nostro mondo: per questo motivo la Medicina fa la parte del leone nella divulgazione scientifica.
   - *Comprensibilità*: se un argomento non viene compreso, tutta l’utilità della comunicazione crolla. Moltissimi temi, come la Chimica e gran parte della Matematica, restano quasi tagliati fuori dalla divulgazione semplicemente perché troppo difficili e perché ancora queste discipline – a differenza della Fisica, o della Biologia – non hanno saputo creare al loro interno le giuste figure professionali.
   - *Spettacolarità*: le immagini possono essere straordinari promotori per un tema scientifico. La disponibilità di buone immagini è indispensabile per proporre un argomento a riviste illustrate e televisione, e si rivela spesso l’elemento decisivo per scegliere di coprirlo.

4. *Scegliere il messaggio*. Dopo aver chiarito l'obiettivo, individuato un pubblico e analizzato vincoli e opportunità del tema, occorre mettere a fuoco il messaggio. Il messaggio è l'estrema sintesi di ciò che si vuole comunicare, ovvero il nucleo minimo dei contenuti o dell'argomentazione che dovrebbe comunque essere fatto proprio e ricordato dai destinatari: tutto, nella comunicazione, deve contribuire a farlo passare. Per essere efficace, il messaggio deve tener conto degli obiettivi, ma soprattutto dei bisogni del pubblico; deve essere breve e chiaro ma, ovviamente, non generico. Mettere a fuoco un messaggio è essenziale soprattutto quando si ha a che fare con mezzi "veloci" e sfuggenti, che non lasciano grande spazio alla riflessione, come radio o televisione, perché è quel poco che si può sperare che rimanga nella testa di un pubblico spesso distratto.
5. *L'uso delle immagini*. Le immagini, fisse o in movimento, sono sempre più richieste in ogni tipo di Comunicazione della Scienza, al punto da diventare, a volte, la *ragione* per parlare di un argomento. Le immagini attirano l'attenzione, suscitano emozioni immediate, possono aiutare a raccontare e a spiegare perché risparmiano le descrizioni. Ma, anche se un'immagine può avere un potere straordinario, il suo uso risponde a regole diverse e richiede una speciale attenzione. Al contrario del linguaggio scritto, un'immagine non lega chi parla a chi riceve per mezzo di significati ben codificati: in altre parole può essere ambigua. L'immagine comunica senza mediazioni, e lo fa sempre e comunque, stimolando la nostra interpretazione. L'esito di quest'ultima dipende però da chi osserva, quando, dove e in che contesto. Prima di usare le immagini, dunque, occorre insomma riflettere non soltanto sulla loro bellezza, efficacia e comprensibilità, ma anche sui significati che può attribuire loro il pubblico al quale ci stiamo rivolgendo.

2.5 L'importanza della narrazione nella comunicazione di argomenti scientifici

Comunicare con la Società è una cosa completamente diversa dal comunicare all'interno della propria cerchia professionale: non è una versione semplificata, né una traduzione, né un modo più semplice di insegnare (G. Carrada, 2005). La prima grande differenza è che mentre la comunicazione fra specialisti presuppone tutta *l'attenzione* del lettore, il quale avendo bisogno di quelle informazioni è già interessato, in quella pubblica il lettore (o l'ascoltatore, lo spettatore, il visitatore) non ha in genere un motivo o un interesse particolari per prestare attenzione a ciò che gli si racconta: la sua attenzione deve essere conquistata. Una delle strategie più utilizzate per catturare l'interesse del pubblico è l'uso della narrazione. Qualunque sia il mezzo, il formato, lo scopo e il contenuto, comunicare la Scienza al pubblico vuol dire saperla trasformare in una storia.

In tutte le culture umane si sono sempre raccontate storie; la mente umana sembra essere fatta apposta per costruire narrazioni, che sono il nostro modo più naturale per ricevere informazioni. Le immagini mentali create dalle storie sono preziosi riferimenti *cognitivi*, dal momento che organizzano le esperienze dando loro coerenza. Ma non solo. Se è avvincente, una storia costringe a leggere o ad ascoltare fino alla fine. Una storia è anche un ottimo alleato della memoria, basti pensare in ambito scientifico alla muffa di Fleming, alla mela di Newton, ecc. Se si guarda infatti alla divulgazione che funziona, non troviamo mai qualcosa che assomiglia a un libro di testo o a un lavoro scientifico, sia pure tradotti in un linguaggio più semplice. Più o meno dissimulata troviamo sempre una storia, oppure un fatto, un concetto o un ragionamento travestiti da storie. È vero per un articolo, ma anche per un servizio televisivo, un libro, un documentario, una conferenza. A selezionare i contenuti non è tanto la necessità di essere rigorosi ed esaustivi, quanto la loro funzionalità nell'economia della narrazione, che fa quindi da filtro alla tentazione di dire tutto: allo stesso tempo, però, si recupera il contesto della notizia, inserendo i concetti base in gioco. La necessità di coinvolgere il lettore e lo spettatore impone lo scardinamento della forma canonica del lavoro scientifico. Al posto della sua successione sempre uguale troviamo quella che in gergo giornalistico si chiama la "piramide rovesciata", dal momento che le premesse, la base della piramide, sono l'ultima cosa di cui ci si deve preoccupare: si comincia con un attacco in grado di colpire emotivamente, si passa quindi subito al cuore della storia, e solo dopo ai dettagli, a partire da quelli più importanti. Il racconto non deve per forza rispettare la successione e la letteralità degli eventi, ma si può concedere parentesi, approfondimenti, flashback, analogie, metafore e così via. Il testo non è più impersonale, ma diventa parlato, attento a seguire il percorso immaginario e i ritmi mentali dell'ascoltatore. Il discorso deve scorrere senza troppi intoppi, anche perché è destinato a essere letto, ascoltato e/o visto una sola volta.

Una storia è una forma di esperienza sostitutiva che trasporta il lettore, o lo spettatore, in una situazione nella quale non si sarebbe mei potuto trovare. Per questo nelle storie troviamo sviluppati alcuni elementi ricorrenti:

- Dei personaggi *da* conoscere e nei quali potersi immedesimare, fra i quali ci sono magari dei buoni e magari anche qualche cattivo.
- Una motivazione che spinge un personaggio ad agire in un certo modo e che può incontrare l'interesse del pubblico.
- Un'ambientazione.
- Una collocazione nel tempo.
- Un'azione che si svolge nel tempo, ossia la struttura che organizza il tutto.

La scelta della storia, fra le tante che si possono costruire a partire da uno stesso argomento, va fatta in base al pubblico, al mezzo, allo spazio disponibile e ai propri scopi. Se non si riesce subito a trovare una storia adatta, la cosa migliore è prendere gli elementi individuati in fase di progettazione, e cercare una mappa narrativa capace di metterli insieme. In questa fase bisogna poi cercare le immagini giuste. Nella grande maggioranza delle storie che funzionano ricorrono infatti alcune figure o meccanismi archetipici, molto spesso utilizzabili anche per raccontare delle "storie di Scienza". Fra questi ci sono la lotta contro ostacoli apparentemente insormontabili, il conto alla rovescia verso un evento temuto, la contesa con avversari sleali, l'incomprensione degli altri, "la traversata del deserto", ecc. Queste immagini sono utili soprattutto all'inizio di una narrazione, dove servono a stabilire il rapporto con il lettore, e alla fine del racconto, dove aiutano a confermarne la qualità emotiva.

Una buona "storia di Scienza", oltre a trasmettere informazioni e a suscitare un'emozione, dovrebbe poi far volare più in alto, offrire una chiave di lettura importante o comunicare il senso dell'argomento: la storia dovrebbe, in altre parole, ridurre la complessità dell'argomento ad un livello "legittimo", senza sacrificare troppo la profondità concettuale.

2.6 Nuove tecnologie e contesto formativo

La Pedagogia si è posta negli ultimi anni il problema del ruolo che la Tecnologia può svolgere nel contesto formativo, quanto contribuisce alla trasmissione dell'informazione, quanto è incisiva come strumento che veicola la conoscenza, quanto aumenta le competenze del soggetto che la utilizza nel suo processo d'apprendimento. Inoltre, una delle questioni fondamentali riguarda quanto, attraverso la Tecnologia, il messaggio formativo giunge al discente. Poiché i sistemi tecnologici hanno assunto un ruolo così preponderante, quasi invadente nel quotidiano, è inevitabile il dubbio su quale possa essere (o sarà) il ruolo della Tecnologia nel processo d'insegnamento-apprendimento, quale livello di mediazione può giungere ad assumere e quali sono le potenzialità didattiche di tecnologie emergenti e non ancora consolidate e perfezionate.

Sfruttate in modo adeguato e consono all'ambiente e alle finalità educative, le tecnologie diventano un forte sostegno al normale processo di insegnamento-apprendimento, potenziando in senso positivo il sistema di formazione offerto dalla Pedagogia tradizionale. Lo scopo non è quello di ribaltare il modello classico di formazione pedagogica, o di rivoluzionare il rapporto docente-discente, scalzando completamente la metodologia e l'impostazione concettuale di base, ma di stabilire quale livello di mediazione formativa devono rivestire le tecnologie e soprattutto di affermare che queste forniscono un valido supporto all'apprendimento. Da anni la Pedagogia Sperimentale studia come i soggetti-discenti accolgono il cambiamento che l'utilizzo combinato dei computer porta con sé, e se questa occorrenza sviluppa quelle che sono le categorie didattiche e pedagogiche atte alla creazione di un sano rapporto nell'apprendere.

È chiaro come la Tecnologia abbia portato un grande contributo nel processo di apprendimento, in quanto non è soltanto un veicolo privilegiato attraverso il quale trasferire conoscenza, ma emerge nei soggetti, colo solo utilizzo degli strumenti a loro disposizione, la consapevolezza e l'autocoscienza dell'acquisizione dei meccanismi conoscitivi relativi alla Tecnologia stessa. Naturalmente la gestione dell'informazione e dei saperi è stata modificata notevolmente dall'uso dei nuovi sistemi tecnologici.

Ovviamente la ricerca nel campo delle nuove Tecnologie per l'insegnamento è ancora aperta: nuovi approcci in questo senso sono ancora in fase di progettazione, ossia si tratta di verificare empiricamente come utilizzare e piegare la Tecnologia all'insegnamento, senza inficiare i suoi meccanismi tradizionali e senza compromettere il ruolo predominante che l'insegnamento deve avere.

Sfruttare la Tecnologia e la realtà virtuale in direzione educativa e formativa è una grande occasione per scoprire come si forma il sapere, come si trasmette ideando, costruendo e sperimentando nuove forme di Comunicazione.

2.7 I sistemi Tutoriali Intelligenti

I Sistemi Tutoriali Intelligenti (ITS: Intelligent Tutoring Systems) vengono progettati principalmente per soddisfare l'esigenza di un'assistenza all'apprendimento di tipo specializzato e individualizzato ossia del tipo uno studente - un insegnante. Un ITS svolge una funzione molto simile a quella di un insegnante umano. Il sistema personalizza la sessione di apprendimento sulla base degli interessi dello studente, delle sue conoscenze, delle capacità e degli errori che commette. Caratteristica dei sistemi ITS è quella di rappresentare esplicitamente e separatamente sia le conoscenze del dominio trattato (ad esempio, Fisica, Biologia, Matematica) sia conoscenze pedagogiche. L'architettura di base di un sistema tutoriale intelligente comprende:

- *l'esperto di dominio:* contiene la rappresentazione esplicita della conoscenza da fornire allo studente espressa sotto forma di un modello (di conoscenza) in grado sia di comunicare all'esterno i concetti e le proprietà del dominio di applicazione, sia di dotare il sistema di capacità dinamiche per l'elaborazione della conoscenza esperta. Il modello consente perciò all'esperto di dominio di generare automaticamente le soluzioni ai problemi formulati allo studente nel corso del processo di insegnamento, di spiegare i passi del ragionamento seguito e di confrontare i processi di inferenza dello studente stesso con quelli corretti del sistema. Ne segue che è potenzialmente possibile valutare sia il livello di apprendimento, sia i progressi nello studio del dominio in esame da parte dello studente.

- *il modello dello studente:* interpreta le risposte fornite dallo studente formulando ipotesi sulle conoscenze che hanno permesso di produrre tali risposte. Tale modulo deve perciò mantenere un modello individuale dello specifico studente in esame. In alcuni sistemi l'uso di conoscenze diagnostiche esplicitamente rappresentate nel sistema permette di spiegare la genesi degli errori e delle distorsioni relative al dominio di applicazione.
- *il modulo pedagogico:* contiene conoscenze specialistiche sulle strategie didattiche e le tecniche di insegnamento. È il modulo deputato alla pianificazione della presentazione degli argomenti e dei problemi da risolvere sulla base della strategia didattica scelta e delle informazioni contenute nel modello dello studente e nell'esperto di dominio. Le strategie didattiche permettono al modulo di decidere, ad esempio, quando e come fornire spiegazioni, riassunti, esempi, ed analogie; quale tipo di aiuto, suggerimento o feedback fornire allo studente ecc. Nei sistemi più avanzati il modulo contiene anche un repertorio di "meta-strategie" didattiche che vengono usate per scegliere il metodo didattico più appropriato da utilizzare nelle varie situazioni di apprendimento che si presentano. Il modulo pedagogico stabilisce anche le modalità di interazione e di presentazione dei materiali allo studente.
- *l'interfaccia utente:* controlla il flusso delle comunicazioni da e verso l'utente traducendo le informazioni dal linguaggio di rappresentazione interno al sistema ad un linguaggio più facilmente comprensibile allo studente.

Un'importante evoluzione dei sistemi ITS è rappresentata da quei sistemi che anziché simulare al calcolatore l'insegnante hanno cercato di simulare lo studente. Esistono fondamentalmente tre possibili scenari di apprendimento:

a) il calcolatore viene visto come compagno alla pari, ossia dotato approssimativamente delle stesse conoscenze e capacità dello studente reale. In questo scenario non è previsto alcun insegnante, per cui lo studente reale e quello simulato, devono aiutarsi reciprocamente e cooperare nella soluzione di problemi;

b) lo scenario precedente viene arricchito con un insegnante virtuale. In questo caso lo studente reale e quello virtuale imparano sotto la guida del tutore virtuale; questo significa, per esempio, che entrambi possono risolvere in parallelo i problemi posti dall'insegnante e poi confrontare e discutere le rispettive soluzioni;

c) il calcolatore viene visto come un compagno, dotato però di conoscenze e di capacità inferiori di quelle dello studente reale; lo studente reale impara insegnando al compagno virtuale. Con questo tipo di sistemi si è cercato di arricchire il contesto sociale in cui avviene l'apprendimento dello studente reale rispetto agli ITS tradizionali. Ciò ha consentito, tra l'altro, di simulare e verificare varie teorie di apprendimento come il "reciprocal tutoring", il "cooperative learning" e il "learning by teaching" (Chan e Chou, 1997).

Lo sviluppo dei sistemi tutoriali intelligenti rimane quindi un processo complesso, che ha bisogno di strumenti autore appropriati e di competenze approfondite di ingegneria della conoscenza. Questo fatto ne ha condizionato fino ad ora la diffusione. Per una rassegna dei sistemi autori per ITS si veda (Murray, 1999).

2.8 Gli ambienti interattivi per l'apprendimento

Gli Ambienti Interattivi per l'Apprendimento (ILE: Interactive Learning Environments) sono insiemi di strumenti che costituiscono un ambiente nel quale lo studente può liberamente sperimentare la propria iniziativa e costruire in tal modo la propria conoscenza nel dominio di istruzione. A differenza dei sistemi ITS, dove il controllo dell'interazione è prevalentemente a carico del sistema (l'utente riceve istruzioni su cosa fare secondo un modello di istruzione rappresentato nel sistema), negli ILE l'utente ha maggiore libertà di iniziativa e quindi è potenzialmente più libero di esplorare l'ambiente istruzionale secondo le proprie necessità, i propri obiettivi e preferenze. I primi sistemi ILE non possedevano né un modulo utente né obiettivi didattici propri da soddisfare. Attualmente molti sistemi includono funzionalità degli ITS (ad esempio un modulo pedagogico) tra le risorse a disposizione dell'utente. Questo tipo di sistemi viene usato soprattutto per sviluppare capacità e abilità piuttosto che conoscenze concettuali. Lo studente impara simulando esperimenti, risolvendo problemi specifici o eseguendo attività complesse come la progettazione di apparati tecnici, la ricerca di guasti in apparecchiature, la manutenzione di impianti, ecc., secondo l'approccio dell'imparare facendo “earning by doing”. Un esempio di ambiente di apprendimento di questo tipo è rappresentato dallo Science Learning Space proposto da (Koedinger, Suthers e Forbus, 1999).

Il sistema, orientato all'apprendimento per scoperta in domini fisici, integra tre diversi sistemi software:

- un simulatore (Active Illustrations) mediante il quale è possibile prevedere il comportamento di uno o più modelli del fenomeno fisico da studiare e raccogliere dati;
- un insieme di strumenti (Belvedere) mediante i quali è possibile visualizzare i dati secondo modalità diverse (per esempio mediante grafici, istogrammi, ecc.), formulare ipotesi e valutarle;
- un modulo pedagogico (Tutor Agent) che monitorizza l'attività dello studente e lo assiste in accordo ad un modello cognitivo esplicito dell'attività che lo studente deve svolgere.

Per esempio, nel caso della sperimentazione e investigazione scientifica il modello dell'attività prevede un ciclo (di inquiry) costituito dalle seguenti fasi: formulazione del problema di ricerca, generazione di ipotesi, progettazione dell'esperimento ed esecuzione, raccolta, interpretazione e modellizzazione dei risultati, valutazione della ipotesi di partenza, identificazione di un nuovo problema ecc.

Esempi di ILE su web sono RiverWeb Quality Simulator per l'educazione ambientale e l'analisi di impatto ambientale; CyclePad per lo studio della Termodinamica e la progettazione di sistemi termodinamici; Gallery of Interactive Geometry per la Geometria.

2.9 Agenti intelligenti

Il termine “agenti intelligenti” viene usato con uno spettro molto ampio di significati ed è per questo molto difficile dare una definizione precisa ed esaustiva del termine (Bilotta, 1999).

Un agente è un sistema computerizzato capace di svolgere azioni autonome ed è in grado di adattarsi facilmente ad un ambiente dinamico, imprevedibile ed aperto. Le tecnologie degli agenti sono una naturale estensione degli attuali approcci component-based e hanno il potenziale di influenzare enormemente le vite e il lavoro di tutti noi, perciò quest’area è una delle più dinamiche ed esaltanti della computer science oggi. Di seguito sono riportati alcuni fra i domini di applicazione in cui la tecnologia degli agenti gioca un ruolo fondamentale:

- *Grid Computing*. Dove l’utilizzo di sistemi multi-agent renderà possibile un efficiente uso delle risorse per un calcolo delle infrastrutture ad alto rendimento nei campi di applicazione della Scienza, dell’Ingegneria, della Medicina e del Commercio.
- *Electronic Business*. Dove approcci basati sugli agenti stanno già sostenendo l’automazione e la semi-automazione delle attività di raccolta-dati e delle operazioni di acquisto attraverso Internet.
- *Semantic Web*. Dove c’è bisogno degli agenti sia per fornire servizi che per fare il miglior uso possibile delle risorse disponibili.

Altri campi d’applicazione includono, ad esempio, operazioni di monitoraggio e controllo, di gestione delle risorse e dello spazio, e anche applicazioni militari e industriali (M. Luck, P. McBurney, C. Preist, 2003).

Quello degli agenti intelligenti è un settore di ricerca che sta cambiando il nostro modo di interagire con i sistemi informatici e computerizzati. È complessa la mole di lavori, convegni, ricerche e applicazioni che riguardano tali tecnologie. Alcuni progetti dedicati a tale settore hanno lo scopo di massimizzare le possibilità per lo sviluppo di nuovi ambienti per l’educazione, supportati da nuove interfacce.

Il prodotto informatico destinato ad avere successo è quello che è facile da utilizzare, un software quasi “invisibile” che si adatta bene al compito per il quale è stato pensato ed alle varie esigenze dell’utente (Carli, 2000).

Gli agenti intelligenti sono il nuovo tipo di software al centro dell'attenzione nel settore dello *"Human Computer Interaction"* (interazione uomo-computer) proprio per la loro adattabilità.
Un agente è un'entità software il cui comportamento è definito integralmente dall'utente attraverso un linguaggio di programmazione. Ogni agente ha delle specifiche proprietà che sono:

- *autonomia* - la capacità di un agente di operare senza direttive esterne, nel senso che è in grado di fare scelte e prendere decisioni senza l'intervento di un' entità sovra-ordinata;
- *capacità di comunicare* - la capacità di comunicare con il mondo esterno, di interagire con un utente o con altri agenti;
- *reattività* - la capacità di rispondere agli stimoli esterni in modo da adattare la propria attività ai cambiamenti che avvengono nell'ambiente, soprattutto dal punto di vista temporale;
- *nozioni mentali* - la capacità di avere delle conoscenze, ricordare esperienze, avere una visione propria dell'ambiente che lo circonda e degli altri agenti con cui collabora a seconda del livello delle sue abilità sociali, essere in grado di apprendere dalle proprie esperienze interagendo con l'ambiente e con gli altri tramite rapporti sociali;
- *persistenza* - la capacità di permanere nel tempo, ciò significa che la durata della vita dell'agente è superiore alla durata dei compiti di base che esso esegue, un agente continua ad esistere con uno stato interno in modo da poter eseguire interazioni successive;
- *vitalità* - la capacità di un agente di sopravvivere, la capacità cioè di risolvere situazioni anomale che porterebbero altrimenti l'agente in uno stato di instabilità che comprometterebbe la sua persistenza;
- *mobilità* - l'agente ha la capacità di variare i partner di comunicazione e di spostarsi in ambienti diversi da quello di partenza;
- *abilità sociale* - la capacità di comunicare con gli altri, magari cooperando nel perseguimento di obiettivi, scambiando informazioni e conoscenze;

- *proattività* - oltre che reagire in risposta all'ambiente, gli agenti sono capaci anche di esibire comportamenti diretti ad obiettivi, prendendo l'iniziativa in maniera autonoma;
- *veridicità* - un agente non deve comunicare false informazioni;
- *benevolenza* - un agente fa sempre ciò che gli si comanda.

Si possono identificare, combinando alcune di queste proprietà, diversi tipi di agenti:

- *Autonomous Agents* (agenti autonomi) - agenti che hanno la capacità di percepire e di adattare il loro comportamento ai cambiamenti dell'ambiente in cui si trovano in modo da soddisfare i loro obiettivi. Lavorano in parallelo con l'utente e rimangono attivi anche dopo il raggiungimento del loro obiettivo principale, al fine di svolgere attività secondarie come osservare ed imparare dall'utente;
- *Entertainment Agents* (agenti per l'intrattenimento) - agenti interattivi a scopo di intrattenimento;
- *Information Agents* (agenti informativi) - agenti che hanno accesso a diverse fonti di informazioni, in grado di controllare e manipolare le informazioni raccolte per rispondere alle domande interattive dell'utente;
- *Intelligent Agents* (agenti intelligenti) - agenti che eseguono una serie di operazioni per soddisfare sia le richieste di un utente che le richieste di un altro agente;
- *Interface Agents* (agenti interfaccia) - agenti che danno assistenza agli utenti, mentre questi interagiscono con altri strumenti computazionali. L'Interface Agent è attivato dall'utente al fine di coadiuvarlo nel raggiungimento dei propri obiettivi. Esempi di sistemi che utilizzano agenti interfaccia sono sistemi di "tutoring" (con lo scopo di istruire) intelligenti, dove l'agente osserva l'utente senza intraprendere alcuna azione autonomamente, fornisce dei suggerimenti sul modo migliore di risolvere il problema;
- *Autonomous Interface Agents* (agenti ad interfaccia autonoma) - agenti che possono operare in parallelo con l'utente, visualizzando i risultati parziali e

accettando l'intervento umano per modificare il proprio operato, rimanendo attivi per svolgere operazioni non di interesse dell'utente.

Tutti sono d'accordo nell'affermare che c'è differenza tra i software tradizionali e i software agents.

Un software agent deve essere autonomo, indipendente, si deve adattare all'ambiente in cui opera e deve saper comunicare con gli altri agenti ed utenti.

Un agente può accrescere la propria conoscenza per meglio assistere l'utente nel suo operato. I metodi per far acquisire le conoscenze all'agente possono essere classificati nel seguente modo:

- *user looking* (guardando l'utente) - l'agente accresce la propria conoscenza osservando l'utente, anche a sua insaputa, per un certo periodo, tiene traccia delle sue scelte e modifica il suo profilo utente;
- *user indirect feedback* (feedback indiretto dell'utente) - l'agente propone dei risultati all'utente e prende nota quando l'utente trascura il suggerimento proposto, compiendo azioni anche contrarie;
- *user direct feedback* (feedback diretto dell'utente) - l'agente impara chiedendo espliciti chiarimenti sulle scelte fatte dall'utente;
- *learning by example* (imparare attraverso esempi) - l'utente può fornire all'agente un insieme di esempi sui quali basarsi. Vi sono due possibili approcci: gli esempi sono dei casi particolari molto spesso ipotetici, forniti all'agente in anticipo per il suo addestramento, in questo caso le sue conoscenze sono statiche; gli esempi sono reali e l'utente li indica all'agente man mano che accadono, in questo caso si avrà una crescita dinamica delle sue conoscenze;
- *agent asking* (agente che chiede) - l'agente quando non ha conoscenze specifiche su un argomento, chiede ad altri agenti di fornirgli informazioni utili per risolvere il problema proposto (Carli, 2000).

Indubbi i vantaggi nell'utilizzare agenti in sistemi educativi.

Diversi laboratori stanno sviluppando lavori sul problema delle "believability" connesse alla trasmissione di informazioni, in particolare allo sviluppo di agenti interfaccia semanticamente realistiche (Thorisson, 1996).

Un altro tipo di sistema basato su agenti che vivono in ambienti virtuali sono gli agenti pedagogici animati, particolari entità che aiutano gli studenti nelle attività di apprendimento, sia individuali che collaborative.

2.10 Agenti pedagogici

Un agente è una entità che percepisce il suo ambiente attraverso dei sensori e che agisce su di esso mediante attuatori. Esso è costituito da un sistema software (detto programma d'agente) e da un'architettura. La architettura fornisce al programma le percezioni dei sensori, esegue il programma d'agente ed infine trasmette le scelte delle azioni da eseguire, calcolate dal programma, agli attuattori man mano che queste vengono generate. Esistono diversi livelli di sofisticazione di un agente a seconda della quantità e qualità di conoscenze codificate nel programma: si va da agenti con riflessi (il programma è costituito da semplici regole del tipo stimolo/risposta), ad agenti basati sulla conoscenza che utilizzano per le decisioni delle azioni da intraprendere complessi modelli dell'ambiente esterno, delle proprie azioni, degli obiettivi da soddisfare. Una caratteristica richiesta agli agenti su web è quella di essere agenti sociali. Un agente sociale è in grado di interagire con altri agenti mediante atti linguistici espliciti. L'agente sociale è inoltre in grado di assumersi e far propri scopi di altri agenti - ossia avere scopi sociali - e perseguirli in vece loro sia in seguito a forme di delega esplicita più o meno aperta sia sotto forma di coordinamento implicito. La capacità principale di un agente sociale è dunque quella di interagire ed interoperare con altri agenti sia naturali sia artificiali per l'esecuzione di attività e l'uso di risorse. La specifica FIPA (Foundation for Intelligent Physical Agent) propone uno standard da applicare alla costruzione di piattaforme di agenti su web e all'implementazione degli agenti stessi per garantire l'interoperabilità fra piattaforme diverse assieme ad un linguaggio (l'ACL: Agent Communication Language) per la comunicazione tra agenti. Gli agenti pedagogici sono un'applicazione della tecnologia degli agenti finalizzata a supportare l'apprendimento di compiti e procedure in domini complessi.

Gli agenti pedagogici animati, in particolare, integrano funzionalità sia degli ITS sia dei sistemi ILE. L'agente è un personaggio sintetico animato (simile a quelli utilizzati nei giochi e nelle applicazioni d'intrattenimento) che opera in un ambiente virtuale interattivo condiviso con lo studente. Ad esempio, Steve (Johnson, Ricktel e Lester; 2000) è un agente pedagogico situato nella sala macchine virtuale di una nave e insegna agli studenti come operare con le apparecchiature presenti a bordo. L'apprendimento delle procedure operative avviene tramite dimostrazione diretta da parte dell'agente, che è in grado di interagire con lo studente, adattare il proprio comportamento ai bisogni dello studente e allo stato corrente dell'ambiente in cui sono situati, di collaborare e comunicare con lui e infine di sfruttare diverse modalità comunicative non solo verbali (ad esempio, movimenti della testa, espressioni del volto, dello sguardo, gesti, intonazione della voce, ecc.) per rendere l'interazione il più possibile naturale e simile ad un'interazione faccia a faccia.

La capacità di coordinare l'espressione del volto, con il movimento del corpo e i gesti delle mani assieme alla capacità di simulare emozioni, permette agli agenti pedagogici animati di emulare aspetti e comportamenti umani, e di arricchire anche visivamente l'interazione con lo studente in modo da rendere la sua esperienza più coinvolgente, piacevole e motivante.

Agenti pedagogici analoghi sono stati sviluppati nel campo dell'istruzione medica (Adele), in botanica (Herman the Bug) per lo studio delle reti di telecomunicazione (Cosmo) e dei calcolatori (WhizLow) e per guida alla navigazione su Web (PPP).

Gli agenti pedagogici hanno permesso di incorporare aspetti dell'apprendimento ignorati dai primi sistemi ITS: un più ricco contesto sociale per l'apprendimento costituito, ad esempio, da teams composti sia da agenti umani sia artificiali, ambienti realistici virtuali in cui operare o risolvere problemi, l'uso della multimedialità per rendere l'interazione tra sistema e studente più naturale, credibile e motivante.

2.11 Conclusioni

Abbiamo in questo capitolo accennato brevemente al contesto di utilizzo delle nuove tecnologie per la Visualizzazione, la Comunicazione Scientifica e la Didattica attraverso gli Agenti Virtuali.

Nel prossimo capitolo parleremo dell'uso che noi abbiamo fatto di queste nuove tecnologie, e di come abbiamo tenuto presenti le strategie di Divulgazione Scientifica, fin ora discusse, per la realizzazione di una serie di video didattici per insegnare la Matematica a bambini fra i 6 e i 10 anni.

Capitolo 3
Video didattici realizzati per insegnare la Geometria Euclidea in maniera semplice e divertente

Il lavoro di tesi consta principalmente di una serie di lezioni sotto forma di video didattici riguardanti alcuni specifici argomenti di Matematica elementare, indirizzati a ragazzi in età scolare tra i 6 e i 10 anni. Allo scopo di rendere interessanti e accattivanti agli occhi dei bambini i concetti base della Matematica, abbiamo scelto di spiegarli in maniera semplice e divertente, in modo da superare quel difficile approccio che solitamente caratterizza il primo apprendimento di questa disciplina. Le lezioni riguardano specifici argomenti scelti all'interno dell'Aritmetica Pitagorica e le basi della Geometria Euclidea. Il percorso da noi seguito si basa, principalmente, sulla "uguaglianza di figure" (intendendo con questo, in particolare, i criteri di congruenza ed equivalenza, i movimenti rigidi ed i criteri di similitudine dei triangoli). Contemporaneamente, vengono spiegate le frazioni, le proporzioni, i poligoni regolari e i concetti di circonferenza e di distanza tra due punti; i bambini impareranno così anche ad eseguire le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione. Lo scopo è di mostrare ai bambini come tutti questi fondamentali concetti base della Matematica non siano a sé stanti, ma profondamente correlati tra loro; e come, in particolare, la Geometria fornisca sempre un approccio più legato all'intuizione per introdurre in modo più semplice e visivo concetti astratti successivamente esprimibili attraverso formule algebriche o analitiche. Vorrei segnalare che l'uso di strumenti di multimedialità e di grafica computerizzata permettono di introdurre molti concetti di Geometria Euclidea (piana) ricorrendo esplicitamente, ed in modo efficace, ai movimenti rigidi nel piano, sfruttando così l'ausilio visivo della strumentazione di stampo "meccanico" che, di fatto, costituisce una della basi storiche della Geometria Euclidea stessa e che, comunque, ne riporta l'essenza dallo studio algebrico-analitico (peraltro potente) allo studio delle trasformazioni rigide del piano, cioè di tutte e sole quella trasformazioni che – in ossequio al "programma di Erlangen" di Felix Klein (Klein F., (ried. 1974), – la caratterizzano in termini di invarianza di rette, piani, circonferenze ed angoli. Il tutto di ben più potente efficacia visiva, resa appunto possibile dall'uso dello strumento informatico.

3.1 Percorso didattico

Al momento abbiamo realizzato tutte le sceneggiature di tutte le lezioni: il nostro percorso didattico prevede 14 lezioni della durata di circa 6/7 minuti l'una; per ora sono già stati realizzati integralmente due video che vengono allegati a questa tesi per completezza.

Per stabilire il percorso didattico da seguire abbiamo tenuto conto di quanto detto dal Prof. Arzarello e riportato da noi nel capitolo 1: il bambino all'età di sei anni ha già fatto una serie di esperienze di carattere matematico – nella scuola dell'infanzia, in contesti di gioco e di vita familiare e sociale – e ha già consolidato alcune fondamentali competenze logico-matematiche.

Più precisamente, verso i sei anni egli ha maturato esperienze significative relativamente alle seguenti competenze: contare oggetti e valutarne la quantità sul piano concreto; eseguire semplici operazioni sempre sul piano concreto; confrontare, ordinare, classificare, porre in relazione oggetti in rapporto a diverse proprietà (estensione, lunghezza, altezza, forma, colore,…), ricorrendo a modi più o meno sistematici; utilizzare concretamente semplici strumenti di misura; usare simboli per la registrazione; risolvere semplici problemi tratti dalla vita quotidiana e di interesse immediato; orientarsi nello spazio (sopra/sotto, avanti/indietro,…) e nel tempo (prima/dopo); localizzare persone e oggetti nello spazio; rappresentare percorsi ed eseguirli anche dietro semplici indicazioni verbali.

Occorre comunque avere ben presente che il percorso per il raggiungimento dei concetti matematici e della loro formalizzazione non è lineare, ma passa necessariamente per momenti cruciali che costituiscono salti cognitivi in quanto affrontano concetti che possono costituire ostacoli per l'apprendimento o essere fonte di fraintendimenti e misconcetti.

Un tipico esempio è l'introduzione delle frazioni. Infatti, come evidenziato dall'UMI (http://umi.dm.unibo.it), durante la scuola elementare risulta molto complicato per i bambini comprendere il passaggio dai numeri naturali ai numeri razionali. Noi abbiamo cercato di favorire questo passaggio mostrando in un primo momento un uso operativo delle frazioni in contesti significativi, per poi passare all'esplorazione e riflessione sulle proprietà che caratterizzano le frazioni in quanto oggetto di studio, con il fine di costruire gradualmente un'idea appropriata dell'insieme numerico dei numeri razionali che esse rappresentano.

Questo argomento è affrontato da noi nella seconda lezione, che parte dal punto medio di un segmento per arrivare a spiegare le frazioni e come si misurano le lunghezze.

Di seguito sono riportati alcuni passaggi salienti tratti dalla sceneggiatura della seconda lezione.

> S: […] avevamo anche parlato di metà (*segmento AB che si piega nel punto M*): infatti AM è la metà del segmento AB. In linguaggio matematico questa cosa si scrive così: AM=1/2AB (*appare immagine AM=1/2 AB*)
>
> C.: e la metà della metà in linguaggio matematico come si esprime?
>
> S.: si dice che è un quarto di AB (*figura¼ AB*) […]
>
> S.: […]…eeeeh…costruire la terza parte, la quinta parte, ecc. è più complicato…! (*pausa*) se prendo AD, lui è tre volte AB quindi si dice che AB è la terza parte di AD e si scrive: AB=1/3AD (*appare l'immagine di AD diviso in tre segmenti uguali che si staccano e vanno a sovrapporsi*). Ci vogliono, infatti, tre segmenti della lunghezza di AB per costruire AD; (*appare intanto AF*) mentre ci vogliono 5 segmenti come AB per costruire il segmento AF. (*primo piano di Compasso con espressione confusa e perplessa*) Non ci credi?...(*pausa*) Guarda! (*appaiono un pennello ed un vasetto di vernice*) vediamo quante gocce di vernice ci vogliono per colorare i nostri segmenti (*prende una goccia di vernice e la distribuisce lungo il segmento AB*); per il segmento AB ne basta una sola. (*pausa*) Ora

vediamo per colorare tutto il segmento AC quanto colore serve (*prende una goccia e colora solo metà segmento*)

C: …mmm…non basta…ne serve dell'altra…

S: (*prende un'altra goccia di vernice e colora l'altra metà del segmento*) Ecco fatto! Per colorare il segmento AC ci vuole il doppio della vernice che abbiamo usato per il segmento AB.

C: Scommetto che per colorare AD occorrono, invece, tre gocce di vernice! E per colorare AF ce ne vogliono cinque…! […] (per la versione completa si veda l'appendice a questa tesi)

Vorremmo sottolineare la scelta di rendere concetti quali doppio o metà in termini di quantità di vernice utilizzata per colorare un segmento che abbia lunghezza doppia rispetto ad un altro, o che misuri la metà dello stesso segmento: in questa seconda lezione la quantità di vernice serve a stabilire la distanza fra due punti; ma vediamo cosa succede più avanti, nella quarta lezione.

S.:[…] …??*(confusa)* Rombi che si dividono in triangoli isosceli?! Triangoli rettangoli che uniti insieme formano quadrati e rettangoli?!! Non ci capisco più niente!

C.: va bene; allora te lo spiego usando il solito vasetto di vernice. Vediamo quanta vernice occorre per colorare il rettangolo.

(S. versa un vasetto di vernice sul rettangolo e ne colora solo una metà)

C.: non vedi che non basta? Ne serve dell'altra!

(S. versa un altro vasetto e riesce *a colorarlo tutto, riempiendo anche la seconda metà)*

C.: allora, Squadretta, quanta vernice occorre per colorare la parte di piano occupata da questo rettangolo?

S.: due vasetti. E allora?

C.: aspetta…!! *(intanto sulla scena il rettangolo torna bianco, si divide in due all'altezza della diagonale, e i due triangoli rettangoli si staccano)* Ora vediamo quanta vernice devi adoperare per riempire di colore la parte di piano occupata da questi due triangoli rettangoli!!

(S. versa un vasetto di vernice e riesce a colorarne uno solo. Poi con un altro vasetto colora anche l'altro triangolo rettangolo)

S.: ma certo! Come ho fatto a non capirlo prima!!! Ci vogliono sempre due vasetti di vernice perché la quantità di spazio da colorare è sempre la stessa!!!!

Lo stesso metodo è stato da noi utilizzato per spiegare il concetto di area (si noti che noi non forniamo le formule per ricavare l'Area, ma vogliamo solo spiegarla in quanto misura della porzione di piano occupata da una figura).

Sempre allo scopo di sottolineare come gli argomenti di Aritmetica o di Geometria siano tutti strettamente collegati tra loro abbiamo poi spiegato, come si può notare, i poligoni regolari come figure formate da altre figure che abbiamo già imparato a riconoscere nella lezione precedente: i triangoli. Nella terza lezione abbiamo infatti introdotto i triangoli e gli angoli nei triangoli per poi passare, nella quarta lezione, a figure geometriche che apparentemente potrebbero sembrare più complesse, ma che in realtà sono costruite assemblandone di più semplici.

Una volta stabilito cosa è un triangolo e cosa è un poligono regolare, e quante varietà di triangoli e poligoni esistono, si può finalmente iniziare a "giocare" con essi. Dopodiché si succedono una serie di lezioni sui criteri di similitudine, durante le quali vengono spiegati altri concetti indispensabili per capire quando due figure si dicono essere uguali e quando invece sono solamente simili. Innanzitutto abbiamo dovuto chiarire cosa si intende per movimento rigido…:

> S: […] Compasso, tu hai detto che due figure sono uguali se si possono sovrapporre perfettamente, spostandone una senza deformarla fino a che le due figure non combaciano perfettamente. Ma mi spieghi cosa significa spostare una figura senza deformarla?
>
> C: Hai ragione, te lo spiego subito. Spostare una figura senza deformarla vuol dire che tutte le lunghezze di tutti i segmenti che uniscono i suoi punti non cambiano durante il movimento.. *(immagine di un triangolo che si apre e si chiude, si allunga e si accorcia durante il movimento e poi non combacia con l'immagine della sua forma primitiva [intanto appare la scritta "MOVIMENTO NON RIGIDO". Poi appare una circonferenza che, muovendosi, si deforma e, di nuovo appare la scritta "MOVIMENTO NON RIGIDO"].*
> *Poi immagine dello stesso triangolo che nel muoversi non altera le lunghezze dei suoi segmenti e l'ampiezza degli angoli, ed una circonferenza con due diametri disegnati che muovendosi non si deforma [appare la scritta "MOVIMENTO RIGIDO"]).* Se tutte queste lunghezze non cambiano diciamo che il movimento è rigido. Se il movimento è rigido, anche tutti gli angoli che si possono disegnare nella figura non cambiano (*immagine di quadrato che deformandosi diventa un rombo "MOVIMENTO NON RIGIDO"; immagine di quadrato che muovendosi non si deforma"MOVIMENTO RIGIDO"*).
> (vedi lezione 5 in Appendice)

quando due rette si dicono parallele tra di loro…:

C.: Guarda bene! Il terzo lato del più piccolo è ora dentro al triangolo più grande e le rette che contengono questi due lati sono distinte *(appaiono i prolungamenti del terzo lato del più piccolo e del più grande).*

S.: Si, va bene…ma scusa, Compasso, io non ho capito. Cos'hanno di tanto particolare queste rette?

C.: *(ridendo)* Non si incontrano mai!!!! *(pausa, intanto appaiono parti più lontane di queste rette)*
E sai come vengono chiamate due rette nel piano che non si incontrano mai?

S.: Ma, certo!!! Vengono chiamate RETTE PARALLELE!!!

C.: E se in un piano ho una retta ed un punto fuori di essa *(figura)* quante rette parallele alla retta data passano da quel punto?

S.: *(Traccia la parallela che passa da quel punto e poi prova a tracciarne altre ma ovviamente non ci riesce: le altre si incontrano sempre con la retta data)*. Una sola…!

C.: Brava!!!!

S.: *(Tutta emozionata)* Bello! Ma si può dimostrare che due rette parallele non si incontrano mai?

C.: No, ci devi credere. Devi accettare questo fatto senza poterlo dimostrare o capire visivamente, anche perché ogni retta è infinita e non possiamo mica seguirla tutta…

…quando invece si dicono perpendicolari e cosa vuol dire parlare di altezza rispetto alla base…:

> C.: Si, certo! Ora ti spiego…*(appaiono una retta ed un punto fuori di essa*) siccome per un punto esterno a una retta passa una ed una sola retta parallela alla retta data, è anche vero che se scelgo una retta e un punto esterno, per quel punto passa una ed una sola retta che forma un angolo retto con la prima *(figura).* Questa unica retta si chiama la RETTA PERPENDICOLARE alla retta data. L'abbiamo già vista *(appare la figura dei 4 angoli retti)* e i quattro angoli formati sono tutti angoli retti. Ora, se in un triangolo scegliamo un vertice e tracciamo l'unica perpendicolare alla retta che contiene il lato opposto (*figura di altezza rispetto alla base in un triangolo)* troviamo l'unica altezza del triangolo rispetto alla base che abbiamo scelto. Attenzione, però! Se il triangolo contiene un angolo più grande di un angolo retto il punto H che troviamo sulla retta del lato può essere fuori del lato! *(figura di tre triangoli: in uno l'altezza si trova dentro il triangolo; in un altro l'altezza si trova fuori dal triangolo; nel terzo l'altezza coincide con uno dei lati, quindi coincide con un cateto perché il triangolo è rettangolo).* Questo punto H lo chiameremo il piede della perpendicolare.
>
> S.: Quindi di altezza rispetto alla base scelta ce né una sola…Ma…perché…quante basi può avere un triangolo?
>
> C.: Ovviamente tre!!!! Ogni triangolo ha tre vertici e tre lati e quindi in ogni triangolo si può scegliere un lato qualunque come base e trovare l'altezza che corrisponde a quel lato scelto come base. *(figura di un triangolo isoscele che ruota e a turno i tre lati fanno da base e viene messa in evidenza l'altezza relativa alle possibili basi; poi la stessa animazione prima con un triangolo rettangolo, poi con uno scaleno).* (vedi la lezione 7 in Appendice)

…per poi tornare al concetto di Area…:

> C.: Ma, allora, due triangoli uguali hanno la stessa area, mentre se sono solamente simili hanno aree diverse…!
>
> S.: *(ridendo)* è ovvio! Compasso, hai scoperto l'acqua calda! La cosa importante è che esiste una relazione precisa tra le aree di due triangoli simili! Ora ti faccio vedere…

…e spiegare addirittura, attraverso la Geometria - e quindi utilizzando un approccio di tipo visivo - cosa vuol dire trovare il quadrato di un dato numero.

> S.:[…] è più facile capirlo con i quadrati. Prendiamo un quadrato piccolo *(figura)*. Se ne usiamo quattro, messi in questa posizione *(il quadratino si quadruplica e forma un quadrato più grande)* costruiamo un quadrato la cui area è quattro volte quella del quadrato piccolo mentre il lato è doppio. Se ne usiamo nove *(figura)* l'area del quadrato grande misura nove quadratini e il lato è il triplo del lato del quadrato piccolo.
>
> C.: e se volessimo costruire un quadrato con il lato che è cinque volte il lato del quadratino, quanti quadrati piccoli ci vogliono?
>
> S.: Lo vediamo subito *(posizionano cinque quadratini uno accanto all'altro e formano il primo lato; poi chiudono il quadrato; quest'ultimo viene riempito di quadratini posizionati uno accanto all'altro; C. inizia a contare i quadratini e questi man mano cambiano colore)*
>
> C.: Uno, due, tre, …25!

S.: Si, ma…perché contare ogni volta! Il meccanismo è facile! Se il lato piccolo viene riprodotto un certo numero di volte per formare un lato più grande, il quadrato più grande contiene tanti quadratini. E sai quanti ce ne vogliono…? Esattamente quanto vale il prodotto di quel numero di volte per se stesso!

C.: *(perplesso)*

S.: Guarda!!! Uno per uno è uguale ad uno *(figura del quadratino)*; due per due è uguale a quattro *(figura del quadratino riprodotto quattro volte fino a formare un quadrato di lato due: due lati vengono messi in evidenza);* tre per tre è uguale a nove *(al quadrato di prima si vanno ad aggiungere altri sei quadratini e come prima i lati vengono messi in evidenza);* quattro per quattro è uguale a sedici *(come prima ma con otto quadratini in più);* cinque per cinque fa venticinque *(come prima ma con dieci quadratini in più);* sei per sei fa trentasei (*come prima ma con dodici quadratini in più);* sette per sette fa quarantanove *(come prima ma con quattordici quadratini in più);* otto per …

C.: Va bene, ve bene,… ho capito! Basta trovare il prodotto di ogni numero per sé stesso…

S.: Si! E allora come lo chiameremo questo nuovo numero…?

C.: Il “QUADRATO” del numero scelto!

Rifacendoci sempre a quanto affermato dal professor Arzarello, abbiamo cercato di esporre argomenti di carattere aritmetico attraverso il loro corrispettivo geometrico, in modo tale da spiegare - attraverso le immagini - argomenti che solitamente risultano astratti e quindi poco comprensibili agli occhi dei bambini (e non solo).

Nella prima lezione, infatti, siamo partiti dai concetti di retta, semiretta e segmento, con qualche accenno anche agli angoli, per arrivare a spiegare, nella seconda lezione, il concetto di frazione.

Abbiamo poi utilizzato il Teorema di Talete per spiegare un concetto difficile da capire come quello di proporzione: solitamente questo teorema non può essere compreso senza prima aver ben afferrato cosa vuol dire quando due segmenti, o figure geometriche, si dicono in proporzione l'uno con l'altro; ma vediamo come è stato da noi affrontato questo delicato problema:

> V. F. C.: […] Ora prendiamo un'altra retta trasversale, che non sia parallela alla prima trasversale *(S. traccia l'altra trasversale in modo che il primo segmento in alto sia il doppio del primo segmento in alto della trasversale disegnata precedentemente).* Queste due rette, non essendo parallele, si incontrano in un punto A *(le trasversali vengono prolungate fino ad incontrarsi)*. Si sono così formati due triangoli…
>
> C. e S.: *(perplessi)*
>
> *(vengono messi in risalto i due triangoli che si sono formati)*
>
> C.: ma certo!!!! Eccoli!!!
>
> S.: ma si, certo! Li vedo anche io!!! E sono anche simili!!!!!
>
> V. F. C.: Si, e infatti si costruiscono tutti così i triangoli simili tra loro! Ma c'è di più! Talete ci ha detto che tutti i segmenti che si formano sono, a due a due, legati dallo stesso rapporto, cioè dalla stessa frazione…[…]

In questo modo abbiamo anche evidenziato l'importanza dell'uso delle frazioni, non solo riferite alla lunghezza di segmenti, ma come operazione aritmetica "speciale" per spiegare rapporti fra oggetti.

Poiché, finalmente, abbiamo tutti gli elementi, in una lezione successiva (più precisamente nella lezione numero undici) viene spiegato come si fa a dividere un segmento in tre parti uguali (si noti che questo argomento era stato toccato durante la seconda lezione ma abilmente evitato da Squadretta perchè troppo complicato).

> C.: Senti, Squadretta, ma ora possiamo finalmente imparare come si fa a dividere un segmento in un numero qualunque di parti uguali? […] […] se io volessi dividere un segmento in tre parti? O in cinque?
>
> S.: Ecco perché ci serve il teorema di Talete! Perché ci aiuta a farlo!!! Finalmente possiamo! Mettiamoci insieme e dividiamo un segmento in tre parti!!!! Iniziamo a disegnare il solito segmento AB su una retta orizzontale…*(tracciano una retta e su di essa fissano due punti A e B, e individuano così un segmento AB)* Ora tracciamo la retta perpendicolare al segmento nel punto A e scegliamo su di essa un punto a caso *(Compasso esegue, e fissa un punto C sulla perpendicolare)* Ora…Compasso, non muovere i piedi!!!!
>
> C.: *(Compasso si guarda i "piedi")*…eeeeh…perché?
>
> S.: Perché adesso dobbiamo riportare esattamente il segmento AC altre due volte…se ti apri di più o di meno non riusciremo mai a trovare la terza parte del segmento AB!!! […]
>
> C.: […] Sono proprio bravo!!! Ora AC, CD e DE hanno la stessa lunghezza!
>
> S.: Bene! E adesso disegniamo le rette perpendicolari a quella verticale partendo dai due punti C e D…*(intanto disegna le rette perpendicolari)*
>
> C.: Sono tutte parallele a quella orizzontale!!!

S.: si, perché formano angoli retti con la verticale…ora tracciamo la retta che unisce i punti E e B *(unisce E e B).* Vedi che taglia queste orizzontali in due punti, H ed L? *(appaiono i punti H ed L).*

C.: Si, si, certo, li vedo…!

S.: Ebbene…grazie a Talete sappiamo che la lunghezza di EA è tripla di quella di AC. Allora DL è la terza parte di AB…e…pensa che bello…sappiamo anche che CH è il doppio della terza parte di AB e, quindi, misura i 2/3 del segmento AB da cui siamo partiti!!!!

Il nostro percorso si conclude con la lezione sul Teorema di Pitagora, argomento che solitamente non viene affrontato durante la scuola elementare, ma che a nostro parere può essere facilmente compreso dai bambini se si segue questo percorso didattico: noi vorremo portare i bambini a porsi delle domande e, magari, a rendersi conto di quante cose si possono fare con i concetti che hanno appreso durante le lezioni precedenti.

S: […] Tracciamo un segmento e riproduciamolo quattro volte su questa retta orizzontale (*Squadretta e Compasso insieme riproducono il segmento quattro volte)*. […]

S.: […] Ah, si. Ora disegniamo la perpendicolare. Prendiamo lo stesso segmento e riportiamolo sulla verticale, per tre volte *(di nuovo Compasso e Squadretta riproducono il segmento per tre volte).* Ora, Compasso, uniamo le due estremità*…(Squadretta unisce i due punti e quindi traccia l'ipotenusa del triangolo rettangolo)* Compasso, sai dirmi quanto è lunga l'ipotenusa di questo triangolo rettangolo?

C.: *(Compasso misura in "segmenti" l'ipotenusa)* Si…è cinque volte il segmento!!!!!Ma, Squadretta, ne sei proprio sicura? Non è che abbiamo sbagliato a contare?

S.: No, no, è vero!!! *(Compasso con aria perplessa)* […] Ti ricordi come si calcola l'area del quadrato?

C.: Si, certo! È il prodotto della lunghezza del lato per se stesso.

S.: Allora, il quadrato costruito sul cateto più piccolo ha area 9 perché è formato da 9 quadratini, se il segmento che hai scelto è lungo 1 *(intanto si colorano ad uno ad uno i quadratini).*[…]

S.: Il quadrato costruito sul secondo cateto vale 16, perché è formato da 16 quadratini. Infatti 4x4 fa 16 *(si colorano ad uno ad uno tutti e 16 i quadratini).*

C.: Si! E quello costruito sull'ipotenusa vale per 25, perché è formato da 25 quadratini, visto che 5x5 fa 25; …o sbaglio?

S.: Ok, vedo che hai capito. Ma ti sei accorto che 25 è la somma di 9 e di 16? Vedi la figura?*(intanto appare la solita costruzione ma il quadrato costruito sull'ipotenusa è diviso in un quadrato formato da 16 quadratini, due da 4 quadratini ciascuno, e uno da un solo quadratino).* Quindi, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è la somma delle aree dei due quadrati, più piccoli, costruiti sui cateti.[…]

S.: […] Pitagora ha scoperto che questo è vero in ogni triangolo rettangolo…non solo i questo con lati lunghi 3, 4 e 5! E non è un colpo di magia, perché scomponendo i quadrati in pezzi si può far vedere che è proprio vero *(appare la figura dimostrativa)* che in ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è la somma dei quadrati costruiti sui cateti.

3.2 Aspetti tecnici e grafici

Il motivo per cui costruiamo personaggi 3D o avatar che possono sembrare meno attraenti dei personaggi che incontriamo nella vita reale è probabilmente da rintracciarsi nel fatto che alle persone piace esprimere ruoli e comportamenti da loro creati. Questo desiderio gioca un importante ruolo nei mondi virtuali dove i personaggi possono essere spettatori e attori allo stesso tempo. I personaggi virtuali tridimensionali - o avatar - sono qualcosa di più di semplici sculture statiche fatte di poligoni: sono capaci di interagire con il loro ambiente all'interno di un mondo virtuale o in relazione ad un utente che li manovra dall'esterno del loro mondo virtuale.

Nella creazione di un attore virtuale viene attribuita grande importanza all'animazione dei particolari: una spiccata attenzione all'animazione dei gesti, alle posture particolari del corpo e, in generale, alla personalità dell'avatar, aiuta a definire meglio il ruolo di un attore virtuale e a facilitare la comprensione delle interazioni sociali in un mondo virtuale (Luck M., McBurney P., Preist C., 2003).

Nel suo libro "Building a Character", Stanislavski descrive l'importanza della ricerca dei giusti dettagli per la creazione di un personaggio, come la scelta di costumi e di accessori contrastanti, contribuisce a creare una mutua attrazione fra il pubblico e il personaggio. Quando Charlie Chaplin descriveva la creazione del suo personaggio del "vagabondo" diceva di volere ogni cosa in contraddizione nel suo abbigliamento, i pantaloni cadenti, la maglietta stretta, il cappello piccolo e il cappotto grande (Stanislawski C., 1950).

Agenti e tecnologie multimediali possono essere convenientemente utilizzati al fine di spiegare e visualizzare concetti astratti di Matematica in maniera semplice e facilmente comprensibile, offrendo, allo stesso tempo, sia un certo rigore sia un prodotto che risulti essere accattivante e divertente. Grazie ai progressi nella Computer Graphics, le applicazioni relative alla cosiddetta "Human Computer Interface" sono state avvantaggiate dalla realizzazione di agenti sintetici visivamente piacevoli, basati sia su video reali, sia su disegni di cartoni animati o anche su modelli di grafica 3D che sembrano vivere sullo schermo. Essi assumono convincentemente i ruoli di presentatori virtuali, di attori sintetici, di compagni di squadra o di tutors. Una delle applicazioni di maggior successo di questa tecnologia, che fornisce personaggi simili a quelli reali, è rappresentata dagli ”ambienti di apprendimento basati sul computer”, dove gli agenti immessi possono assumere diversi ruoli in relazione allo studente, specialmente come figure di tutori o insegnanti. Una caratteristica comune che sottolinea la loro somiglianza alla vita reale, come partners con cui interagire, risiede in modelli computazionali che forniscono loro funzioni affettive (emozioni e personalità sintetiche) e, di conseguenza, implementano il comportamento interattivo umano o le abilità umane di presentazione. Questi agenti possono costituire l’interfaccia Uomo-Computer, migliorando in questo modo le scarse abilità comunicative tipiche dei sistemi computazionali tradizionali; per maggiori dettagli si veda (Francaviglia M., Lorenzi M.G., Senatore C., Talarico A., 2007), e la bibliografia ivi citata.

Attualmente, all’interno dell’ESG (http://galileo.cincom.unical.it/) si sta lavorando anche su questa linea di ricerca, che intreccia dominii propri della Computer Graphics e dell’Information Technologies con i classici dominii dei fondamenti e dell’insegnamento delle Scienze. A partire dai primi esperimenti con agenti realizzati negli anni ‘90 (Bertacchini P.A., Bilotta E., Servidio R., 2002) è stato successivamente creato e sperimentato, nel 2002, un prototipo di comunità virtuale visiva denominato ”Campus Game”. L’ambiente di apprendimento era formato da diverse stanze interattive, popolate da personaggi interattivi realizzati in modo da aumentare il senso di presenza e di partecipazione (Bertacchini P. A., Bilotta E., Confessore G., Lorenzi M., Serra G., 2003),

Per raggiungere risultati di visualizzazione che risultino essere in linea con la voluta compresenza di rigore e di efficacia comunicativa è a nostro parere necessario far uso di metodologie grafiche e audiovisive altamente specializzate e totalmente coerenti, che facciano affidamento sulle più moderne tecniche di arte digitale (Balzola A., Monteverdi A.M., 2004; Drioli A., 2004), in maniera da coniugare prodotti di ottima qualità grafica con una struttura tecnico-scientifica rigorosa (per quanto riguarda i singoli contenuti scientifici). Con questo intendiamo presentazioni moderne e gradevoli che non eccedano in esemplificazioni drastiche e che non ricorrano ad approssimazione scientifica (come sfortunatamente avviene in alcune delle attuali strategie multimediali di divulgazione della Fisica e della Matematica, dove la qualità scientifica è talora sottovalutata o, al contrario, dove una perfetta struttura scientifica è spesso accompagnata da una grafica di scarsa qualità, incapace di stimolare la fantasia dei fruitori).

Il potenziale offerto dall'Arte Digitale, infatti, ben si adatta a diversi ambiti di applicazione in questo specifico settore di multimedialità, ed ha lo scopo dichiarato di produrre comunicazione scientifica e oggetti di visualizzazione - ma anche di fornire un aiuto per la divulgazione e l'insegnamento - ad un livello decisamente più efficiente. Un ulteriore passo in avanti può quindi essere compiuto realizzando prodotti didattici e di comunicazione audiovisiva, in cui alta qualità scientifica e rigorosi schemi tecnici vengono coniugati con realizzazioni artistiche visivamente piacevoli ed arricchite da effetti speciali, di modo che l'impatto visivo, basato su strutture virtuali, migliori la loro capacità di attirare l'interesse degli utenti e aiuti ad ammorbidire tutte le difficoltà intrinsecamente correlate alla trasmissione di un messaggio scientifico astratto che, di regola, è lontano dall'esperienza comune (Branzaglia C., 2003; Carrada G., 2005).

Per il nostro progetto l'obiettivo principale è, come detto sopra, coniugare il rigore dei contenuti, proposti ad un livello elementare, con una grafica attraente e divertente. Per questo motivo abbiamo creato due simpatici personaggi che, attraverso gag e situazioni divertenti, accompagnano i bambini nel loro percorso didattico e rendono le lezioni divertenti, in modo tale da attirarne l'interesse. La scelta per quanto riguarda la rappresentazione grafica di questi due personaggi è ricaduta su due strumenti simbolo della Geometria Euclidea: sono infatti un Compasso ed una Squadretta (Figura 1) a spiegare concetti fondamentali come i movimenti rigidi ed il Teorema di Pitagora.

Questi agenti sono stati creati e animati usando tecniche di grafica 3D, successivamente integrate con elementi di grafica bi-dimensionale per le parti di spiegazione matematica, per ottenere un buon impatto visivo e, soprattutto, per rendere le spiegazioni più chiare ed efficaci, il tutto evitando di appesantire troppo le dimensioni dei filmati (Francaviglia M., Lorenzi M.G., Senatore C., Talarico A., 2007; Francaviglia M., Lorenzi M.G., Senatore C., 2008).

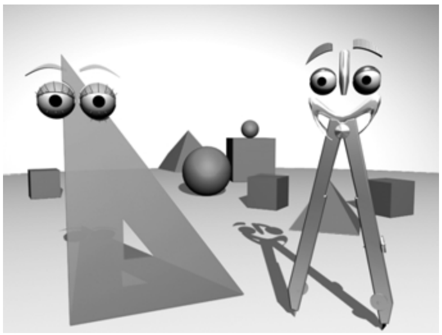

Figura 1.

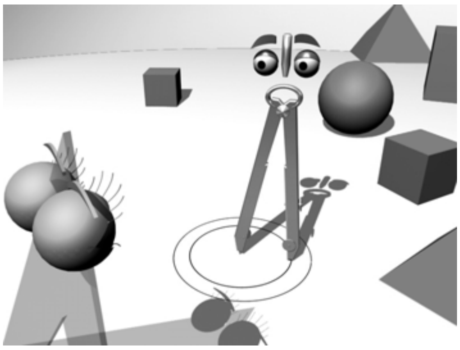

Figura 2.

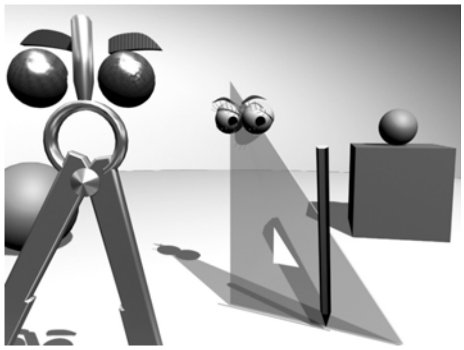

Figura 3.

Per quanto riguarda le scelte di animazione abbiamo deciso di tenere in debito conto la struttura fisica dei nostri personaggi: infatti, sia il compasso che la squadretta sono strumenti meccanici formati da elementi rigidi e facilmente animabili (Figura 2) e noi abbiamo tenuto conto di questa rigidità per definire i loro movimenti e lo stile di animazione adeguati (Figura 3), in modo tale da dare loro una caratterizzazione ed una personalità quanto più possibile vicine al contesto in cui essi si muovono (Maestri G., 1996; Williams R., 2002). I dialoghi e le voci sono stati costruiti e registrati in modo da stimolare l'attenzione dei bambini.

Le voci dei due personaggi sono state registrate da un attore professionista, Adolfo Adamo, per la voce di Compasso e per la voce fuori campo, e da Caterina Senatore per la voce di Squadretta.

3.3 Strategia didattica e Struttura narrativa delle lezioni

Le nostre strategie didattiche appartengono al cosiddetto "Context-Based Design", che si concentra su situazioni in cui la tecnologia è usata in attività che si pongono in relazione con i contesti sociali. Un significativo cambiamento evolutivo si è infatti verificato con il cosiddetto "Human-Computer Interaction Design"; prima di questo cambiamento i progettisti di software tendevano verso un design direttamente basato sulla tecnologia (Computer-Centered Design), tenendo però in scarsa considerazione i bisogni e le preferenze degli utenti finali.

Contrariamente alla spinta tecnologica del "Computer-Centered Design", lo "Human-Centered Design" pone invece l'enfasi su bisogni ed obiettivi umani e sulla tecnologia che serve a questi scopi. Un ulteriore passo in avanti è stato infine compiuto con il passaggio all'attuale "Context-Based Design" in cui l'uso, il progetto e la valutazione della tecnologia vengono socialmente co-costruite e mediate dalla comunicazione ed interazione umana.

Il "Context-Based Design" richiede che i progettisti riflettano sugli elementi del loro proprio contesto e sulla maniera in cui questo spazio interagisce con lo spazio dell'uso della tecnologia (Gay G., Hembrooke H., 2004). Il passo finale è quello di costruire una comunità virtuale collaborativa in cui gli utenti umani e gli agenti virtuali coesistano ed interagiscano con vari tipi di agenti cooperativi che supportino le loro attività di apprendimento anche nell'ambiente virtuale (Jin Q., 2002). Sottolineiamo ancora una volta che le tecniche di Arte Digitale possono qui essere usate in maniera opportuna allo scopo di ottenere un'efficiente comunicazione ed un insegnamento scientifico, a tutti i livelli, di argomenti di Matematica che, per via delle loro difficoltà e della distanza naturale dall'esperienza comune, richiedono spesso l'ausilio di esemplificazioni grafiche ed audiovisive di tipo innovativo. In situazioni strettamente collegate all'esperienza quotidiana, una visualizzazione tradizionale può spesso risultare adeguata, ma si richiede qualcosa di più per parlare di cose che anche una mente ben addestrata può trovare difficili da capire. Per questi motivi soltanto strumenti avanzati di visualizzazione possono raggiungere la mente dell'utente priva di "informazioni primordiali" (Vince J., 1995). Per quanto riguarda la sperimentazione a fini didattici, menzioniamo che appena saranno pronti i pacchetti di lezioni sulla geometria elementare essi saranno usati in programmi sperimentali di insegnamento a livello elementare attraverso la collaborazione di un certo numero di scuole primarie; per questo abbiamo in programma anche di scrivere nell'immediato futuro, unitamente al completamento dei video delle restanti lezioni, un breve testo di accompagnamento per aiutare gli insegnanti ad un uso ottimale ed efficiente dell'intero pacchetto.

Per quanto riguarda le scelte più propriamente narrative abbiamo cercato di rendere le quattordici lezioni non come a sé stanti ma, nel svilupparle, le abbiamo costruite come un'unica storia; questo innanzitutto per mostrare ai bambini come questi argomenti siano collegati tra loro e poi per creare una struttura narrativa omogenea con una storia da seguire e personaggi per cui "tifare". Noi speriamo che gli spettatori/bambini arrivino a chiedersi: cosa succederà ora…? Sarà Compasso ad avere la meglio, o sarà Squadretta…? O, invece, scopriranno che solo collaborando "da buoni amici" riusciranno a portare a termine il loro importante compito…?

Appendice
Sceneggiature delle Lezioni

Lezione 1

(*Compasso e Squadretta discutono sul loro ruolo riguardo alla rappresentazione di figure geometriche; ciascuno dei due vanta per se il primato.)*

Compasso: (*tracciando circonferenze e rivolgendosi a Squadretta*) Un concetto fondamentale è la distanza tra due punti…Guarda come sono bravo! Io riesco a tracciare infinite circonferenze di raggio qualunque, aprendomi o chiudendomi di più. Squadretta, ma tu sai cosa significa? Cosa è una circonferenza? E che cosa è il suo raggio?

Squadretta: (*un po' stizzita*) certo che lo so…una circonferenza è una figura geometrica in cui tutti i punti si trovano alla stessa distanza dal centro e questa distanza si chiama raggio. E allora?! Io, invece, posso tracciare segmenti di retta e angoli retti, vedi? (*traccia segmenti e costruisce angoli retti*)

C:. *(ride)* …costruire un angolo retto…? e che ci vuole?! questo riesco a farlo anch'io! mi basta un segmento e….

Voce F.C.: Basta!!! Così i bambini non capiscono niente! Voi avete il difficile ed impegnativo compito di spiegare alcuni dei concetti più importanti della geometria quindi, smettetela di litigare e cercate di andare per ordine. Spiegate innanzi tutto cos'è una retta.

C. ed S.: (*si guardano imbarazzati*)

C.: …ha ragione…(*girandosi verso la camera*) Allora, bambini, (*fissa due punti A e B ad una certa distanza l'uno dall'altro*) una retta è un ins… (*si gira di scatto verso Sqd*) allora Squadretta vuoi darti da fare? Non posso mica fare tutto da solo?!

S.: si, certo, scusa. (*traccia una retta che passa dai due punti fissati da Compasso*)

C.: dicevamo, una retta è un insieme di punti allineati tra loro. Il tratteggio che vedete agli estremi sta ad indicare che la retta si estende illimitatamente da entrambe le parti, a sinistra e a destra…anche se noi ne vediamo solo una parte…(*la camera si avvicina e fa vedere che in realtà la retta è formata da punti*). (*Poi la camera si allontana di nuovo e Compasso riprende*) La figura che vedete, in realtà, è composta da tre pezzi; infatti oltre gli estremi si trovano due semirette (*vengono colorate diversamente*); quello che vedete al centro si chiama, invece, segmento ed è facilmente riconoscibile perché ha un inizio (*viene messo in evidenza il punto* A) ed una fine (*viene messo in evidenza il punto* B). La semiretta di destra inizia nel punto B, ma non termina mai... e non si sa dove va a finire. Al contrario, la semiretta di sinistra non ha un inizio, ma va a finire nel punto A. Ogni punto di una retta, infatti, la divide in due parti che chiamiamo semirette; e questo punto lo chiamiamo ORIGINE (*appare la vignetta "ciao, io sono l'origine"*), perché in quel punto la semiretta inizia verso destra (*freccetta luminosa*) o finisce arrivando da sinistra (*freccetta luminosa*).

S.: e un angolo cos'è?

C: un attimo, squadretta, ora ci arrivo. L'angolo è la parte di piano compresa fra due semirette aventi l'origine in comune (*le due semirette si staccano dal segmento centrale e vanno a formare un angolo qualsiasi; dopodichè appaiono varie figure di sfondo con angoli ben in evidenza (forbici aperte, piramide, ecc.*)). Ben vedete, bambini, che l'angolo è una parte illimitata di piano, perché sono illimitate le semirette che lo racchiudono. Attenzione, però! C'è un angolo interno e ce n'è anche uno esterno! Quello esterno è quello che contiene il prolungamento delle due semirette. Quello interno è più piccolo; ed è quello che per noi sarà il vero angolo formato dalle due semirette…

Voce F.C.: si, è vero! Ma che succede se le due semirette sono una il prolungamento dell'altra? (*figura*)

SQD e Comp (*insieme*): In questo caso il piano si divide in due parti uguali e ciascuno dei due angoli si chiama un angolo piatto! Esterno ed interno sono allora indistinguibili…

C.: Quando l'ampiezza dell'angolo è metà di un angolo piatto, cioè quando le semirette ed i loro prolungamenti dividono il piano in quattro parti uguali, si dice che ciascuno di questi quattro angoli è un angolo retto (*le semirette si spostano fino a formare un angolo retto e nel frattempo appaiono figure di sfondo con angoli retti (tavolo, mattonella, ecc.)*

S.: (*si fa avanti e inizia a disegnare un angolo retto*)

C.: Ferma!!! Cosa stai facendo?

S.: disegno un angolo retto!?

C.: nooo! Questo posso farlo anch'io! Basta una riga ed io, da solo, posso costruire un angolo retto!

S: si è vero, ma ti serve una riga! Io sono più brava perché oltre alle rette disegno subito gli angoli retti…tu continua a disegnare circonferenze e non invadere il mio campo…(*gli occhi di compasso si riempiono di lacrime*)

Voce F.C.: Squadretta, non essere antipatica! Sai benissimo che, lavorando insieme e da buoni amici, riuscirete a costruire un angolo retto in meno tempo ed anche molte altre figure…

S.: (*rivolgendosi a Compasso*) Scusami, Compasso. Non è vero che servi solo a disegnare circonferenze. (*traccia un segmento AB*). Ecco ora puoi costruire anche tu angoli retti.

C.: (*C. punta in A, poi fa un saltello e punta in B, trova C e C' e SQD unendo C e C' trova il punto M)* bambini vedete? Insieme abbiamo costruito ben 4 angoli retti: infatti CB, CM, C'A e C'B sono tutti angoli retti.

(*Compasso e Squadretta si guardano sorridendo*)

S.: Sono proprio soddisfatto del nostro lavoro! siamo una forza!!!

C.: Hai ragione, tu ed io insieme faremo molte cose…

Lezione 2

(Compasso avanza verso Squadretta con cappello a cilindro e papillon)

S.: Compasso…! Ma come ti sei vestito?

C.: Sai, dopo la prima lezione siamo diventati famosi! Ora tutti ci riconoscono per strada! Siamo come due star del cinema! Anzi di più!!! E, ovviamente, ci vuole il vestito adatto!

S.: (*girandosi verso la camera*) ma mi dite voi come faccio a lavorare con un tipo del genere? È matto…! (*poi rivolgendosi a Compasso*) va bene, va bene… ma ora togliti questi fronzoli ed iniziamo la seconda lezione. Dunque, dove eravamo rimasti? Ah… si. Avevamo costruito 4 angoli retti (*appare la figura*) dopo aver trovato i punti C e C'. M è il punto medio di AB, cioè divide il segmento AB in due segmenti uguali (*il segmento AB si piega nel punto M e fa vedere che AM e MB hanno la stessa lunghezza*) quindi AM =MB e la lunghezza di AB è 2 volte quella AM; questo vuol dire che AB è il doppio di AM. Osserva… diciamo anche che il punto C' è il punto simmetrico del punto C rispetto alla retta che passa per A e B.

C.: Ma possiamo ricavare anche il doppio di AB, il triplo, il quadruplo, ecc. Ora vi facciamo vedere come (*usando come raggio AB ricavano BC e poi CD…*)

S: avevamo anche parlato di metà (*segmento AB che si piega nel punto M*): infatti AM è la metà del segmento AB. In linguaggio matematico questa cosa si scrive così: AM=1/2AB (*appare immagine AM=1/2 AB*)

C.: e la metà della metà in linguaggio matematico come si esprime?

S.: si dice che è un quarto di AB (*figura¼ AB*)

C.: e la metà della metà della metà?

S.: un ottavo di AB (*figura1/8AB*)

C.: e la metà della me…

S.: bè, ora basta!

C.:ok, ok, scusa…(*pausa*)…e la terza parte?

S.: …eeeeh…costruire la terza parte, la quinta parte, ecc. è più complicato…! (*pausa*) se prendo AD, lui è tre volte AB quindi si dice che AB è la terza parte di AD e si scrive: AB=1/3AD (*appare l'immagine di AD diviso in tre segmenti uguali che si staccano e vanno a sovrapporsi*). Ci vogliono, infatti, tre segmenti della lunghezza di AB per costruire AD; (*appare intanto AF*) mentre ci vogliono 5 segmenti come AB per costruire il segmento AF. (*primo piano di Compasso con* *espressione confusa e perplessa*) Non ci credi?...(*pausa*) Guarda! (*appaiono un pennello ed un vasetto di vernice*) vediamo quante gocce di vernice ci vogliono per colorare i nostri segmenti (*prende una goccia di vernice e la distribuisce lungo il segmento AB*); per il segmento AB ne basta una sola. (*pausa*) Ora vediamo per colorare tutto il segmento AC quanto colore serve (*prende una goccia e colora solo metà segmento*)

C: …mmm…non basta…ne serve dell'altra…

S: (*prende un'altra goccia di vernice e colora l'altra metà del segmento*) Ecco fatto! Per colorare il segmento AC ci vuole il doppio della vernice che abbiamo usato per il segmento AB.

C: Scommetto che per colorare AD occorrono, invece, tre gocce di vernice! E per colorare AF ce ne vogliono cinque…!

S: (*prende tre gocce di vernice e colora il segmento AD, poi prende 5 gocce di vernice e colora il segmento AF*)

V.F.C.: Bella scoperta! A questo punto c'erano arrivati anche i bambini! Sapreste invece dire quanta vernice occorre per colorare la metà del segmento AD?

C. e S.: (*si guardano imbarazzati e perplessi…poi appare una lampadina e insieme…*) Ma certo! È un conto facilissimo! (*Compasso e Squadretta tracciano il punto medio di AD e lo chiamano M*)

C.: Basta fare tre diviso due! Questa operazione si chiama frazione (*appare la scritta 3/2 e la voce fuori campo dice"tre mezzi"*). Anche la metà è una frazione e si scrive ½. E anche 1/3, ¼, 1/5, 1/8 sono frazioni!e per fare 5/2 basta prendere la metà di AF, che era lungo cinque volte il nostro segmento unità AB.

Lezione 3

(Compasso puntando nel punto medio di AB traccia una circonferenza)

C.: Questa circonferenza ha il suo centro in M.

S.: Che cosa è il centro?

C.: Il centro è quell'unico punto del piano che sta alla stessa distanza da tutti i punti che formano la circonferenza. Questa distanza è già stata chiamata raggio della circonferenza. Se P è un punto della circonferenza anche il segmento MP si chiama raggio *(viene disegnato il raggio MP, poi appare una ruota di bicicletta come figura di sfondo).*

S.: (*Indicando il segmento AB*) Il segmento AB, che ha lunghezza doppia rispetto al raggio, si chiama DIAMETRO e divide la circonferenza in due parti uguali, che si chiamano semicirconferenze.

(*Metà circonferenza si stacca e va a sovrapporsi all'altra; poi S. usando come ipotenusa il diametro AB costruisce un triangolo retto inscritto nella semicirconferenza e l'angolo retto viene messo in evidenza*)

C.: Oramai abbiamo imparato tutti a riconoscere un angolo retto… ma quello che ancora non sapete è che questo che abbiamo appena disegnato non è un angolo retto qualsiasi, ma è formato da due lati di un triangolo! Infatti la figura ABC che vedete si chiama triangolo rettangolo perché i due lati AC e AB formano un angolo retto. (*i tre lati del triangolo vengono colorati diversamente*) e il punto C si chiama il VERTICE dell'angolo retto (*viene messo in evidenza il vertice).*

S.: si,si…! Ma ogni volta che si considera un angolo formato da due semirette *(appare un angolo, con le semirette in colori diversi)* il punto V da cui escono le semirette si chiama vertice dell'angolo.

(dissolvenza in nero, poi appare nuovamente la figura del triangolo inscritto nella semicirconferenza)

S.: Assomiglia a me!

C.: Si, è vero. E non è l'unico! Infatti, usando come base il diametro di una circonferenza possiamo costruire tantissimi triangoli rettangoli diversi tra di loro che somigliano ad una parte di te!

(*S. intanto disegna altri triangoli rettangoli inscritti nella semicirconferenza*)

C.: ma ne esistono anche di più diversi!

S.: più diversi....? in che senso? Cosa intendi per "più"…?

C.: voglio dire… esistono triangoli non rettangoli, cioè i cui lati non formano nessun angolo retto!

S.: e come sono fatti?

Voce F. C.: Calma! Prima di iniziare a spiegare i vari tipi di triangoli, direi che è il caso di chiarire cosa è un triangolo; voi che ne dite?

S. e C.: (*imbarazzati, con goccioline di sudore*) certo, certo…

S.: Come al solito siamo stati troppo frettolosi. Un triangolo è una figura del piano composta da tre segmenti uniti tra di loro nei punti estremi in modo da formare una figura chiusa *(appare il segmento AB, a questo si va ad attaccare il segmento BC e poi il segmento CD che dapprima non chiude il triangolo, poi si sposta ed il punto D va a sovrapporsi al punto A).* La parte di piano che forma la figura è il triangolo ABC. I segmenti AB, BC e CD si chiamano lati. I punti A, B e C si chiamano vertici del triangolo.
(*Intanto appaiono diversi triangoli di diverso tipo*) Ma attenzione! Per far sì che questa figura si possa "chiudere" e possa essere così chiamata triangolo, la lunghezza di ciascuno dei tre lati deve essere minore della somma delle lunghezze degli altri due lati.

C.: ma la lunghezza di un lato non può essere uguale alla somma delle lunghezze degli altri due lati? O anche addirittura essere più grande?

S.: No!! È impossibile!!! Né uguale né più grande. Ti faccio vedere subito. I segmenti a e b messi uno di seguito all'altro hanno la stessa lunghezza del segmento c (*si vedono il segmento c e poi a e b che attaccati hanno la stessa lunghezza del primo)* ora vediamo se riescono a formare un triangolo!!! (*si staccano e cercano di formare un triangolo sistemandosi in vari modi, ma non ci riescono*). Se non ci riesci con tre segmenti di cui il terzo è la somma degli altri due, non puoi riuscirci nemmeno se il terzo è più grande della somma degli altri due. *(pausa)*
Compasso, ma quanti tipi di triangoli conosci oltre al triangolo rettangolo?

C.: Allora, esiste un tipo generico di triangolo che ha tutti e tre i lati disuguali e si chiama triangolo scaleno (*appare la figura di un triangolo scaleno; poi i tre lati si staccano e vanno a posizionarsi uno sotto l'altro e si nota che i tre segmenti sono uno diverso dall'altro*); abbiamo poi un altro tipo molto particolare di triangolo che in qualche modo è più bello degli altri: infatti i suoi tre i lati hanno tutti la stessa lunghezza. Un triangolo di questo tipo si chiama equilatero (*appare la figura di un triangolo equilatero, poi i lati si staccano e si vanno a sovrapporre*). E, ovviamente, non possiamo dimenticarci del triangolo isoscele che ha, invece, solo due lati uguali (*appare la figura di un triangolo isoscele*). Ovviamente, un triangolo equilatero è un caso molto particolare di triangolo isoscele, nel caso in cui anche il terzo lato è uguale agli altri due *(figura di triangolo isoscele che si allarga fino a diventare equilatero).*
Nel triangolo equilatero non solo i lati sono uguali; sono uguali anche gli angoli!

Infatti, come potete vedere, anche ruotandolo, gli angoli si sovrappongono sempre (*figura triangolo che ruota e lati e angoli che combaciano sempre*).
Nel triangolo isoscele, invece, solo due sono gli angoli uguali (*ribaltandolo si vede che i due angoli alla base e i due lati obliqui combaciano*).
In un triangolo scaleno, infine, sono disuguali sia i lati che gli angoli: infatti se proviamo a sovrapporli non combaciano mai (*figura di triangolo che ruota e lati e angoli che non combaciano*).

Lezione 4

(Compasso osserva divertito un triangolo equilatero che ruota su se stesso…)

C.: Non mi stancherò mai di guardarlo!!! Lo puoi ruotare verso destra, verso sinistra e, comunque, sia i lati che gli angoli si sovrappongono sempre esattamente!!!

S.: Compasso, ma tu sai che esistono altre figure geometriche che ruotandole hanno sempre i lati e gli angoli che si sovrappongono perfettamente?

C.: (*Ci pensa un po', poi inizia a disegnare vari poligoni "strani" inscritti nella circonferenza, li ruota ma nessuno va bene*)

S.: (*sghignazzando*) Compasso, ti vedo in difficoltà…!?

C.: (*Tutto sudato disegna poligoni sempre più velocemente, ma non ne trova nessuno che vada bene*)

S.: prova a farlo con soltanto quattro lati!

C.: *(riprova ma non ci riesce. Disegna un trapezio, vari parallelogrammi, un rombo, un rettangolo, ma niente).*

S.: (*ridendo*) Non vorrai dirmi che non lo sai?

Voce F.C.: …SQUADRETTA…

S.: Che sto facendo!! Perché mi sgridi? Non lo sa!!! (*Poi rivolgendosi a Compasso*) Ma è la figura geometrica più famosa!!! Guarda! (*disegna un quadrato inscritto nella circonferenza*)

C.: Ma certo! Come ho fatto a non pensarci prima!!! IL QUADRATO!!! Infatti ha quattro lati uguali e tutti gli angoli sono retti, quindi uguali tra loro. Ovviamente, ruotandolo, lati e angoli si sovrappongono sempre!!!(*intanto il quadrato ruota*)

Voce F.C.: Bene, Squadretta, visto che sai sempre tutto, dimmi quale altra figura geometrica formata da quattro lati ha tutti gli angoli uguali.

S.: (*Inizia a disegnare vari rombi più aperti, più chiusi, più grandi, più piccoli.)*

C.: (*Ridendo*) Ma questi sono rombi! Hanno i lati uguali ma gli angoli sono diversi! O meglio, gli angoli sono uguali a due a due, vedi? (*figura*) È come se fosse formato attaccando tra loro due triangoli isosceli. (*figura di rombo tagliato in due*). Il quadrato è un caso particolare di rombo… quando gli angoli non sono soltanto uguali a due a due, ma sono tutti e quattro uguali. Se dividiamo un quadrato in due triangoli isosceli, questi ultimi non solo sono due triangoli isosceli ma sono, contemporaneamente, anche triangoli rettangoli *(figura).*

Ma c'è un altro tipo di figura geometrica che ha tutti gli angoli uguali e ha sempre quattro lati, come il quadrato. È il rettangolo!(*figura*) Solo che il rettangolo, a differenza del quadrato, ha i lati uguali a due a due (*i lati del rettangolo vengono colorati a due a due*). In realtà anche in questo caso, il quadrato è un caso particolare di rettangolo. Infatti quando un rettangolo non ha i lati uguali solo a due a due ma li ha tutti e quattro uguali, si chiama quadrato. Se taglio il rettangolo con questo segmento *(si vede il rettangolo che viene diviso in due dalla diagonale)* che si chiama diagonale, i due triangoli in cui viene diviso sono due triangoli rettangoli uguali tra loro *(il rettangolo si divide in due triangoli rettangoli che vanno poi a sovrapporsi).*

S.: …??*(confusa)* Rombi che si dividono in triangoli isosceli?! Triangoli rettangoli che uniti insieme formano quadrati e rettangoli?!! Non ci capisco più niente!

C.: va bene; allora te lo spiego usando il solito vasetto di vernice. Vediamo quanta vernice occorre per colorare il rettangolo.

(S. versa un vasetto di vernice sul rettangolo e ne colora solo una metà)

C.: non vedi che non basta? Ne serve dell'altra!

(S. versa un altro vasetto e riesce a colorarlo tutto, riempiendo anche la seconda metà)

C.: allora, Squadretta, quanta vernice occorre per colorare la parte di piano occupata da questo rettangolo?

S.: due vasetti. E allora?

C.: aspetta…!! *(intanto sulla scena il rettangolo torna bianco, si divide in due all'altezza della diagonale, e i due triangoli rettangoli si staccano)* Ora vediamo quanta vernice devi adoperare per riempire di colore la parte di piano occupata da questi due triangoli rettangoli!!

(S. versa un vasetto di vernice e riesce a colorarne uno solo. Poi con un altro vasetto colora anche l'altro triangolo rettangolo)

S.: ma certo! Come ho fatto a non capirlo prima!!! Ci vogliono sempre due vasetti di vernice perché la quantità di spazio da colorare è sempre la stessa!!!!

C.: brava… ora sai dirmi in linguaggio matematico come si chiama la misura della porzione di piano che hai dovuto colorare?

S.: …mmm…(*ci pensa un po')* Ma certo!!! Ho colorato l'AREA del rettangolo!!!

Lezione 5

S: *(Con fare furbetto)* Allora, Compasso, sai dirmi quando due figure sono uguali?

C: *(Sorride compiaciuto)* Due figure sono uguali se si possono sovrapporre perfettamente, spostandone una senza deformarla fino a che le due figure non combaciano perfettamente. Non deve restare nessuna parte scoperta né dell'una, né dell'altra!

S: In che senso…scusa? Puoi spiegarti meglio?

C: Ti faccio vedere *(appaiono due triangoli scaleni uguali)* prendiamo questi due triangoli scaleni *(uno dei due ruota fino a sovrapporsi all'altro).* Vedi? Combaciano perfettamente!! Non avanza nessun pezzo!!!! Quindi, sono uguali. Proviamo con altre figure *(appaiono due rombi);* con i rombi, ad esempio *(di nuovo uno dei due ruota fino a sovrapporsi all'altro).* Anche questi due rombi sono uguali!!! Ma ora guarda! *(poi appaiono due triangoli equilateri di grandezze diverse)* prendiamo due triangoli equilateri. Vedi come si assomigliano???!!! Eppure non sono uguali!!! Prova a sovrapporre il primo al secondo *(il più piccolo ruota e va a sovrapporsi a quello più grande)* riesci a far combaciare i lati obliqui, ma uno dei due triangoli è più piccolo dell'altro…*(intanto il pezzo che avanza lampeggia)*…e lo stesso succede se provi con gli altri lati e gli altri angoli…*(il triangolo più piccolo si sposta all'interno di quello più grande).* Queste due figure, allora, si assomigliano, ma non sono uguali, perché non si possono sovrapporre completamente.

S: Compasso, cosa è successo? Sei diventato bravissimo!!!

C: *(Compasso sorride. Poi la camera si avvicina, dissolvenza, poi appaiono delle scene in bianco e nero per dare il senso del ricordo. Da qui inizia l'antefatto)*

V. F. C.: Compasso! Sai distinguere due figure uguali da due che, invece, si assomigliano soltanto?

C: *(appare una vignetta sulla testa di Compasso e nella vignetta appaiono prima un rombo ed un quadrato, poi due quadrati, poi due rombi) (compasso ridendo)* certo che so distinguere due figure uguali da due che invece si assomigliano soltanto!!! E che ci vuole!!!!

V. F. C.: Ah davvero?!... vediamo se sei così bravo. Queste due figure sono uguali…? *(appaiono due triangoli equilateri di grandezze diverse)*

C.: certo che lo sono!!

V. F. C.: E queste? *(appaiono due circonferenze di grandezze diverse)*

C.: *(un po' più dubbioso)* Mah…si, anche queste!

V. F. C.: Ne sei proprio sicuro, Compasso?

C.: *(intanto appaiono diversi punti interrogativi intorno a Compasso)*

V. F. C.: Ecco, lo sapevo! Tieni presente che la prossima lezione sarà proprio su questo argomento; e Squadretta ha già pronte tantissime domande "strane" per metterti in difficoltà. Quindi, preparati e studia!

C.*: (primo piano di Compasso terrorizzato. Poi il tempo della storia torna al presente, e quindi a colori con il primo piano di Compasso che sorride compiaciuto)*

S: Compasso, tu hai detto che due figure sono uguali se si possono sovrapporre perfettamente, spostandone una senza deformarla fino a che le due figure non combaciano perfettamente. Ma mi spieghi cosa significa spostare una figura senza deformarla?

C: Hai ragione, te lo spiego subito. Spostare una figura senza deformarla vuol dire che tutte le lunghezze di tutti i segmenti che uniscono i suoi punti non cambiano durante il movimento.. *(immagine di un triangolo che si apre e si chiude, si allunga e si accorcia durante il movimento e poi non combacia con l'immagine della sua forma primitiva [intanto appare la scritta "MOVIMENTO NON RIGIDO". Poi appare una circonferenza che, muovendosi, si deforma e, di nuovo appare la scritta "MOVIMENTO NON RIGIDO"].*
Poi immagine dello stesso triangolo che nel muoversi non altera le lunghezze dei suoi segmenti e l'ampiezza degli angoli, ed una circonferenza con due diametri disegnati che muovendosi non si deforma [appare la scritta "MOVIMENTO RIGIDO"]). Se tutte queste lunghezze non cambiano diciamo che il movimento è rigido. Se il movimento è rigido, anche tutti gli angoli che si possono disegnare nella figura non cambiano (*immagine di quadrato che deformandosi diventa un rombo "MOVIMENTO NON RIGIDO"; immagine di quadrato che muovendosi non si deforma"MOVIMENTO RIGIDO"*).

S: Scusa, Compasso ma non ti sembra di correre un po' troppo? Iniziamo a parlare di poligoni, cioè di figure formate da segmenti di retta uniti uno ad uno fino a chiudersi..*(Squadretta guarda Compasso mortificato, poi continua)* Ho capito, da qui in poi ci penso io. Allora, bambini…per due punti passa una ed una sola retta. Se non ci credete, provate pure a farcene passare di più *(ridendo)* e vediamo se ci riuscite!!! *(appaiono due punti A e B poi la retta che li attraversa).* La lunghezza del segmento che va da A a B si chiama la DISTANZA di A da B; abbiamo già imparato a misurare le lunghezze dei segmenti…
(appaiono due segmenti di lunghezze diverse) questi due segmenti non sono uguali, infatti hanno lunghezze diverse. Facciamo il solito giochino per dimostrarlo…proviamo a spostarne uno, senza deformarlo, e a sovrapporlo al secondo. Quello più corto occuperà solo una parte di quello più lungo. Quindi, Compasso, quando è che si può dire che due segmenti sono uguali?

C: *(seccato)* Due segmenti sono uguali solo se hanno la stessa lunghezza. Uffa, Squadretta! Parli sempre di segmenti! Con i segmenti è facile!!! Ma se ho due poligoni? Per esempio due quadrati? Come faccio a sapere se sono uguali?

S: Bè,… due quadrati si assomigliano sempre, ma sono uguali solo se hanno la stessa area.

C.: *(assume un'aria perplessa)*…fammi capire meglio…!?

S: Ti faccio vedere *(intanto appaiono le figure di due quadrati uguali; uno si sovrappone all'altro)* Vedi! Questo succede perché i due quadrati hanno lati uguali.
Ma se la lunghezza dei lati è diversa…*(immagine di due quadrati diversi. Quello più piccolo si sposta e va a sovrapporsi a quello più grande e ne occupa solo una parte)*… anche l'area è diversa. Questi due quadrati hanno la stessa forma, pur non essendo uguali. Essi si assomigliano soltanto…

C: Certo!!! In questo caso si dice che sono SIMILI!!!!!

Lezione 6

S.: Ma insomma, Compasso, quando è che due figure si assomigliano?

C.: Beh, innanzitutto devono essere dello stesso tipo. Ovviamente un triangolo ed un quadrato non si assomigliano. Uno ha tre angoli e tre lati, mentre l'altro ne ha quattro!! Due poligoni, per potersi assomigliare, devono innanzitutto avere lo stesso numero di lati! *(pausa)*
Due triangoli, per esempio, possono assomigliarsi o essere molto diversi tra loro. Perché si assomiglino bisogna che uno dei due si possa spostare dentro l'altro occupandone una parte nel modo che sto per farti vedere…*(figura di due triangoli qualsiasi; uno va a sovrapporsi all'altro e un angolo e i due lati che lo compongono combaciano con quelli dell'altro triangolo: uno è più piccolo dell'altro).* In questo caso diciamo che il primo ha la stessa forma del secondo; ma la sua area è più piccola. Anche se uno è più piccolo dell'altro, siamo riusciti a sovrapporre esattamente un angolo del più piccolo a un angolo del più grande, perché questi due angoli sono uguali. I lati del triangolo piccino adiacenti a questo angolo si sono sovrapposti ai lati del più grande. Ma siccome questi lati sono più piccoli, nel triangolo minore, il triangolo più piccolo ha coperto solo una parte del triangolo maggiore. E guarda che è successo…! *(figura precedente)*

S.: Cosa devo guardare? Io non vedo niente di strano…

C.: Guarda bene! Il terzo lato del più piccolo è ora dentro al triangolo più grande e le rette che contengono questi due lati sono distinte *(appaiono i prolungamenti del terzo lato del più piccolo e del più grande).*

S.: Si, va bene…ma scusa, Compasso, io non ho capito. Cos'hanno di tanto particolare queste rette?

C.: *(ridendo)* Non si incontrano mai!!!! *(pausa, intanto appaiono parti più lontane di queste rette)*
E sai come vengono chiamate due rette nel piano che non si incontrano mai?

S.: Ma, certo!!! Vengono chiamate RETTE PARALLELE!!!

C.: E se in un piano ho una retta ed un punto fuori di essa *(figura)* quante rette parallele alla retta data passano da quel punto?

S.: *(Traccia la parallela che passa da quel punto e poi prova a tracciarne altre ma ovviamente non ci riesce: le altre si incontrano sempre con la retta data)*. Una sola…!

C.: Brava!!!!

S.: *(Tutta emozionata)* Bello! Ma si può dimostrare che due rette parallele non si incontrano mai?

C.: No, ci devi credere. Devi accettare questo fatto senza poterlo dimostrare o capire visivamente, anche perché ogni retta è infinita e non possiamo mica seguirla tutta…*(dissolvenza. Il tempo della storia torna al passato. Tutto in bianco e nero. Compasso cammina lungo due rette parallele. Poi inizia a corre in maniera sempre più affannosa).*

V. C. F. : *(Con voce seccata)* Compasso, ti ho detto che è tutto inutile! Sei proprio testardo!!! Due rette parallele non si incontreranno mai e poi mai! Non me lo sono mica inventato io...lo ha detto Euclide in persona! *(dissolvenza in nero. Appare un riquadro con la figura di Euclide e la scritta:"Euclide, Matematico greco vissuto fra il IV e il III secolo a.C.. La sua opera più importante sono gli "Elementi", che trattano la Geometria del Piano e dello Spazio).*

Lezione 7

S.: *(arriva sulla scena tutta soddisfatta)* Ho capito! Perché un triangolo sia simile a un altro bisogna che i due triangoli abbiano uno stesso angolo, in modo da potersi sovrapporre proprio su quell'angolo *(compare di nuovo la figura)*.

C.: Si, brava! Ma allora devono essere uguali anche gli altri angoli. Ti faccio vedere *(appaiono due triangoli non simili tra di loro ma con un angolo uguale; il primo si sposta fino a sovrapporsi all'altro: combacia solo un angolo)* Vedi!!! Questi due triangoli non si sovrappongono nel modo che ci interessa, anche se hanno un angolo uguale. Infatti, se sposti l'angolo in alto del primo sull'angolo in alto del secondo, il lato opposto nel primo triangolo viene a cadere all'interno del secondo triangolo, ma le loro rette si incontrano da qualche parte *(appaiono i prolungamenti dei lati opposti agli angoli in alto)* vedi? Gli angoli in basso, infatti, sono diversi! Proviamo a far combaciare gli altri angoli…*(il primo triangolo si sposta ma gli altri angoli non combaciano)*. Quindi, Squadretta, da quello che ti ho detto e fatto vedere cosa hai capito?

S.: Un triangolo può essere simile ad un altro triangolo solo se il primo triangolo si può spostare dentro il secondo triangolo, o viceversa, in modo che un angolo del primo si sovrapponga perfettamente a un angolo del secondo. Ma questo non basta!!! Perché i due triangoli siano veramente simili, i lati opposti agli angoli che combaciano devono essere paralleli! *(figura di due triangoli con i lati opposti agli angoli che combaciano non paralleli "NON SIMILI"; figura di due triangoli con angoli che combaciano perfettamente e i lati opposti paralleli "SIMILI")*…e allora anche gli altri angoli risultano uguali nei due triangoli.

C.: E se per caso due triangoli simili hanno anche un LATO uguale?

S.: *(ci pensa un po') (appaiono due triangoli uguali; uno va a sovrapporsi all'altro)* Ma certo…! In questo caso i due triangoli si sovrappongono perfettamente!!! Quindi sono più che simili: sono addirittura uguali!! E i lati opposti si sovrappongono sulla stessa retta!!!*(appaiono i prolungamenti dei lati)* Che bello, Compasso!!! *(saltellando)* Giochiamo ancora un po' con i triangoli per capire meglio…!!!

C.: va bene, va bene. Guarda! *(appaiono due triangoli isosceli non simili)* questi due triangoli isosceli non sono simili. Infatti hanno gli angoli in basso diversi… *(gli angoli del primo si staccano e vanno a sovrapporsi agli angoli del secondo e non combaciano)*. Se provi a sovrapporli *(figura dei due triangoli sovrapposti)* il più piccolo entra nel più grande, ma restano delle parti non occupate, perché il lato orizzontale, che chiamiamo BASE, del triangolo più piccolo, è più corto della base del triangolo più grande. Se dal vertice A tracciamo la retta che forma un angolo retto con la base e se chiamiamo H il punto di incontro di queste due rette *(viene tracciata l'altezza AH)*, il segmento AH si chiama l'ALTEZZA relativa alla base. In questo caso, vedi, i due triangoli hanno la stessa altezza ma basi diverse.

S.: Ma, di altezza rispetto alla base che abbiamo scelto ce n'è una sola?

C.: Si, certo! Ora ti spiego…*(appaiono una retta ed un punto fuori di essa*) siccome per un punto esterno a una retta passa una ed una sola retta parallela alla retta data, è anche vero che se scelgo una retta e un punto esterno, per quel punto passa una ed una sola retta che forma un angolo retto con la prima *(figura)*. Questa unica retta si chiama la RETTA PERPENDICOLARE alla retta data. L'abbiamo già vista *(appare la figura dei 4 angoli retti)* e i quattro angoli formati sono tutti angoli retti. Ora, se in un triangolo scegliamo un vertice e tracciamo l'unica perpendicolare alla retta che contiene il lato opposto (*figura di altezza rispetto alla base in un triangolo)* troviamo l'unica altezza del triangolo rispetto alla base che abbiamo scelto. Attenzione, però! Se il triangolo contiene un angolo più grande di un angolo retto il punto H che troviamo sulla retta del lato può essere fuori del lato! *(figura di tre triangoli: in uno l'altezza si trova dentro il triangolo; in un altro l'altezza si trova fuori dal triangolo; nel terzo l'altezza coincide con uno dei lati, quindi coincide con un cateto perché il triangolo è rettangolo)*. Questo punto H lo chiameremo il piede della perpendicolare.

S.: Quindi di altezza rispetto alla base scelta ce né una sola…Ma…perché…quante basi può avere un triangolo?

C.: Ovviamente tre!!!! Ogni triangolo ha tre vertici e tre lati e quindi in ogni triangolo si può scegliere un lato qualunque come base e trovare l'altezza che corrisponde a quel lato scelto come base. *(figura di un triangolo isoscele che ruota e a turno i tre lati fanno da base e viene messa in evidenza l'altezza relativa alle possibili basi; poi la stessa animazione prima con un triangolo rettangolo, poi con uno scaleno)*

Lezione 8

(Scena in bianco e nero. Squadretta sovrappone triangoli di tutti i tipi: prima due, poi tre, quattro, cinque, ecc.; prolunga i lati, mette a confronto gli angoli, ecc.; tutto sempre più velocemente)

V. F. C.: Squadretta…! Ma che combini?

S.: *(con voce affannosa e un po' isterica)* cerco di scoprire qualcos'altro sulla similitudine…Compasso mi sta superando…non è possibile!!! Sono sempre stata io la più brava! *(intanto continua a sovrapporre triangoli sempre più velocemente)*

(La scena torna a colori, quindi al presente)

S.: *(con aria furbetta)* Compasso, parlami ancora della similitudine…

C.: *(perplesso)* …ma… veramente… ti ho già detto tutto!!! Non c'è più niente da dire a tal proposito!!!

S.: Ah…davvero…? Io veramente ho scoperto tante cose che tu ancora non hai detto!!! Sei il solito superficiale!!

C.: *(mortificato)*

S.: Innanzitutto, se due triangoli sono equilateri allora sono sicuramente simili *(figura di due triangoli equilateri: uno si sovrappone all'altro).* Infatti in un triangolo equilatero i tre angoli sono tutti uguali e tutti uguali alla terza parte di un angolo piatto *(compaiono ad uno ad uno tre triangoli equilateri uguali che vanno a formare un angolo piatto)* Vedi? I tre angoli si sommano per dare un angolo piatto *(gli angoli vengono distinti per far capire che si tratta sempre dello stesso triangolo).* Ebbene, due triangoli equilateri sono perfettamente sovrapponibili, e quindi uguali, solo se i loro lati sono tra di loro tutti uguali. Se, invece, i lati di uno di essi sono più piccoli dei lati dell'altro, allora il primo triangolo è più piccolo dell'altro e ne copre solo una parte *(figura di due triangoli equilateri di grandezze diverse: quello più piccolo si sovrappone a quello più grande).* In questo caso i due triangoli sono simili ma non sono uguali.

C.: Va bene, va bene, Squadretta. Ma sai parlarmi solo di triangoli equilateri! Ti sei dimenticata che esistono triangoli di altro tipo?

S.: Certo che no! Guarda questo triangolo rettangolo…*(appare un triangolo rettangolo con l'angolo retto in evidenza)*…i lati che contengono l'angolo retto si chiamano CATETI *(lampeggiano)* e quello opposto all'angolo retto si chiama IPOTENUSA *(lampeggia).*

C.: E allora? Questo che c'entra con la similitudine?

S.: Ma ti lamenti sempre!! Non mi avevi chiesto di parlare di triangoli non equilateri? Bene, ora, sto parlando di triangoli rettangoli, e i lati dei triangoli rettangoli si chiamano così!!! *(pausa)…* Allora, bambini, se due triangoli sono triangoli rettangoli, tutti e due hanno un angolo retto. Ma se li prendiamo a caso *(appaiono due triangoli rettangoli; il primo va a sovrapporsi al secondo e ne occupa solo una parte: gli angoli retti, ovviamente, coincidono ma prolungando le ipotenuse queste si incontrano)* vedete che sovrapponendoli lungo l'angolo retto, cioè cercando di sovrapporre i cateti, le rette che contengono le ipotenuse si incontrano. In questo caso, per esempio, un triangolo è contenuto nell'altro e le rette che si ottengono prolungando le due ipotenuse si incontrano fuori dal triangolo. In quest'altro caso, invece, *(figura di due triangoli rettangoli con le ipotenuse che si incrociano senza doverle prolungare)* sono le ipotenuse stesse ad incontrarsi in un loro punto. Vedete che questi angoli sono diversi? *(vengono messi a confronto altri due angoli)* Anche questi? *(vengono messi a confronto gli ultimi due angoli)* Ma se li scegliamo bene*…(appaiono due triangoli rettangoli, con gli angoli uguali, uno più piccolo ed uno più grande: quello più piccolo va a sovrapporsi a quello più grande)…*allora i triangoli sono simili e le ipotenuse sono parallele! *(appaiono i prolungamenti delle ipotenuse)* E, vedete? In questo caso gli angoli che i cateti formano con le ipotenuse sono a due a due uguali*…(gli angoli uguali vengono colorati dello stesso colore)(pausa)*

(Squadretta orgogliosa si rivolge a Compasso)
S.: Sbalorditivo…vero, Compasso?

C.: (*Compasso stupefatto. Dissolvenza in nero. Fine)*

Lezione 9

C.: Ma, allora, due triangoli uguali hanno la stessa area, mentre se sono solamente simili hanno aree diverse…!

S.: *(ridendo)* è ovvio! Compasso, hai scoperto l'acqua calda! La cosa importante è che esiste una relazione precisa tra le aree di due triangoli simili! Ora ti faccio vedere…per esempio, prendi questi due triangoli equilateri *(figura di due triangoli equilateri: il primo ha il lato doppio del secondo).* Uno, il più grande, ha il lato doppio del secondo *(si stacca un lato del primo e poi uno del secondo: si mette in evidenza che ci vogliono due segmenti della lunghezza del secondo per coprire la lunghezza del primo).* Vedi che il triangolo più grande è formato da quattro triangoli uguali al più piccolo? *(il triangolo più piccolo va a posizionarsi in cima al triangolo più grande; dopodiché altri tre triangoli uguali a quello piccolo si posizionano all'interno del triangolo più grande fino a coprirlo tutto).* Facciamo lo stesso gioco con questi altri triangoli equilateri *(figura di due triangoli: il primo è nove volte il secondo).* Ora, il primo ha lato triplo del secondo: il triangolo grande contiene esattamente nove triangoli piccoli *(figura).*

C.: Fammi capire meglio…!

S.: è più facile capirlo con i quadrati. Prendiamo un quadrato piccolo *(figura).* Se ne usiamo quattro, messi in questa posizione *(il quadratino si quadruplica e forma un quadrato più grande)* costruiamo un quadrato la cui area è quattro volte quella del quadrato piccolo mentre il lato è doppio. Se ne usiamo nove *(figura)* l'area del quadrato grande misura nove quadratini e il lato è il triplo del lato del quadrato piccolo.

C.: e se volessimo costruire un quadrato con il lato che è cinque volte il lato del quadratino, quanti quadrati piccoli ci vogliono?

S.: Lo vediamo subito *(posizionano cinque quadratini uno accanto all'altro e formano il primo lato; poi chiudono il quadrato; quest'ultimo viene riempito di quadratini posizionati uno accanto all'altro; C. inizia a contare i quadratini e questi man mano cambiano colore)*

C.: Uno, due, tre, …25!

S.: Si, ma…perché contare ogni volta! Il meccanismo è facile! Se il lato piccolo viene riprodotto un certo numero di volte per formare un lato più grande, il quadrato più grande contiene tanti quadratini. E sai quanti ce ne vogliono…? Esattamente quanto vale il prodotto di quel numero di volte per se stesso!

C.: *(perplesso)*

S.: Guarda!!! Uno per uno è uguale ad uno *(figura del quadratino)*; due per due è uguale a quattro *(figura del quadratino riprodotto quattro volte fino a formare un quadrato di lato due: due lati vengono messi in evidenza);* tre per tre è uguale a nove *(al quadrato di prima si vanno ad aggiungere altri sei quadratini e come prima i lati vengono messi in evidenza);* quattro per quattro è uguale a sedici *(come prima ma con otto quadratini in più);* cinque per cinque fa venticinque *(come prima ma con dieci quadratini in più);* sei per sei fa trentasei (*come prima ma con dodici quadratini in più);* sette per sette fa quarantanove *(come prima ma con quattordici quadratini in più);* otto per …

C.: Va bene, ve bene,… ho capito! Basta trovare il prodotto di ogni numero per sé stesso…

S.: Si! E allora come lo chiameremo questo nuovo numero…?

C.: Il “QUADRATO” del numero scelto!

S.: e ora, Compasso, che ne dici se spieghiamo anche come si calcola l’area di un triangolo…?

C.: si, ora possiamo farlo.

S.: Prendiamo un triangolo, scegliamo un lato come base *(si gira)* e determiniamo la sua altezza rispetto alla base. L’area del triangolo si calcola moltiplicando la lunghezza della base per la lunghezza dell’altezza e facendo la metà di questo prodotto.

V. F. C.: Beh, fate vedere perché…!

C.: *(compare la figura del rettangolo con la stessa base e la stessa altezza)* Ma è facile…basta costruire questo rettangolo e si vede subito *(animazione)* che la sua area è doppia di quella del triangolo!

S.: Si! L’area del rettangolo è il prodotto di base e altezza. E se per caso il triangolo è la metà di un quadrato *(figura)* i lati sono uguali e questo prodotto è il quadrato del lato!

Lezione 10

V. F. C.: Bene…ora che abbiamo detto tutto sulle rette, che abbiamo parlato di parallele e perpendicolari, che abbiamo capito quando due triangoli sono simili, e che abbiamo anche parlato delle loro aree, possiamo finalmente parlare del Teorema di Talete. *(Appaiono tanti punti interrogativi intorno a Compasso e Squadretta)*

C. e S.: …eeeeh…chi sarebbe questo Talete?

V. F. C.: Come, non sapete chi è Talete?...va bene, va bene, ho capito. È arrivato il momento di mettere in funzione la nostra macchina del tempo…

C. e S.: Abbiamo una macchina del tempo??? Fantastico!!!
(viene azionata la macchina del tempo e si ritrovano a Mileto nel VII secolo a. C.)

C.: *(C. e S. si guardano intorno stupiti)* ma dove siamo?

V. F. C.: Questa è Mileto, la città dove visse Talete. Siamo nel VII secolo a. C.…

S.: …ma è tantissimo tempo fa!!!

V. F. C.: *(appare un'immagine di Talete)* Ecco, questo è Talete!

C. e S.: Oohhhh!!!

V. F. C.: Talete era un filosofo, ma anche un matematico. Dissero di lui che con poche linee scoprì cose grandissime!! Ma a noi interessa il suo Teorema. Prima di parlarne, però, dobbiamo ricordare ai bambini alcune cose importanti che servono per capirlo bene. Squadretta, ho bisogno del tuo aiuto. Traccia una retta! *(S. traccia una retta)* Ora consideriamo un punto fuori dalla retta *(appare un punto fuori dalla retta)*. Come già abbiamo visto, per quel punto passa una ed una sola retta del piano parallela alla retta disegnata *(S. traccia la parallela alla retta disegnata che passa da quel punto)*. Ma sappiamo anche che per quel punto passa una ed una sola retta perpendicolare alla retta scelta (*S. traccia la retta perpendicolare alle due parallele)*. Le due rette parallele, che abbiamo disegnato in orizzontale, sono entrambe perpendicolari alla retta disegnata verticalmente, perché gli angoli formati sono tutti angoli retti *(vengono messi in evidenza gli angoli retti)*. Ma se prendiamo due rette parallele e le tagliamo con una trasversale non perpendicolare *(scompare la retta perpendicolare e ne appare una trasversale che taglia le due parallele)*, gli angoli che si formano sono ancora a due a due uguali *(gli angoli uguali vengono colorati dello stesso colore)* ma nessuno di loro è retto. Vedete? Si sono formati otto angoli, ma è come se ce ne fossero solo due...quelli opposti sono uguali *(gli angoli opposti lampeggiano a due a due)*, ma sono uguali anche quelli che si corrispondono *(gli angoli corrispondenti lampeggiano a due a due)*.

C. e S.: Bellissimo!!!!

V. F. C.: Ora prendiamo un'altra retta trasversale, che non sia parallela alla prima trasversale *(S. traccia l'altra trasversale in modo che il primo segmento in alto sia il doppio del primo segmento in alto della trasversale disegnata precedentemente).* Queste due rette, non essendo parallele, si incontrano in un punto A *(le trasversali vengono prolungate fino ad incontrarsi).* Si sono così formati due triangoli…

C. e S.: *(perplessi)*

(vengono messi in risalto i due triangoli che si sono formati)

C.: ma certo!!!! Eccoli!!!

S.: ma si, certo! Li vedo anche io!!! E sono anche simili!!!!!

V. F. C.: Si, e infatti si costruiscono tutti così i triangoli simili tra loro! Ma c'è di più! Talete ci ha detto che tutti i segmenti che si formano sono, a due a due, legati dallo stesso rapporto, cioè dalla stessa frazione…

S.: E quali?

V. F. C.: Le lunghezze di quelli di una retta trasversale divise per le lunghezze di quelli corrispondenti sull'altra retta trasversale sono sempre nello stesso rapporto. Per esempio, vedete che il segmento AB è doppio del segmento AD? *(i due segmenti vengono messi a confronto: AB si piega nel suo punto medio e si vede che è formato da due segmenti della lunghezza di AD)*

C. e S.: Ma siiii!!! È Vero!!!

V. F. C.: Bene, anche BC è doppio di DE *(la stessa animazione di prima)*; e anche AC è doppio di AE *(la stessa animazione di prima)*

C. e S.: Ma è una cosa strabiliante!!!

V. F. C.: Ecco…!! Questo è il teorema di Talete.

S.: E se aggiungo un'altra retta, che succede?

V. C. F.: Succede sempre la stessa cosa…disegniamone un'altra! *(appare un'altra trasversale il cui segmento in alto questa volta è il quadruplo del segmento in alto della prima retta trasversale).* Questa volta i segmenti che vengono ritagliati su questa retta trasversale hanno lunghezza quadrupla rispetto ai segmenti che abbiamo sulla prima retta trasversale *(la stessa animazione di prima ma, questa volta, i sementi si dividono in quattro pezzi uguali ai segmenti che si vedono sulla prima retta trasversale).*

C. e S.: Che bello!! Che bello!!

S.: *(rivolgendosi alla V. F. C. con aria furbetta)* Le hai scelte bene, però!!! Queste sono facili!!!

V. F. C.: Hai ragione, Squadretta. Ma questo che abbiamo visto essere vero se le due rette trasversali ci danno segmenti doppi o quadrupli è solo un esempio. Tutto è vero qualunque sia, anche se più complicato, il rapporto tra le lunghezze che si corrispondono…

C.: Va bene, va bene…mi hai convinto! Ma è proprio necessario che le due trasversali siano tutte e due non perpendicolari alle rette parallele?

V. F. C. : No, no, va bene lo stesso…!!! *(la stessa animazione di prima: questa volta, però, una delle due trasversali è perpendicolare alle rette parallele).* Vedete? Tutto funziona sempre anche se una…MA UNA SOLA!… delle rette che scegliamo è perpendicolare alle rette parallele…!! Non cambia nulla, salvo il fatto che alcuni angoli sono retti ed i triangoli simili sono triangoli rettangoli *(resta solo l'immagine dei due triangoli rettangoli simili; poi dissolvenza in nero. Fine).*

Lezione 11

C.: Senti, Squadretta, ma ora possiamo finalmente imparare come si fa a dividere un segmento in un numero qualunque di parti uguali? Abbiamo imparato a dividere un segmento in due parti *(riportare la costruzione del punto medio)*, in quattro parti facendo la metà della metà; oppure in otto, e così via utilizzando sempre lo stesso metodo *(riportare la costruzione del punto medio anche per la metà della metà del segmento).* Ma se io volessi dividere un segmento in tre parti? O in cinque?

S.: Ecco perché ci serve il teorema di Talete! Perché ci aiuta a farlo!!! Finalmente possiamo! Mettiamoci insieme e dividiamo un segmento in tre parti!!!! Iniziamo a disegnare il solito segmento AB su una retta orizzontale…*(tracciano una retta e su di essa fissano due punti A e B, e individuano così un segmento AB)* Ora tracciamo la retta perpendicolare al segmento nel punto A e scegliamo su di essa un punto a caso *(Compasso esegue, e fissa un punto C sulla perpendicolare)* Ora…Compasso, non muovere i piedi!!!!

C.: *(Compasso si guarda i "piedi")*…eeeeh…perché?

S.: Perché adesso dobbiamo riportare esattamente il segmento AC altre due volte…se ti apri di più o di meno non riusciremo mai a trovare la terza parte del segmento AB!!!...allora, facendo molta attenzione, fissa altri due punti sulla perpendicolare in modo da individuare su di essa altri due segmenti della stessa lunghezza di AC.

C.: *(Compasso con molta cautela, e sempre guardandosi i "piedi", fissa i punti D ed E). (Con espressione soddisfatta)* Sono proprio bravo!!! Ora AC, CD e DE hanno la stessa lunghezza!

S.: Bene! E adesso disegniamo le rette perpendicolari a quella verticale partendo dai due punti C e D…*(intanto disegna le rette perpendicolari)*

C.: Sono tutte parallele a quella orizzontale!!!

S.: si, perché formano angoli retti con la verticale…ora tracciamo la retta che unisce i punti E e B *(unisce E e B).* Vedi che taglia queste orizzontali in due punti, H ed L? *(appaiono i punti H ed L).*

C.: Si, si, certo, li vedo…!

S.: Ebbene…grazie a Talete sappiamo che la lunghezza di EA è tripla di quella di AC. Allora DL è la terza parte di AB…e…pensa che bello…sappiamo anche che CH è il doppio della terza parte di AB e, quindi, misura i 2/3 del segmento AB da cui siamo partiti!!!!

C.: Che bello!!! Che bello!!! Si può fare con il numero cinque? Si può dividere AB in cinque parti?

S.: Certamente…e che ci vuole!!! Aggiungiamo altri due punti sulla verticale sempre alla stessa distanza *(Compasso esegue e fissa i punti F e G)* e tracciamo le altre due rette parallele *(Squadretta traccia le parallele)*. Ora abbiamo cinque rette orizzontali. Dal punto G tracciamo adesso la nuova trasversale che unisce il punto G al punto B *(Squadretta traccia la nuova trasversale; appaiono poi i punti P, O, N ed M).* questa volta, il segmento più piccolo che abbiamo trovato, FP, è la quinta parte di AB.

C.: Ma si, certo!!! Ed EO sono 2/5, DN 3/5 e CM sono 4/5 di tutto il segmento AB. È facilissimo!!!!

S.: Certo! E possiamo farlo con qualunque altro numero!! Possiamo dividere un segmento in sette parti, in trenta, in mille…!!!! È un po' lungo, ovviamente, ma basta avere un po' di pazienza. Il metodo è sempre lo stesso. Ma dobbiamo farlo sempre insieme!!!

C.: Lo dicevo io che, insieme, avremmo fatto grandi cose!!!!! Ora lo facciamo anche con gli angoli…? E con le circonferenze?

S.: Calma, calma,…è più difficile!!! Ne parliamo domani. Ora sono troppo stanca.

Lezione 12

C.: Squadretta, ti sei riposata…? Se sei pronta, tu ed io insieme possiamo spiegare come si fa a dividere una circonferenza in parti uguali?

S.: Sono prontissima!! Ma ricordati…: ti ho già detto che questo è molto, molto più difficile!!! Una circonferenza non è mica un segmento!

C.: Ma come…? La circonferenza si divide subito in due parti *(circonferenza divisa in due parti uguali)*; o in quattro *(viene divisa in quattro)*; o anche in otto…! *(viene divisa in otto)*

S.: si, ma è facile come per i segmenti, in questo caso! Dividere in quattro è facilissimo e non è troppo complicato continuare a dividere per due…*(la circonferenza si divide in multipli di due)*…vedi, se dividiamo la circonferenza in quattro, possiamo subito costruire un quadrato *(la circonferenza viene prima tagliata "a croce" dai diametri, poi Squadretta unisce le estremità e si forma un quadrato inscritto nella circonferenza)*. Ci sono quattro archi uguali, cioè quattro pezzi uguali della circonferenza. Abbiamo quattro punti alla stessa distanza e la figura che li unisce è un quadrato. Gli angoli sono tutti retti, vedi? *(gli angoli retti si colorano di rosso)* e i lati tutti uguali…! Se ora dividiamo gli archi di nuovo per due, otteniamo otto punti alla stessa distanza *(Squadretta traccia altri due diametri dividendo così la circonferenza in otto parti)*. Ebbene…se li uniamo circolarmente *(unisce le estremità. Si forma così un ottagono)*, costruiamo una nuova figura, che ha otto lati tutti uguali e otto angoli tutti uguali.

C.: Bella questa figura!!! È la pianta di Castel del Monte!!! *(appare una figura di Castel del Monte)*

S.: Si!! E sai come si chiama una figura che ha otto angoli e otto lati uguali??

C.: ….ehmmm…ott..ottusang...mmmh…no…OTTANGOLO!!!

S.: Compasso!!! Ma che dici?! Non sai proprio niente! Si chiama OTTAGONO regolare!!

C.: *(abbattuto)*

S.: *(riprende)* allora, bambini, se abbiamo un quadrato, che è un quadrangolo regolare,…

C.: Lo vedi? Se il quadrato si può chiamare anche quadrangolo, perché una figura che ha otto angoli e otto lati uguali non si può chiamare ottangolo?

S.: *(spazientita)* uffa!!! Perché non lo fa nessuno! Si chiama ottagono e basta!! *(riprende)* Allora, dicevamo, se abbiamo un quadrato, che è un quadrangolo regolare, le diagonali passano per il centro della circonferenza *(vengono messe in evidenza le diagonali)* e formano quattro angoli retti *(gli angoli retti si colorano* *di rosso).* Se prendiamo l'ottagono, le diagonali passano per il centro e dividono lo spazio interno in otto parti uguali *(figura).* Abbiamo così imparato a dividere l'angolo giro, cioè l'interno della circonferenza, in quattro oppure in OTTO parti uguali!! E potremmo continuare facilmente a dividere e dividere sempre per due…

C.: *(riprende a sorridere)* si, ma io lo so fare anche con tre! Ma ho proprio bisogno del tuo aiuto *(disegna una circonferenza).* Ora, Squadretta, disegna un triangolo equilatero qualunque *(S. esegue).* A questo punto, è facile costruirne uno simile che abbia i suoi tre vertici sulla circonferenza *(il triangolo si rimpicciolisce finché i suoi tre vertici non coincidono con tre punti della circonferenza)*

S.: si, hai ragione Compasso. Con un po' di abilità ci si riesce, usando la similitudine. Il triangolo equilatero ha tre lati uguali e tre angoli uguali, come già sapevamo, e questi sono tutti uguali alla terza parte di un angolo piatto *(appare la solita figura di un triangolo equilatero che forma, con i suoi tre angoli, un angolo piatto)*…tre, quattro…va bene!!! Ma è a partire da cinque che incominciano i dolori!!! Diventa assai più complicato!

Lezione 13

(Compare un pentagono inscritto in una circonferenza)

S.: Allora, Compasso, la vedi questa figura? Questo è un PENTAGONO regolare: ha cinque lati e cinque angoli uguali. I suoi cinque vertici dividono la circonferenza in cinque parti uguali *(compaiono le lettere)*. I raggi *(compaiono i raggi)* che vedi, dividono l'interno in cinque fette uguali e l'angolo giro è stato così diviso in cinque parti. Ma…credimi…non è per niente facile costruirlo, trovando l'angolo quinta parte dell'angolo giro…tu ed io, insieme, lo sapremmo fare…ma sai che fatica!!

C.: E con sei?

S.: Ah, questo è di nuovo facile…per costruire un esagono regolare, con sei lati e sei angoli uguali, basta dividere per due le fette già costruite con il triangolo equilatero *(appare la figura del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza; poi ne appare un altro "ruotato" in modo da costruire una stella di Davide).*

C.: E se volessimo dividere la circonferenza in sette parti uguali?

S.: Dovremmo costruire un ETTAGONO regolare…*(appare la figura)*…questa figura ha sette lati e sette angoli uguali, e i raggi che uniscono i sette vertici al centro *(appaiono)* della circonferenza la dividono in sette fette uguali.

C.: E così viene diviso per sette anche l'angolo giro…*(soddisfatto)* Lo vedi, è facilissimo!!! Ho capito tutto!! Esistono figure di questo tipo con un numero qualunque di lati e di angoli, tutte circondate da una circonferenza. Ciascuna di esse divide la circonferenza nello stesso numero di parti uguali…!! Per esempio, il triangolo equilatero la divide in tre parti uguali *(appare la figura)*; il quadrato la divide in quattro *(figura)*; il pentagono la divide in cinque *(figura)*; e così via…!

S.: Si, bravo Compasso, vedo che hai capito tutto, finalmente!! Ma io ti sto dicendo che non è sempre facile costruire queste figure…cioè, non è facile dividere l'angolo o la circonferenza in parti uguali se il numero delle parti è dispari! Per tre era abbastanza facile. Ci siamo riusciti anche per cinque, ma se voglio dividere per sette…

C.: *(confuso)*…ma…e l'ettagono allora?

S.: Ti ho fatto vedere l'ettagono perché ne avevo uno nel cappello magico ma…credimi…tu e io siamo capaci di costruire anche questo, ma bisogna lavorare ancora di più…e la cosa si fa sempre più difficile per numeri dispari più grandi…

C.: *(stupito)…*Oohhh…abbiamo anche un cappello magico!!? *(appare una vignetta sulla testa di Compasso e nella vignetta un cappello dal quale fuoriesce un panino farcito, enorme; Compasso intanto ride)*

S.: Compasso, a cosa stai pensando?...vabbè, ma cosa te lo chiedo a fare…guarda che il cappello magico ci serve quando è troppo difficile spiegare la costruzione di qualche figura geometrica, non per fare apparire panini!!

C.: *(intanto la vignetta scompare in una nuvola di fumo; Compasso deluso)*

V. F. C.: Allora, Squadretta, ma tutte queste figure un nome ce l'hanno o no?

S.: Ma certamente…Ogni figura con lati uguali e angoli uguali si chiama POLIGONO REGOLARE. Per esempio, questo *(appare la figura di un esagono che ruota e forma un dodecagono inscritto in una circonferenza)* è un dodecagono regolare…

Lezione 14

C.: *(Entra trafelato)*…Ma chi è questo Signor Pitagora? Mi hanno detto che, senza di lui, tu e io potevamo cambiare mestiere…!

S.: Eh, si, è vero! Pitagora era un matematico greco vissuto nel VI secolo a.C. *(appare il busto di Pitagora)* e al suo nome è associato un teorema che ha dello sbalorditivo. Eppure è vero!

C.: *(preoccupato)* E in cosa consiste questo teorema?

S.: Te lo spiego subito. Tracciamo un segmento e riproduciamolo quattro volte su questa retta orizzontale (*Squadretta e Compasso insieme riproducono il segmento quattro volte).*

C.: *(agitato)* e poi che succede?

S.: Aspetta, Compasso, dammi il tempo!!! Come sei stressante!!!! Dunque, dove ero rimasta…lo vedi? Mi fai perdere sempre il filo del discorso!!!

C.: abbiamo tracciato un segmento e lo abbiamo riprodotto quattro volte…

S.: Ah, si. Ora disegniamo la perpendicolare. Prendiamo lo stesso segmento e riportiamolo sulla verticale, per tre volte *(di nuovo Compasso e Squadretta riproducono il segmento per tre volte).* Ora, Compasso, uniamo le due estremità*…(Squadretta unisce i due punti e quindi traccia l'ipotenusa del triangolo rettangolo)* Compasso, sai dirmi quanto è lunga l'ipotenusa di questo triangolo rettangolo?

C.: *(Compasso misura in "segmenti" l'ipotenusa)* Si…è cinque volte il segmento!!!!!Ma, Squadretta, ne sei proprio sicura? Non è che abbiamo sbagliato a contare?

S.: No, no, è vero!!! *(Compasso con aria perplessa)* Compasso, non vorrai mica mettere in dubbio la nostra precisione? Ora te lo spiego meglio. Costruiamo i quadrati su questi tre lati *(appaiono i quadrati sui tre lati*). Ti ricordi come si calcola l'area del quadrato?

C.: Si, certo! È il prodotto della lunghezza del lato per se stesso.

S.: Allora, il quadrato costruito sul cateto più piccolo ha area 9 perché è formato da 9 quadratini, se il segmento che hai scelto è lungo 1 *(intanto si colorano ad uno ad uno i quadratini).*

C.: si, giusto, sono 9…

S.: Il quadrato costruito sul secondo cateto vale 16, perché è formato da 16 quadratini. Infatti 4x4 fa 16 *(si colorano ad uno ad uno tutti e 16 i quadratini).*

C.: Si! E quello costruito sull'ipotenusa vale per 25, perché è formato da 25 quadratini, visto che 5x5 fa 25; …o sbaglio?

S.: Ok, vedo che hai capito. Ma ti sei accorto che 25 è la somma di 9 e di 16? Vedi la figura?*(intanto appare la solita costruzione ma il quadrato costruito sull'ipotenusa è diviso in un quadrato formato da 16 quadratini, due da 4 quadratini ciascuno, e uno da un solo quadratino).* Quindi, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è la somma delle aree dei due quadrati, più piccoli, costruiti sui cateti.

C.: Si, va bene, Squadretta. Sembra un colpo di magia…! Ma, in tutto questo, il Signor Pitagora che c'entra?

S.: Beh…, lui ha scoperto che questo è vero in ogni triangolo rettangolo…non solo i questo con lati lunghi 3, 4 e 5! E non è un colpo di magia, perché scomponendo i quadrati in pezzi si può far vedere che è proprio vero *(appare la figura dimostrativa)* che in ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è la somma dei quadrati costruiti sui cateti.

Bibliografia

4.1 Articoli e Libri

- Aebli H., (trad. it. 1957), *Didattica psicologica*, Editrice Universitaria, Firenze.
- Artin E., (1978*), Algèbre gèomètrique*, Gauthier-Villars, Paris.
- Balzola A., Monteverdi A.M., (2004), *Le Arti Multimediali Digitali (Storia, Tecniche, Linguaggi, Etiche ed Estetiche delle Arti del Nuovo Millennio)*, Garzanti, Milano.
- Bertacchini P. A., Bilotta E., Confessore G., Lorenzi M., Serra G., (2003), *Prototipo di un Ambiente Integrato d'Apprendimento Collaborativo sul Web basato su una Comunità Virtuale Visuale,* Atti TED-Didamatica 2003, AICA, Genova.
- Bertacchini P.A., Bilotta E., Servidio R., (2002), *Le Funzioni della Fiaba come Elemento di Base per la Costruzione di Storie in Ambienti Artificiali,* in: Bollettino del Centro Interdipartimentale della Comunicazione, Università della Calabria, Numero 11.
- Bertagnolli A., Bucchi M., *La Percezione Pubblica della Fisica e l'Impatto della Comunicazione Pubblica delle Scienze via Internet: una Rassegna di Dati e Studi,* In: *Comunicare la Fisica,* a cura di Armeni M., Zadigroma Editore, Roma, 2006.
- Bilotta, E. (1999). *Dalla Scienza Cognitiva agli Agenti intelligenti*.
Edizione Memoria, Cosenza.
- Bkouche R., Charlot B., Rouche N., (1991), *Faire des Mathèmatiques: le plaisir du sens*, A. Colin, Paris.
- Branzaglia C., (2003), *Comunicare con le Immagini,* Bruno Mondatori, Milano.
- Bucchi, M., *Public Understanding of Science*, In *Storia della Scienza*, vol. IX. Istituto dell'Enciclopedia Italiana, Roma, 2003: 811-817.
- Bucchi, M., *Science and the Media*. Routledge, Londra, 1998.

– Byrne, P. F., Namuth, D. M., Harrington, J., Ward, S. M., Lee, D. J. e Hain, P., *Increasing Public Understanding of Transgenic Crops through the World Wide Web*, *Public Understanding of Science*, 2002; 11: 293-304.

– Carrada G., (2005), *Comunicare la Scienza (Kit di Sopravvivenza per Ricercatori)*, Sironi Editore Milano.

– Castelnuovo E., (1964), *Didattica della matematica*, La Nuova Italia, Firenze.

– Castelnuovo G., *La scuola nei suoi rapporti con la vita e con la scienza moderna*, conferenza tenuta in occasione del III Congresso della Mathesis nel 1962, e riprodotta in Archimede.

– Chan T., Chou C., (1997). *Exploring the design of computer supports for reciprocal tutoring*. International Journal of Artificial Intelligence in Education, 8, pp. 1-29.

– Comenius J. A., (ried 1960), *Didactica Magna e Pansophia*, La Nuova Italia, Firenze.

– Decroly O., (trad. it. 1959*) Il calcolo e la misura nel primo ciclo della scuola elementare*, Giannasso, Milano.

– Drioli A., (2004), *Linguaggi Elettronici nell'Arte Contemporanea Italiana e Strumenti per la loro Documentazione e Valorizzazione – Interactive Art*, Ph.D Thesis at SUN – Seconda Università di Napoli, Ph.D in "Metodologie Conoscitive per la Valorizzazione e Conservazione dei Beni Culturali", XVII Ciclo.

– Shaw E., Lewis Johnson W., R. Ganeshan. *Pedagogical Agents on the Web*. In:http://www.isi.edu/isd/ADE/papers/agents99/agents99.htm

– Enriques F., (1906) *Sulla preparazione degli insegnanti di scienze*, relazione tenuta al V Congresso degli insegnanti di scuole medie.

– European Commission, Europeans, Science and Technology, *Special Eurobarometer 224*/Wave 63.1, giugno 2005.

– Francaviglia M., Lorenzi M.G., Senatore C., (2008), *Uso di agenti e tecnologie multimediali per una didattica innovativa della matematica e della fisica*, in: Quaderni di didattica 5- in stampa.

- Francaviglia M., Lorenzi M.G., Senatore C., Talarico A., (2007), *Innovative Didactics of Mathematics and Physics at Elementary Standard of Education using Agents and Multimedia Technologies*, in: Proceedings of the WMSCI 2007, 11th World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics, Orlando, Florida, (Usa).
- Francaviglia M., Lorenzi M.G., Senatore C., Talarico A., (2007), *Agents and Multimedia Technologies for an Innovative Didactics of Mathematics and Phisics*, in: Atti del Convegno Didamatica 2007, (Cesena); A. Andronico e G. Casadei eds; parte I, pp. 302-311, Soc. Ed. Asterisco.
- Gay G., Hembrooke H., (2004*), Activity Centered Design. An Ecological Approach to Designing Smart Tools and Usable Systems*, MIT Press, Boston MA, USA.
- Govoni, P., *Un pubblico per la scienza. La divulgazione scientifica nell'Italia in formazione*. Carocci, Roma, 2002.
- Izzo F., *Internet e la Comunicazione della Scienza: una Rivoluzione Copernicana*, In: *Comunicare la Fisica,* a cura di Armeni M., Zadigroma Editore, Roma, 2006.
- Jin Q., (2002)*, Design of a Virtual Community Based Interactive Learning Environment*, Information Sciences, 140, 171-191.
- Klein F., (ried. 1974), *Le programme d'Erlangen, considerations comparatives sur les recherches géométriques modernes*, Gauthier-Villars, Paris, France.
- Koedinger R., (1999), *Component-Based Construction of a Science Learning Space*, International Journal of Artificial Intelligence in Education, 10, pp. 292-313.
- Lewis Johnson W., Ricke J.W., Lester J.C., (2000), *Animated Pedagogical Agents: Face-to-Face Interaction in Interactive Learning Environments*. International Journal of Artificial Intelligence in Education, 11, pp. 47-78.
- Luck M., McBurney P., Preist C., (2003), *Agent Technology: Enabling Next Generation Computing*, Southampton.

– Maestri G., (1996), *Digital Character Animation*, New Riders Publishing (USA); (2001), *Digital Character Animation 2, Volume II: Advanced Techniques*, New Riders Publishing (Indianapolis, USA).

– Mellor, F., (2003), *Between Fact and Fiction: Demarching Science from Non-Science in Popular Physics Books*, Social Studies of Science, 33: 509-538.

– Merton, R. K., (1973), *The Sociology of Science*, The University of Chicago Press, Chicago.

– Miller, J. D. , (2001), *Who is Using the Web for Science and Health Information?*, Science Communication; 22(3): 256-273.

– Montessori M., (1952), *Pèdagogie scientifique. La dèoucuverte de l'enfant*, Desclèe De Brower, Bruges.

– Murray T., (1999). *Authoring Intelligent Tutoring Systems: An Analysis of the State of the Art*, International Journal of Artificial Intelligence in Education, 10, pp.8-129.

– Pestalozzi E., (ried. 1963*), Come Geltrude istruisce i suoi figli*, La Nuova Italia, Firenze.

– Piaget J., Inhelder B., (1955), *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*, Presses Universitaires de France, Paris.

– Piaget J., Inhelder B., Szeminska A., (1948), *La gèomètrie spontanèe de l'enfant*, Presses Universitaires de France, Paris.

– Piaget J., Szeminska A., (1968), *La genesi del numero nel bambino*, La Nuova Italia, Firenze.

– Stanislawski C., (1950), *Building a Character*, Eyre Methuen, London.

– Thorisson, K. R. (1996). *ToonFaee: A System for Creating and Animating Interactive Cartoon Faces. Learning and Common Sense Section*. Technical Report 96-01, Aprile.

– Toppano E., (2002), Sistemi tutorali intelligenti, ambienti interattivi ed agenti pedagogici su web, a cura dell'Università di Udine.

– Trench, B. *Internet: Turning Science Communication inside-out?* ". In: Bucchi, M. and Lewenstein, *Handbook of Public Communication of Science and Technology*, Routledge, forthcoming, London and New York, 2006.

– Vince J., (1995), *Virtual Reality Systems*, Wokingam, Addison-Wesley, (Boston MA, USA).

– Williams R., (2002), *The Animator's Survival Kit: A Manual of Methods, Principles, and Formulas for Classical, Computer, Games, Stop Motion, and Internet Animators*, Faber & Faber Limited, (London).

– Wynne, B., “Public Understanding of Science”. In: Jasanoff , S. et al. (a cura di), *Science Technology and Society Handbook*, 1995; 361-389.

4.2 Siti Internet di riferimento

– RiverWeb Water Quality Simulator In. http://mvhsl.mbhs.edu/riverweb/index1.html

– Shaw E.,Lewis Johnson W. and R. Ganeshan. Pedagogical Agents on the Web. In: http://www.isi.edu/isd/ADE/papers/agents99/agents99.htm.

– CyclePad In: http://www.qrg.ils.nwu.edu/software/softare.htm

– ELM-ART In: http://www.psychologie.uni-trier.de:8000/elmart

– Gallery of Interactive Geometry. In: http://www.geom.umn.edu/apps/gallery.html

– Sito ufficiale dell’UMI: http://umi.dm.unibo.it

– RiverWeb Water Quality Simulator In:http://mvhsl.mbhs.edu/riverweb/index1.html